Н. В. Мирошин, Внешняя задача Дирихле для вырождающегося эллиптического оператора,
Тр. МИАН СССР, 1979, том 150, 198–211

Труды Математического института АН СССР
1979, том 150

Н. В. МИРОШИН

ВНЕШНЯЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Пусть G — ограниченная область n-мерного пространства E^n точек $x = (x_1; \ldots; x_n)$, состоящая из конечного числа конечносвязных областей; ∂G — граница области G — $(n-1)$-мерное многообразие класса C^{m+1}; $G^* \rightleftharpoons E^n \setminus \overline{G}$. В области G^* рассматривается дифференциальный оператор

$$L(x, D)\, u = \sum_{|s|,\, |t| \leqslant m} (-1)^{|s|} D^s (a_{st}(x) D^t u) \tag{1}$$

с коэффициентами $a_{st}(x)$, которые могут иметь степенной порядок вырождения при подходе к границе $\partial G \rightleftharpoons \partial G^*$ и на бесконечности.

Основная часть работы посвящена выделению главной части оператора $L(x, D)$, которая в случае невырождающего эллиптического оператора (в конечной области) соответствует членам

$$L_0(x, D) = \sum_{|s|=|t|=m} (-1)^m D^s (a_{st}(x) D^t)$$

и от которой зависит постановка краевых условий и задание условий на бесконечности. При дополнительных ограничениях на эту часть оператора (условия коэрцитивности в смысле монографии [1, гл. II, п. 9]) для оператора $L(x, D)$ ставится обобщенная первая краевая задача и доказывается ее фредгольмова разрешимость в некотором специально подобранном весовом пространстве. В случае ограниченной области такое рассмотрение первой краевой задачи проведено в работе автора [2].

Настоящая работа состоит из двух параграфов. В § 1 даются основные определения и доказываются вспомогательные утверждения, имеющие самостоятельный интерес (теоремы вложения с ε для весовых пространств). В § 2 рассматривается краевая задача.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Обозначим через $\rho(x)$ функцию класса $C^m(E^n)$, эквивалентную расстоянию от точки $x \in G^*$ до границы ∂G^* (такая функция существует, так как граница ∂G^* — $(n-1)$-мерное многообразие класса C^{m+1}); $d(x) = (1 + |x|^2)^{-1/2}$, $|x|^2 \rightleftharpoons x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Пусть $K_R \rightleftharpoons \{x \in E^n, |x| < R\}$, $K_R^* = E^n \setminus \overline{K}_R$ (где $\overline{K}_R = K_R \cup \partial K_R$) и пусть G_1 — такая область в E^n, что $\overline{G} \subset G_1$. В дальнейшем мы считаем, что R выбрано так, что $\overline{G}_1 \subset K_R$. Введем пространства $(1 < p < \infty)$

$$W^m_{p,\alpha}(G_1 \setminus G) = \{u \in L_p(G_1 \setminus G), | u, W^m_{p,\alpha}(G_1 \setminus G) | < \infty\},$$

$$| u, W^m_{p,\alpha}(G_1 \setminus G) |^p = \int\limits_{G_1 \setminus G} \Big(\rho(x)^\alpha \sum_{|s|=m} | D^s u |^p + | u |^p\Big) dx;$$

$$W^m_{p,\beta,\gamma}(E^n) = \{u; | u, W^m_{p,\beta,\gamma}(E^n) | < \infty\},$$

$$| u, W^m_{p,\beta,\gamma}(E^n) |^p = \int\limits_{E^n} \Big(d(x)^\beta \sum_{|s|=m} | D^s u |^p + d(x)^\gamma | u |^p\Big) dx.$$

Здесь α, β, γ — вещественные числа, $s = (s_1; \ldots ; s_n)$ — мультииндекс, $| s | = s_1 + \ldots + s_n$. Наконец, символом $\widetilde{B}$ мы будем обозначать замыкание множества бесконечно дифференцируемых, финитных относительно бесконечности функций в метрике пространства B. Для получения теорем вложения с ε для введенных пространств нам понадобится

Лемма 1. А). *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, удовлетворяющие условиям*

1) $X \subset Y \subset Z$, 2) *вложение X в Y компактно. Тогда* $\forall \varepsilon > 0\ \exists K(\varepsilon) > 0$ *такая, что* $\forall u \in X$

$$| u, Y | \leqslant \varepsilon | u, X | + K(\varepsilon) | u, Z |. \tag{2}$$

Б) *Пусть* 1) $X \subset Y \subset Z$, 2) *вложение X в Z компактно,* 3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists K(\varepsilon) > 0$ *такая, что* $\forall x \in X$ *имеет место* (2). *Тогда вложение X в Y компактно.*

Доказательство пункта (А) см. в работе [1, гл. 1, п. 16]. Пункт Б) приведен для полноты, в дальнейшем не используется, и поэтому доказательство не проводится (в случае специального $K(\varepsilon)$ см. [3, гл. VI]).

Лемма 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $m > k \geqslant 0$, α *и* $\alpha_1 \geqslant 0$. *Рассмотрим пространства* $W^m_{p,\alpha}(\Omega)$ *и* $W^k_{p,\alpha_1}(\Omega)$, *где* Ω — *ограниченная область в* E^n, *состоящая из конечного числа конечносвязных областей (в частности,* $\Omega = G_1 \setminus \overline{G}$). *Пусть выполняется хотя бы одно из неравенств:*

а) $m - \dfrac{\alpha}{p} > k - \dfrac{\alpha_1}{p}$,

б) $\alpha_1 > \alpha \dfrac{k}{m}$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists K(\varepsilon) > 0$ *такая, что* $\forall u \in W^m_{p,\alpha}(\Omega)$

$$| u, W^k_{p,\alpha_1}(\Omega) | < \varepsilon | u, W^m_{p,\alpha}(\Omega) | + K(\varepsilon) | u, L_p(\Omega) |.$$

Доказательство. Случай (б) при $p = 2$ доказан в работе автора [4], при $1 < p < \infty$ доказательство проводится аналогично, если воспользоваться неравенством (*), приведенном в лемме 3. Докажем лемму в случае выполнения условия а).

Положим $\beta_0 = \alpha - p(m - k)$. Из условия а) получаем, что $\alpha_1 > \beta_0$ и, следовательно, $\gamma = \alpha_1 - \beta_0 > 0$. Рассмотрим сначала случай $\beta_0 < 0$. В этом случае $m - \alpha/p = k - \beta_0/p > 0$, так как $k \geqslant 0$ и мы можем применить известные теоремы вложения ([5]):

$$W^m_{p,\alpha}(\Omega) \subset W_p^{m - \frac{\alpha}{p}}(\Omega) \subset W^k_p(\Omega) \subset W^k_{p,\alpha_1}(\Omega) \subset L_p(\Omega).$$

Вложение $W_p^{m-\alpha/p}(\Omega)$ в $W_p^k(\Omega)$ компактно, так как $m-\alpha/p>k\geqslant 0$, а остальные вложения, по крайней мере, ограничены. Тогда к цепочке пространств

$$W_{p,\alpha}^m(\Omega)\subset W_{p,\alpha_1}^k(\Omega)\subset L_p(\Omega)$$

мы можем применить пункт А) леммы 1. Получаем

$$|u,W_{p,\alpha_1}^k(\Omega)|<\varepsilon|u,W_{p,\alpha}^m(\Omega)|+K(\varepsilon)|u,L_p(\Omega)|.$$

Пусть теперь $\beta_0\geqslant 0$. Тогда $W_{p,\alpha}^m(\Omega)\subset W_{p,\beta_0}^k(\Omega)$ и, следовательно, $|u,W_{p,\beta_0}^k(\Omega)|\leqslant C|u,W_{p,\alpha}^m(\Omega)|$. Зафиксируем $\varepsilon>0$. Имеем

$$\int_\Omega\rho(x)^{\alpha_1}\sum_{|s|=k}|D^su|^p\,dx\leqslant\varepsilon^\gamma\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon}\rho(x)^{\beta_0}\sum_{|s|=k}|D^su|^p\,dx+$$
$$+c_1(\operatorname{diam}\Omega)^{\alpha_1}\int_{\Omega_\varepsilon}\sum_{|s|=k}|D^su|^p\,dx.$$

Здесь $\Omega_\varepsilon\subset\Omega$ — область с границей $\partial\Omega_\varepsilon$ класса C^{m+1} такая, что $\varepsilon<\operatorname{dist}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)<2\varepsilon$, $\operatorname{diam}\Omega=\sup(|x-y|;\ x,y\in\Omega)$. В силу компактности вложения $W_p^m(\Omega_\varepsilon)$ в $W_p^k(\Omega_\varepsilon)$ $\forall\eta>0\ \exists K_1(\eta)>0$ такая, что

$$\int_{\Omega_\varepsilon}\sum_{|s|=k}|D^su|^p\,dx\leqslant\eta\int_{\Omega_\varepsilon}\sum_{|s|=m}|D^su|^p\,dx+K_1(\eta)\int_{\Omega_\varepsilon}|u|^p\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\eta\frac{C_2}{\varepsilon^\alpha}\int_{\Omega_\varepsilon}\rho(x)^\alpha\sum_{|s|=m}|D^su|^p\,dx+K_1(\eta)\int_{\Omega_\varepsilon}|u|^p\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\eta C_2}{\varepsilon^\alpha}\int_\Omega\rho(x)^\alpha\sum_{|s|=m}|D^su|^p\,dx+K_1(\eta)\int_\Omega|u|^p\,dx.$$

Отсюда

$$\int_\Omega\rho(x)^{\alpha_1}\sum_{|s|=k}|D^su|^p\,dx<\varepsilon^\gamma\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon}\rho(x)^{\beta_0}\sum_{|s|=k}|D^su|^p\,dx+$$
$$+C_1(\operatorname{diam}\Omega)^{\alpha_1}\left[\frac{\eta C_2}{\varepsilon^\alpha}|u,W_{p,\alpha}^m(\Omega)|^p+K_1(\eta)|u,L_p(\Omega)|^p\right]\leqslant$$
$$\leqslant\left(C\varepsilon^\gamma+C_1C_2(\operatorname{diam}\Omega)^{\alpha_1}\frac{\eta}{\varepsilon^\alpha}\right)|u,W_{p,\alpha}^m(\Omega)|^p+C_1(\operatorname{diam}\Omega)^{\alpha_1}K_1(\eta)|u,L_p(\Omega)|^p.$$

Выбираем η так, чтобы $C\varepsilon^\gamma=(\eta/\varepsilon^\alpha)C_1C_2(\operatorname{diam}\Omega)^{\alpha_1}$, переобозначаем $2C\varepsilon^\gamma\to\varepsilon^p$ и после несложных преобразований приходим к неравенству

$$|u,W_{p,\alpha_1}^k(\Omega)|<\varepsilon|u,W_{p,\alpha}^m(\Omega)|+K(\varepsilon)|u,L_p(\Omega)|.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $1<p<\infty$, $m>k\geqslant 0$, *и пусть выполнено одно из условий*:

а) $\beta>\theta\alpha+(1-\theta)\gamma$, *где* $\theta=k/m$;

б) $\beta+pk>\alpha+pm$.

Тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists K(\varepsilon)>0$ *такая, что* $\forall u(x)\in\widetilde{W}_{p,\alpha,\gamma}^m(E^n)$

$$|u,W_{p,\beta,\gamma}^k(E^n)|<\varepsilon|u,W_{p,\alpha,\gamma}^m(E^n)|+K(\varepsilon)|u,L_{p,\gamma}(E^n)|.$$

Доказательство. Пусть выполнено б) и $\gamma>\alpha+pm$. В этом случае легко показать, что вложение $\widetilde{W}_{p,\alpha,\gamma}^m(E^n)$ в $\widetilde{W}_{p,\beta,\gamma}^k(E^n)$ компактно, и нужная нам оценка следует из леммы 1. Если же при условии б) $\gamma \leqslant \alpha + pm$, то

$$\theta\alpha + (1-\theta)\gamma \leqslant \theta\alpha + (1-\theta)(\alpha + pm) = \alpha + p(m-k),$$

и, следовательно, из условия б) следует выполнение условия а), т. е. достаточно доказать лемму при выполнении условия а) и при $\gamma \leqslant \alpha + pm$.

Воспользуемся известным неравенством (см. [3, гл. III, § 15], где рассматриваются гораздо более общие неравенства и имеющиеся там ссылки):

$$\int_\Omega \sum_{|s|=k} |D^s u|^p dx \leqslant \varepsilon^{\frac{1}{\theta}} \int_\Omega \sum_{|s|=m} |D^s u|^p dx + \left(\varepsilon^{-\frac{1}{1-\theta}} + 1\right) \int_\Omega |u|^p dx, \qquad (*)$$

$0 < \theta = k/m < 1$ (случай $\theta = 0$, т. е. $k = 0$, очевиден и далее без оговорок отбрасывается).

Это неравенство мы рассмотрим для шара $K_1 = \{x \in E^n;\ |x| < 1\}$ и шарового слоя $\Pi_1 = \{x \in E^n,\ 1 < |x| < 2\}$. Положим в этом неравенстве $\varepsilon = \eta\lambda$. В дальнейшем у нас λ будет ограниченным параметром. Переобозначая $\eta^{1/\theta}$ снова через ε, приходим к неравенству:

$$\int_\Omega \sum_{|s|=k} |D^s u|^p dx \leqslant \varepsilon\lambda^{\frac{1}{\theta}} \int_\Omega \sum_{|s|=m} |D^s u|^p dx + \lambda^{-\frac{1}{1-\theta}} K(\varepsilon) \int_\Omega |u|^p dx.$$

Заметим, что в $K_1^* = E^n \setminus \overline{K}_1$

$$\frac{1}{\sqrt{2}\,|x|} < d(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}} < \frac{1}{|x|}.$$

Отсюда для шарового слоя Π_1

$$\int_{\Pi_1} |x|^{-\beta} \sum_{|s|=k} |D^s u|^p dx < C\Big(\varepsilon\lambda^{\frac{1}{\theta}} \int_{\Pi_1} |x|^{-\alpha} \sum_{|s|=m} |D^s u|^p dx + K(\varepsilon)\lambda^{-\frac{1}{1-\theta}} \int_{\Pi_1} |x|^{-\gamma} |u|^p dx\Big).$$

Пусть $x \in \Pi_1$, $u(x) = v(Rx)$. Тогда $y = Rx \in \Pi_R$, $dx = R^{-n} dy$, $D_x^s v(Rx) = R^{|s|} D_y^s v(y)$. Приходим к неравенству $R^{\beta+pk-n} \int_{\Pi_R} |y|^{-\beta} \sum_{|s|=k} |D^s v(y)|^p dy \leqslant$

$$\leqslant C\Big(\varepsilon\lambda^{\frac{1}{\theta}} R^{\alpha+pm-n} \int_{\Pi_R} |y|^{-\alpha} \sum_{|s|=m} |D^s v(y)|^p dy + K(\varepsilon)\lambda^{-\frac{1}{1-\theta}} R^{\gamma-n} \int_{\Pi_R} |y|^{-\gamma} |u(y)|^p dy\Big).$$

Выбираем λ так, чтобы

$$\lambda^{\frac{1}{\theta}} R^{\alpha+pm-\beta-pk} = 1,$$

$$\lambda^{-\frac{1}{1-\theta}} R^{\gamma-\beta-pk} = 1,$$

т. е. $\theta(\beta + pk - \alpha - pm) = (1-\theta)(\gamma - \beta - pk)$. Отсюда после простых преобразований получаем

$$\beta = \theta\alpha + (1-\theta)\gamma.$$

Кроме того, так как $\gamma \leqslant \alpha + pm$, то легко проверяется, что $\alpha + pm \geqslant \beta + pk$ достаточно для ограниченности параметра λ при всех $R \geqslant 1$. Тогда и при любом $\beta \geqslant \theta\alpha + (1-\theta)\gamma$ в Π_R выполняется неравенство

$$\int_{\Pi_R} d(x)^{\beta} \sum_{|s|=k} |D^s v|^p dx \leqslant C \left(\varepsilon \int_{\Pi_R} d(x)^{\alpha} \sum_{|s|=m} |D^s v|^p dx + K(\varepsilon) \int_{\Pi_R} d(x)^{\gamma} |v|^p dx\right).$$

Мы воспользовались тем, что при $R \geqslant 1$ $d(x) \sim |x|^{-1}$. Записывая аналогичное неравенство для шара K_1, полагая R последовательно равным 2^n, $n = 0, 1, 2 \ldots$, и суммируя полученные неравенства, получаем

$$\int_{E^n} d(x)^{\beta} \sum_{|s|=k} |D^s u|^p dx \leqslant C \Big(\varepsilon \int_{E^n} d(x)^{\alpha} \sum_{|s|=m} |D^s u|^p dx + K(\varepsilon) \int_{E^n} d(x)^{\gamma} |u|^p dx.$$

Отсюда следует лемма.

Пусть $r(x) \in C(E^n)$, $r(x) \equiv \alpha$ при $x \in \overline{G}_1$ и $r(x) \equiv -\beta$ при $x \in \overline{K}^*_R$. Введем пространство

$$W^m_{p,r(x),\gamma}(G^*) = \{u \in L_{p,\gamma}(G^*);\ |u, W^m_{p,r(x),\gamma}(G^*)| < \infty\},$$

$$|u, W^m_{p,r(x),\gamma}(G^*)|^p = \int_{G^*} \Big\{\rho(x)^{r(x)} \sum_{|s|=m} |D^s u|^p + d(x)^{\gamma} |u|^p\Big\} dx.$$

Пусть G_2 — область с гладкой границей, промежуточная между G и G_1, т. е. $\overline{G} \subset G_2$ и $\overline{G}_2 \subset G_1$. Построим следующее разбиение единицы: $e_1(x)$, $e_2(x)$, $e_3(x)$ — функции класса $C^\infty(E^n)$, удовлетворяющие условиям:

1) $e_i(x) \geqslant 0$ $\forall x \in E^n$;

2) $e_1(x) + e_2(x) + e_3(x) \equiv 1$ $\forall x \in E^n$;

3) $e_1(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } x \in \overline{G}_2, \\ 0, \text{ при } x \in \overline{G}^*_1, \end{cases}$

$e_3(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } x \in \overline{K}^*_{2R}, \\ 0, \text{ при } x \in \overline{K}_R. \end{cases}$

Положим $u_i(x) = u(x)e_i(x)$, т. е. $u = u_1 + u_2 + u_3$.

Лемма 4. Пусть $u(x) \in W^m_{p,r(x),\gamma}(G^*)$. *Тогда*

1) $u_1(x) \in W^m_{p,\alpha}(G_1 \setminus G)$, $u_2(x) \in W^m_p(K_{2R} \setminus G_2)$, $u_3(x) \in W^m_{p,\beta,\gamma}(K^*_R)$;

2) $|u, W^m_{p,r(x),\gamma}(G^*)| \sim |u_1, W^m_{p,\alpha}(G_1 \setminus G)| + |u_2, W^m_p(K_{2R} \setminus G_2)| +$
$+ |u_3, W^m_{p,\beta,\gamma}(K^*_R)|$.

Доказательство. Имеем

$$u_1 + u_2 + u_3, W^m_{p,r(x),\gamma}(G^*)| \leqslant |u_1; W^m_{p,r(x),\gamma}(G^*)| + |u_2, W^m_{p,r(x),\gamma}(G^*)| +$$
$$+ |u_3; W^m_{p,r(x),\gamma}(G^*)| \leqslant C\,[|u_1; W^m_{p,\alpha}(G_1 \setminus G)| + |u_2; W^m_p(K_{2R} \setminus G_2)| +$$
$$+ |u_3; W^m_{p,\beta,\gamma}(K^*_R)|].$$

С другой стороны, например, для $u_1(x)$ получаем

$$|u_1(x), W^m_{p,\alpha}(G_1 \setminus G)| = \int_{G_1 \setminus G} \Big[\rho(x)^{\alpha} \sum_{|s|=m} |D^s(e_1 u)|^p + |e_1 u|^p\Big] dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{G_1 \setminus G} \Big[\rho(x)^{\alpha} \sum_{|s|=m} |D^s u|^p + |u|^p\Big] dx +$$
$$+ C \int_{G_1 \setminus G_2} \rho(x)^{\alpha} \sum_{|s|=m} \sum_{0<t\leqslant s} |D^t e_1(x)|^p |D^{s-t} u(x)|^p dx.$$

Поскольку

$$\max_{x \in E^n} \max_{|t| \leqslant m} |D^t e_1(x)|^p = M < \infty,$$

то, в силу известных теорем вложения для невесовых классов, второй интеграл оценивается величиной $C\,|\,u,\ W_p^m(C_1\diagdown G_2)|^p$, а она, очевидно, не превосходит величину $C\,|\,u,\ W_{p,r(x),\gamma}^m(G^*)\,|^p$, умноженную на некоторую константу.

Таким образом, мы доказали

$$|\,u_1, W_{p,\alpha}^m(G_1\diagdown G)\,| \leqslant C\,|\,u,\ W_{p,r(x),\gamma}^m(G^*)\,|.$$

Аналогично доказываются неравенства для функций $u_2(x)$ и $u_3(x)$. Лемма доказана.

Всюду в дальнейшем считаем $p=2$. Перейдем к оценкам формы Дирихле оператора $L(x,D)$, т. е. формы

$$a(u,v)=\int\limits_{G^*}\sum_{|s|,\,|t|\leqslant m} a_{st}(x)\,D^t u\overline{D^s v}\,dx, \tag{3}$$

которая рассматривается первоначально на гладких финитных относительно бесконечности функциях. Предположим, что в $\Omega=\overline{G_1\diagdown G}$ форма (3) представима в виде суммы

$$a(u,\ v)=a_1(u,\ v)+\ldots+a_r(u,\ v) \tag{4}$$

таких форм $a_j(u,\ v)$, что

$$|\,a_j(u,\ v)\,| \leqslant C_j\,|\,u,\ W_{2,\alpha_j}^{m_j}(\Omega)\,|\ |\,v,\ W_{2,\alpha_j}^{m_j}(\Omega)\,|, \tag{4'}$$

где $m=m_1>m_2>\ldots>m_r>0$, а α_j — некоторые неотрицательные числа.

Пусть аналогично в $\overline{K}_R^*$ форма $a(u,\ v)$ представима в виде суммы

$$a(u,\ v)=a_1'(u,\ v)+\ldots+a_k'(u,\ v) \tag{5}$$

таких форм $a_j'(u,\ v)$, что

$$|\,a_j'(u,v)\,| \leqslant C_j'\,|\,u,\ W_{2,\beta_j,\gamma}^{m_j}(K_R^*)\,|\cdot|\,v,\ W_{2,\beta_j,\gamma}^{m_j}(K_R^*)\,|, \tag{5'}$$

где $m=m_1>m_2>\ldots>m_k>0$, а β_j и γ — некоторые вещественные числа.

Дадим следующие определения:

Определение 1. *Форму $a_1(u,v)$ назовем старшей в $\Omega=\overline{G_1\diagdown G}$. Далее, обозначим для удобства $m=m_1$ через l_1, α_1 через α_{l_1} и $a_1(u,\ v)$ через $a_{l_1}(u,\ v)$. Другие старшие в Ω формы определим по индукции. Пусть уже указаны старшие в Ω формы $a_{l_1}(u,\ v),\ \ldots,\ a_{l_{n-1}}(u,\ v)$ и пусть l_n — наибольшее из чисел $\{m_1;\ \ldots;\ m_r\}$, меньшее l_{n-1}, для которого одновременно выполняются неравенства*

$$l_n-\frac{1}{2}\alpha_{l_n} \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{l_i-\frac{1}{2}\alpha_{l_i}\right\},$$

$$\frac{1}{l_n}\alpha_{l_n} \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{1}{l_i}\alpha_{l_i}\right\}.$$

Тогда форму $a_{l_n}(u,\ v)$ также назовем старшей в Ω. Если же такого l_n не найдется, то старшими в Ω будем называть только формы $a_{l_1}(u,\ v),\ldots,$ $a_{l_{n-1}}(u,\ v)$.

Определение 2. Форму $a_1'(u,v)$ назовем старшей в K_R^*. Далее, обозначим для удобства $m=m_1$ через q_1, β_1 через β_{q_1}, $a_1'(u,\ v)$ через $a_{q_1}'(u,\ v)$. Другие *старшие формы определим по индукции. Пусть уже указанные старшие в K_R^* формы $a'_{q_1}(u, v), \ldots, a'_{q_{n-1}}(u, v)$ и пусть q_n — наибольшее из чисел $\{m_1; \ldots; m_k\}$, меньшее q_{n-1}, для которого одновременно выполняются неравенства*

$$\beta_{q_n} + 2q_n \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \{\beta_{q_i} + 2q_i\},$$

$$\beta_{q_n} < \min_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \left\{\beta_{q_i} \frac{q_n}{q_i} + \left(1 - \frac{q_n}{q_i}\right)\gamma\right\}.$$

Тогда форму $a'_{q_n}(u, v)$ также назовем старшей в K_R^*. Если же такого q_n не найдется, то старшими будем называть только формы $a'_{q_1}(u, v), \ldots, a'_{q_n}(u, v)$.

Пусть $\{a_{l_j}(u, v)\}_{j=1}^{p}$ и $\{a'_{q_j}(u, v)\}_{j=1}^{h}$ — старшие формы в Ω и K_R^* соответственно, выбранные согласно данным выше определениям. На каждую из старших форм мы наложим условия коэрцитивности в соответствующих пространствах, т. е. $\exists \lambda_j, \lambda'_j \geqslant 0$ и $\exists \delta_j, \delta'_j > 0$ такие, что

$$\operatorname{Re}\{a_{l_j}(u, u) + \lambda_j |u, L_2(\Omega)|^2\} \geqslant \delta_j |u, W^{l_j}_{2, \alpha_{l_j}}(\Omega)|^2, \tag{6}$$

$$\operatorname{Re}\{a'_{q_j}(u, u) + \lambda'_j |u, L_{2,\gamma}(K_R^*)|^2\} \geqslant \delta'_j |u, W^{q_j}_{2, \beta_{q_j}, \gamma}(K_R^*)|^2. \tag{7}$$

Заметим, что $l_1 = q_1 = m$. Пусть можно выбрать форму $a_0(u, v)$ такую, что

$$a_0(u, v) \equiv a_{l_1}(u, v) \text{ в } \Omega,$$

$$a_0(u, v) \equiv a'_{q_1}(u, v) \text{ в } K_R^*,$$

и пусть $\exists r(x) \in C(E^n)$, $r(x) \equiv \alpha_{l_1}$ при $x \in \overline{\Omega}$, $r(x) \equiv -\beta_{q_1}$ при $x \in \overline{K}_R^*$, и такая что

$$\operatorname{Re}\{a_0(u, u) + \lambda' |u, L_{2,\gamma}(G^*)|^2\} \geqslant \delta' |u, W^m_{2, r(x), \gamma}(G^*)|^2 \tag{8}$$

с некоторыми λ' и $\delta' > 0$.

Коэффициенты оператора $L(x, D)$ будем считать комплекснозначными, измеримыми в G^* функциями, ограниченными в $\overline{K_{2R} \setminus G_2}$. Заметим, что в других частях области G^* поведение коэффициентов $a_{st}(x)$ определено оценками (4)—(5) и (6)—(7).

Введем пространство

$$H_+ = \{u \in L_{2,\gamma}(G^*),\ |u, H_+| = \|u\|_+ < \infty\},$$

$$\|u\|_+^2 = \sum_{j=1}^{p} |u_1, W^{l_j}_{2, \alpha_{l_j}}(\Omega)|^2 + |u_2, W_2^m(K_{2R} \setminus G_2)|^2 + \sum_{j=1}^{h} |u_3, W^{q_j}_{2, \beta_{q_j}, \gamma}(K_R^*)|^2,$$

а функции u_1, u_2, u_3 ($u \equiv u_1 + u_2 + u_3$) те же, что в лемме 4. Наконец, через $\tilde{H}_+$ мы обозначаем замыкание гладких, финитных относительно бесконечности функций в метрике H_+.

Т е о р е м а 1. *Пусть форма $a(u, v)$ на гладких, финитных относительно бесконечности функциях удовлетворяет наложенным выше условиям ((4)—(5), (6)—(8) и условию ограниченности $a_{st}(x)$ в $K_{2R} \setminus G_2$). Тогда $\exists \lambda_0 \geqslant 0$, $\delta_0 > 0$, $C_0 > 0$ такие, что для всех $u, v \in \tilde{H}_+$ выполняются оценки:*

1) $|a(u, v)| \leqslant C_0 \|u\|_+ \|v\|_+$,

2) $\operatorname{Re}\{a(u, u) + \lambda_0 |u, L_{2,\gamma}(G^*)|^2\} \geqslant \delta_0 \|u\|_+^2$.

Доказательство. 1) Полагая $u = u_1 + u_2 + u_3$, $v = v_1 + v_2 + v_3$, получаем

$a(u, v) = a(u_1; v_1) + a(u_1; v_2) + a(u_2; v_1) + a(u_2; v_2) + a(u_2; v_3) + a(u_3; v_2) + a(u_3; v_3)$.

Оценка для $a(u_1; v_1)$ получается следующим образом. Так как носители u_1 и v_1 лежат в G_1, то имеем

$$|a(u_1; v_1)| \leqslant \sum_{j=1}^{r} |a_j(u_1; v_1)| \leqslant \sum_{j=1}^{r} C_j |u_1; W_{2,\alpha_j}^{m_j}(\Omega)| \cdot |v_1; W_{2,\alpha_j}^{m_j}(\Omega)| \leqslant$$
$$\leqslant C \sum_{j=1}^{p} |u_1; W_{2,\alpha_{l_j}}^{l_j}(\Omega)| \cdot |v_1; W_{2,\alpha_{l_j}}^{l_j}(\Omega)|.$$

Первое и второе неравенство следуют из (4) и (4′), а последнее из определения старшей формы.

Аналогично

$$|a(u_2; v_2)| \leqslant C |u_2; W_2^m(K_{2R} \setminus G_2)| \cdot |v_2; W_2^m(K_{2R} \setminus G_2)|,$$
$$|a(u_3; v_3)| \leqslant C \sum_{j=1}^{h} |u_3; W_{2,\beta_{q_j},\gamma}^{q_j}(K_R^*)| \cdot |v_3, W_{2,\beta_{q_j},\gamma}^{q_j}(K_R^*)|.$$

Оценим форму $a(u_1; v_2)$. Другие формы оцениваются аналогично. Для $a(u_1; v_2)$ имеем

$$a(u_1; v_2)| = \Big| \int\limits_{G_1 \setminus G_2} \sum_{|s|, |t| \leqslant m} a_{st}(x) D^t u_1 \overline{D^s v_2}\, dx \Big| \leqslant$$
$$\leqslant M \int\limits_{G_1 \setminus G_2} \sum_{|s|, |t| \leqslant m} |D^t u_1| \cdot |D^s v_2|\, dx \leqslant MC_1 |u_1; W_2^m(G_1 \setminus G_2)| \times$$
$$\times |v_2, W_2^m(G_1 \setminus G_2)| \leqslant C |u_1, W_{2,\alpha_{l_1}}^{l_1}(\Omega)| \cdot |v_2, W_2^m(K_{2R} \setminus G_2)|.$$

Отсюда уже легко получить первую из доказываемых оценок.

2) Докажем вторую оценку. Положим $a'(u, v) = a(u, v) - a_0(u, v)$. Тогда

$$\mathrm{Re}\,\{a(u, u) + \lambda |u, L_{2,j}(G^*)|^2\} = \mathrm{Re}\{a_0(u, u) + \lambda' \times |u, L_{2,\gamma}(G^*)|^2\} +$$
$$+ \mathrm{Re}\,\{a'(u, u) + (\lambda - \lambda')|u; L_{2,\gamma}(G^*)|^2\} \geqslant \delta' |u, W_{2,r(x),\gamma}^m(G^*)|^2 +$$
$$+ \mathrm{Re}\,\{a'(u, u) + (\lambda, \lambda')|u, L_{2,\gamma}(G^*)|^2\} \geqslant \delta''(|u_1, W_{2,\alpha l_1}^{l_1}(\Omega)|^2 + |u_2, W_2^m(K_{2R} \setminus$$
$$\setminus G_2)|^2 + |u_3, W_{2,\beta q_1,\gamma}^{q_1}(K_R^*)|^2) + \mathrm{Re}\{a'(u, u) + (\lambda - \lambda')|u, L_{2,\gamma}(G^*)|^2\}.$$

Предпоследнее неравенство следует из оценки (8), а последнее из леммы 4. Форму $a'(u, u)$ представим в виде $a'(u, u) = a'(u_1, u_1) + a'(u_1, u_2) + a'(u_2; u_1) + a'(u_2; u_2) + a'(u_2; u_3) + a'(u_3; u_2) + a'(u_3; u_3)$.

Так как форма $a'(u, v)$ не содержит членов с обеими старшими производными, то, пользуясь неравенствами

$$|D^s u_1| |D^t u_2| \leqslant \frac{1}{2} \frac{1}{\eta} |D^s u_1|^2 + \frac{1}{2} \eta |D^t u_2|^2,$$
$$\int\limits_{G_2 \setminus G_2} \frac{1}{\eta} |D^s u_1|^2 dx \leqslant \varepsilon \frac{1}{\eta} |u_1, W_2^m(G_1 \setminus G_2)|^2 + \frac{1}{\eta} K(\varepsilon) |u_1, L_2(G_1 \setminus G_2)^2 \leqslant$$
$$\leqslant C\varepsilon \frac{1}{\eta} |u_1, W_{2,\alpha_{l_1}}^{l_1}(\Omega)|^2 + CK(\varepsilon) \frac{1}{\eta} |u_1, L_2(\Omega)|^2$$

при $|t| \leqslant m$ и $|s| < m$, выбирая сначала η, а затем ε достаточно малыми, легко оцениваем слагаемые $a'(u_1;\ u_2)$, $a'(u_2,\ u_1)$, $a'(u_2;\ u_2)$. Оценки для $a'(u_2;\ u_3)$ и $a'(u_3;\ u_2)$ получаем аналогично.

Для $a'(u_1;\ u_1)$ получаем

$$\operatorname{Re} a'(u_1; u_1) = \sum_{j=1}^{p} \operatorname{Re} a_{l_j}(u_1; u_1) + \sum_i \operatorname{Re} a_i(u_1; u_1).$$

Во вторую сумму включены не старшие формы. Из определения 4 и леммы 2 следует, что для любой не старшей формы $a_i(u_1;\ u_1)$ найдется старшая форма $a_{l_i}(u_1;\ u_1)$ такая, что

$$\operatorname{Re} a_{l_i}(u_1;\ u_1) + \lambda_i |u_1,\ L_2(\Omega)|^2 \geqslant \delta_i |u_1;\ W_{2,\alpha l_i}^{l_i}(\Omega)|^2,$$

$$\operatorname{Re} a_i(u_1;\ u_1) \leqslant |a_i(u_1;\ u_1)| \leqslant C_i |u_1,\ W_{2,\alpha_i}^{m_i}(\Omega)|^2 \leqslant C_i [\varepsilon_i |u_1,\ W_{2,\alpha_{l_i}}^{l_i}(\Omega)|^2 + K(\varepsilon)|u_1,\ L_2(\Omega)|^2].$$

Отсюда, выбирая ε_i достаточно малыми, а параметр λ достаточно большим, получаем

$$\operatorname{Re} a'(u_1; u_1) \geqslant \sum_{j=2}^{p} \operatorname{Re} a_{l_j}(u_1; u_1) - \sum_i |a_i(u_1; u_1)| \geqslant \sum_{j=2}^{p} \frac{1}{2}\delta_j |u_1; W_{2,\alpha l_j}^{l_j}(\Omega)|^2 - \lambda |u, L_2(\Omega)|^2.$$

Аналогично оценивается слагаемое $a'(u_3;\ u_3)$. Из приведенных выше оценок слагаемых $a'(u_i; u_j)$ легко следует вторая оценка теоремы. Теорема доказана.

§ 2. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Перейдем к постановке и решению краевой задачи. Пусть $\tilde{H}_+$ — то же пространство, что и в § 1, и пусть s_0 — целое число, удовлетворяющее неравенствам

$$\mu - \frac{1}{2} \leqslant s_0 < \mu + \frac{1}{2},$$

где $\mu = \max\{l_j - {}^1/_2\alpha_{l_j},\ 1 \leqslant j \leqslant p\}$.

Тогда у любой функции u из H_+ на границе ∂G существуют следы:

$$u\Big|_{\partial G} = \varphi_0 \in W_2^{\mu-\frac{1}{2}}(\partial G), \ldots, \frac{\partial^{s_0-1} u}{\partial n^{s_0-1}}\Big|_{\partial G} = \varphi_{s_0-1} \in W_2^{\mu - s_0 + \frac{1}{2}}(\partial G),$$

где $n = n(\vec{x})$ — единичная внешняя нормаль к ∂G. Это легко следует из строения пространства H_+ и теорем о следах функций из весовых пространств, приведенных, например, в работе [6] (если $s_0 \leqslant 0$, то функция не имеет следов на ∂G).

Обозначим через $\tilde{H}_+^0$ подпространство функций из $\tilde{H}_+$ с нулевыми выписанными следами на ∂G. По пространствам $\tilde{H}_+^0$ и $L_{2,\gamma}(G^*)$ построим оснащенное гильбертово пространство $\tilde{H}_+^0 \subset L_{2,\gamma} \subset \tilde{H}_-^0$ (относительно определения оснащенного пространства и построения $\tilde{H}_-^0$ см. [7, гл. 1]). Наконец, определим класс

$$\mathfrak{M} = \{g,\ |a(g,\ u)| \leqslant C(g) |u,\ H_+|\} \tag{9}$$

для всякой функции $u \in \tilde{H}_+^0$.

Рассмотрим следующую задачу: для заданного элемента $g \in \mathfrak{M}$ и заданного функционала $F \in \overset{0}{H}_-$ найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$a(u, \varphi) = \langle F, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \overset{0}{H}_+, \tag{10}$$

$$u - g \in \overset{0}{H}_+. \tag{11}$$

Из (9) следует, что $a(g, \varphi)$ является при фиксированном g линейным функционалом над $\overset{0}{H}_+$, следовательно, $\exists G \in \overset{0}{H}_-$ такой, что $a(g, \varphi) = < G, \varphi >$, где $<\cdot; \cdot>$ обозначает действие функционала из $\overset{0}{H}_-$ на элемент из $\overset{0}{H}_+$. Переобозначив $(u - g)$ снова через u, а$(F - G)$ снова через F, задачу (10)—(11) сводим к задаче

$$a(u, \varphi) = < F, \varphi > \quad \forall \varphi \in \overset{0}{H}_+, \tag{12}$$

$$u \in \overset{0}{H}_+. \tag{13}$$

Наряду с задачей (12)—(13) рассмотрим вспомогательную задачу

$$a(u, \varphi) + \lambda(u, \varphi)_{2,\gamma} = \langle F, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \overset{0}{H}_+, \tag{14}$$

$$u \in \overset{0}{H}_+, \tag{15}$$

и отвечающие задаче (14) — (15) однородную и формально сопряженные задачи:

$$a(u, \varphi) + \lambda(u, \varphi)_{2,\gamma} = 0 \quad \forall \varphi \in \widetilde{H}^0_+, \tag{16}$$

$$u \in \widetilde{H}^0_+; \tag{17}$$

$$a^+(v, \varphi) + \overline{\lambda}(v, \varphi)_{2,\gamma} = \langle \Phi, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \widetilde{H}^0_+, \tag{18}$$

$$v \in \widetilde{H}^0_+; \tag{19}$$

$$a^+(v, \varphi) + \overline{\lambda}(v, \varphi)_{2,\gamma} = 0 \quad \forall \varphi \in \widetilde{H}^0_+, \tag{20}$$

$$v \in \widetilde{H}^0_+. \tag{21}$$

Здесь $(u, \varphi)_{2,\gamma}$ обозначает скалярное произведение функций в гильбертовом пространстве $L_{2,j}(G^*)$, $a^+(u, \varphi) = \overline{a(\varphi, u)}$.

Теорема 2. *Пусть форма $a(u, v)$ удовлетворяет условиям теоремы* 1 *и пусть вложение пространства $\overset{0}{H}_+$ в $L_{2,\gamma}(G^*)$ компактно. Тогда задачи* (14) — (21) *фредгольмовы в следующем смысле*:

1) *задача* (14)—(15) *разрешима для тех и только тех $F \in \overset{0}{H}_-$, которые удовлетворяют условию $< F, v > \equiv 0$ на всех решениях задачи* (20)—(21);

2) *задача* (16) — (17) *имеет ненулевое решение лишь для счетного числа значений параметра $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$; $|\lambda_k| \to \infty$*;

3) *задача* (20) — (21) *имеет те же собственные значения, что и задача* (16) — (17), *причем размерности пространств решений, отвечающих одному и тому же значению параметра λ, конечны и равны.*

Доказательство теоремы 2 для случая невырождающегося эллиптического оператора хорошо известно (см., например, [7 гл. II, § 3]). В нашем случае оно проводится аналогично с использованием оценок теоремы 1 и компактности вложения $\overset{0}{H}_+$ в $L_{2,\gamma}(G^*)$.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия*

$$\mu = \max\left\{l_j - \frac{1}{2}\alpha_{l_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant p\right\} > 0, \tag{22}$$

$$\gamma > \min\{\beta_{q_j} + 2q_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant h\}. \tag{23}$$

Тогда вложение $\overset{0}{H}_+$ в $L_{2,\gamma}(G^*)$ компактно.

Доказательство. Пусть $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n \in \mathring{H}_+$,— такая последовательность, что $\sup_n \| u_n \|_+ < M$. Покажем, что

$$\exists \{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$$

такая, что

$$| w_n - w_m;\ L_{2,\gamma}(G^*) | \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Отсюда будет следовать лемма. Пусть $\{e_i(x)\}_{i=1}^{3}$ — разбиение единицы, построенное в § 1; рассмотрим последовательность функций $u_{1n}(x) = u_n e_1(x)$.

Тогда $u_{1n}(x) \in \bigcap_{j=1}^{p} W_{2,\alpha_{l_j}}^{l_j}(\Omega) = B_1$ и $\forall n$ $| u_{1n};\ B_1 | < C_1 M$. Но вложение B_1 в $L_2(\Omega)$ компактно, так как

$$B_1 = \bigcap_{j=1}^{p} W_{2,\alpha_{l_j}}^{l_j}(\Omega) \subset W_2^{\mu}(\Omega) \subset L_2(\Omega),$$

а последнее вложение, в силу условия $\mu > 0$ и ограниченности Ω, компактно. Следовательно, существует подпоследовательность

$$\{v_{1n}(x)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{u_{1n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

такая, что

$$| v_{1n}(x) - v_{1m}(x)\ L_2(\Omega) | \to 0, \qquad n, m \to \infty.$$

Рассмотрим $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $(v_{1n} = v_n e_1(x))$. Аналогично, положим $v_{2n}(x) = v_n(x) e_2(x)$. Тогда

$$v_{2n}(x) \in W_2^m(K_{2R} \setminus G_2)$$

и

$$\sup_n | v_{2n},\ W_2^m(K_{2R} \setminus G_2) | < C_2 M.$$

В силу компактности вложения $W_2^m(K_{2R} \setminus G_2)$ в $L_2(K_{2R} \setminus G_2)$ получаем

$$\exists \{h_{2n}(x)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{v_{2n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

такая, что

$$| h_{2n} - h_{2m};\ L_2(K_{2R} \setminus G_2) | \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Рассмотрим, далее, последовательность $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $(h_{2n}(x) = h_n(x) e_2(x))$ и заметим, что

$$h_{3n}(x) = e_3(x) h_n(x) \in \bigcap_{j=1}^{h} W_{2,\beta_{q_j},\gamma}^{q_j}(K_R^*) = B_3, \quad \sup_n | h_{3n},\ B_3 | < C_3 M.$$

Обозначим, далее, через $\bar{q}$ и $\beta_{\bar{q}}$ те значения q_j и β_{q_j}, на которых достигается минимум в (23). Тогда

$$B_3 \subset W_{2,\beta_{\bar{q}},\gamma}^{\bar{q}}(K_R^*) \subset L_{2,\gamma}(K_R^*),$$

а последнее вложение компактно в силу условия $\gamma > \beta_{\bar{q}} + 2\bar{q}$ (см. [8, гл. VI, с. 301—302]). Отсюда

$$\exists \{w_{3n}(x)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{h_{3n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

такая, что

$$| v_{3n} - v_{3m},\ L_{2,\gamma}(K_R^*) | \to 0, \qquad n, m \to \infty.$$

Тогда для последовательности $\{w_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$

$$| w_n - w_m,\ L_{2,\gamma}(G^*) | \leqslant C\{| w_{1n} - w_{1m},\ L_2(\Omega) | + | w_{2n} - w_{2m},\ L_2(K_{2R} \setminus G_2) | + | w_{3n} - w_{3m},\ L_{2,\gamma}(K_R^*) |\} \to 0,$$

так как каждый член справа стремится к нулю при n и $m \to \infty$. Лемма доказана.

В качестве следствия леммы 5 и теоремы 2 для задачи (12) — (13) получаем следующую теорему.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и леммы* 5. *Тогда для задачи* (12)—(13) *имеет место следующая альтернатива: либо однородная задача*

$$a(u, \varphi) = 0 \qquad \forall \varphi \in \widetilde{H}_{+}^{0}, \tag{24}$$

$$u \in \widetilde{H}_{+}^{0} \tag{25}$$

имеет ненулевое решение, либо задача (12)—(13) *разрешима и притом однозначно при любом* $F \in \widetilde{H}_{-}^{0}$. *Если задача* (24)—(25) *имеет ненулевое решение, то задача* (12)—(13) *разрешима для тех и только тех* $F \in \widetilde{H}_{-}^{0}$, *которые удовлетворяют условию* $\langle F, v\rangle \equiv 0$ *на всех решениях задачи*

$$a^{+}(v, \varphi) = 0 \qquad \forall \varphi \in \widetilde{H}_{+}^{0},$$

$$v \in \widetilde{H}_{+}^{0}.$$

Отметим, что идея использования норм весовых пространств для оценки формы Дирихле оператора Лапласа в неограниченной области впервые реализована Л. Д. Кудрявцевым в работе [9] (см. также имеющуюся там библиографию). Внешние краевые задачи для полигармонического оператора рассмотрены В. И. Половинкиным [10] (см. также монографию [8] и имеющиеся там ссылки).

В заключение рассмотрим один простой пример указанной схемы. Пусть $L(x, D)$ равен сумме двух вырождающихся полигармонических операторов:

$$L(x, D) = L_m(x, D) + L_k(x, D),$$

т. е. операторов, которым соответствуют формы Дирихле вида

$$a(u, v) = a_m(u, v) + a_k(u, v) = \int_{G^*} \Big(\sum_{|s|=|t|=m} a_{st}(x) D^t u \overline{D^s v}\Big) dx + $$
$$+ \int_{G^*} \Big(\sum_{|s|=|t|=K} b_{st}(x) D^t u \overline{D^s v}\Big) dx. \tag{26}$$

Будем считать, что коэффициенты $a_{st}(x)$ и $b_{st}(x)$ являются комплекснозначными, измеримыми в G^* функциями, и пусть для $x \in G_1$ ($\overline{G} \subset G_1$)

$$\max_{|s|=|t|=m} |a_{st}(x)| \leqslant M_1 (\rho(x))^{\alpha}, \qquad \max_{|s|=|t|=K} |b_{st}(x)| \leqslant M_2 (\rho(x))^{\alpha_1},$$

и вне некоторого большого шара K_R ($\overline{G}_1 \subset K_R$)

$$\max_{|s|, |t|=m} |a_{st}(x)| \leqslant N_1 (d(x))^{\beta}, \qquad \max_{|s|=|t|=K} |b_{st}(x)| \leqslant N_2 (d(x))^{\beta_1}.$$

Числа α и α_1 неотрицательные, а β и β_1 любые вещественные.

Кроме того, пусть в $K_R \setminus G$ коэффициенты $a_{st}(x)$, $b_{st}(x)$ ограничены. Пусть, наконец, $\exists$ — функция $r(x)$, непрерывная, равная α в $\overline{G}_1$ и $(-\beta)$ в K_R^*, такая, что

$$\operatorname{Re} a_m(u, u) \geqslant \delta \,|\, u, \ \overset{m}{\omega}_{2, r(x)} (G^*)\,|^2,$$

где

$$|\, u, \ \overset{m}{\omega}_{2, r(x)} (G^*)\,|^2 = \int_{G^*} \rho(x)^{r(x)} \sum_{|s|=m} |D^s u|^2\, dx.$$

Из условий, наложенных на коэффициенты, очевидна оценка

$$|a_m(u, v)| \leqslant C\,|u,\ \omega^m_{2,r(x)}(G^*)| \cdot |v,\ \omega^m_{2,r(x)}(G^*)| \tag{27}$$

на все функции из $\omega^m_{2,r(x)}(G^*)$.

Займемся оценкой формы $a_k(u, v)$. В области G_1 (т. е., по крайней мере, на гладких функциях с носителями в G_1) имеет место оценка

$$|a_k(u, v)| \leqslant C_1\,|u,\ \omega^k_{2,\alpha_1}(G_1 \setminus G)| \cdot |v,\ \omega^k_{2,\alpha_1}(G_1 \setminus G)|, \tag{28}$$

а в K^*_R —

$$|a_k(u, v)| \leqslant C_2\,|u,\ \omega^k_{2,-\beta_1}(K^*_R)| \cdot |v;\ \omega^k_{2,-\beta_1}(K^*_R)|. \tag{29}$$

Если одновременно выполняются неравенства

$$k - \frac{1}{2}\alpha_1 \geqslant m - \frac{1}{2}\alpha, \qquad \frac{1}{k}\alpha_1 \leqslant \frac{1}{m}\alpha, \tag{30}$$

то, согласно определению 1, форму $a_k(u, v)$ мы называем старшей в $G_1 \setminus G$ и на нее накладываем дополнительное условие (в данном случае $\lambda = 0$)

$$\operatorname{Re} a_k(u, u) \geqslant \delta\,|u,\ \omega^k_{2,\alpha_1}(G_1 \setminus G)|^2, \tag{31}$$

которое должно выполняться на всех достаточно гладких функциях с носителями в $G_1 \setminus G$ с некоторой константой $\delta > 0$. Если же хотя бы одно из неравенств (30) не выполняется, то на форму $a_k(u, v)$ условие (31) не накладывается.

Аналогично, если для некоторого числа γ, удовлетворяющего неравенству

$$\gamma > \min\{\beta_1 + 2k,\ \beta + 2m\}, \tag{32}$$

одновременно выполняются неравенства

$$\beta_1 + 2k \leqslant \beta + 2m, \qquad \beta_1 < \beta\frac{k}{m} + \left(1 - \frac{k}{m}\right)\gamma, \tag{33}$$

то форму $a_k(u, v)$, согласно определению 2, мы называем старшей в K^*_R и накладываем на нее условие

$$\operatorname{Re} a_k(u, u) > \delta'\,|u,\ \omega^k_{2,-\beta_1}(K^*_R)|^2, \tag{34}$$

которое должно выполняться, по крайней мере, на всех достаточно гладких функциях с носителями, лежащими в K^*_R и финитными на бесконечности.

Если же условия (33) не выполняются, то условие (34) не накладывается. Заметим, что в данном простом случае всегда можно γ брать равным любому числу, большему $\beta + 2m$. Тогда при выполнении неравенства $\beta_1 + 2k \leqslant \beta + 2m$ второе из неравенств (33) выполняется автоматически.

Рассмотрим, например, случай, когда форма $a_k(u, v)$ является старшей в K^*_R, но не старшей в $\Omega = G_1 \setminus G$. Тогда в качестве пространства H_+ мы берем пространство с нормой

$$\|u\|^2_+ = |u_1;\ W^m_{2,\alpha}(\Omega)|^2 + |u_2;\ W^m_2(K_{2R} \setminus G_2)|^2 + |u_3;\ W^m_{2,\beta,\gamma}(K^*_R)|^2 + \\ + |u_3;\ W^k_{2,\beta_1,\gamma}(K^*_R)|^2.$$

Область G_2, шар K_{2R} и функции u_1, u_2 и u_3 строятся так же, как в § 1. Как и ранее, обозначим через $\mathring{H}_+$ замыкание финитных относительно бесконечности функций в норме пространства H_+. Условия леммы 5 (т. е. условия компактности вложения $\mathring{H}_+$ в $L_{2,\gamma}(G)$) в данном случае сводятся к требованию: $m - {}^1/_2\alpha > 0$, так как γ уже выбрано: $\gamma > \beta + 2m$. В качестве правых частей мы можем брать функционалы из пространства $\mathring{H}^0_-$ ($\mathring{H}^0_+$ — подпространство в $\mathring{H}_+$, которое состоит из функций с нулевым допустимым следом на ∂G). В качестве начальных данных мы можем брать функции из пространства

$$\mathfrak{M} \supseteq \omega^m_{2,\, r(x)}(G^*) \bigcap \omega^k_{2,\, -\beta}\,(K^*_R),$$

так как из оценок (27) и (29) следует, что это пространство вложено в класс $\mathfrak{M}$.

Теперь для данной формы легко ставится краевая задача и для нее получаются результаты теорем 2 и 3. Аналогично рассматриваются другие случаи.

Очевидно, полученные результаты легко распространяются на случай нескольких полигармонических вырождающихся на границе операторов.

Автор выражает глубокую благодарность профессору П. И. Лизоркину за постановку задачи и постоянное внимание, проявляемое к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лионс Ж.-Л., Madженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
2. *Мирошин Н. В.* Первая краевая задача для эллиптических операторов, вырождающихся на границе области.— ДАН СССР, 1976, 230, № 2, с. 275—278.
3. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
4. *Мирошин Н. В.* Обобщенная задача Дирихле для одного класса эллиптических дифференциальных операторов, вырождающихся на границе области. Некоторые спектральные свойства.— Диф. уравнения, 1976, 12, № 6.
5. *Успенский С. В.* О теоремах вложения функций в гладких областях.— Труды Симп. по теоремам вложения, Баку, 1966. М.: Наука, 1970.
6. *Никольский С. М., Лизоркин П. И.* О некоторых неравенствах для функций из весовых классов и краевых задачах с сильным вырождением.—ДАН СССР, 1964, 159, № 3, с. 512—515.
7. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наукова Думка, 1965.
8. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул.— М.: Наука, 1974.
9. *Кудрявцев Л. Д.* Решение краевых задач в неограниченных областях при конечности интеграла энергии.— Труды Симп. по теоремам вложения, Баку, 1966. М.: Наука, 1970.
10. *Половинкин В. И.* Внешняя задача Дирихле и Неймана для полигармонического уравнения.— Диф. уравнения, 1971, 7, № 1.