Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 1, 78—79.

УДК 517.98

ЛАГРАНЖЕВЫ КОЛЬЦА. МНОГОМАСШТАБНАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСА

М. В. Карасев

1. Наличие резонансов или некоммутирующих симметрий приводит к вырождению старшей части асимптотики спектра дифференциального оператора. Если нет резонансов, то символ секулярного оператора, снимающего вырождение, является скалярной функцией на эйлеровых орбитах алгебры симметрий [1; 2]. В настоящей работе мы хотим показать, что при появлении резонанса секулярный символ становится операторнозначным и его собственные значения — *термы* — задаются квантованием некоторой вспомогательной гамильтоновой системы, известной, видимо, со времен Лагранжа и Лапласа [3]. При этом задачу снятия вырождения удается до конца решить в трех случаях. Во-первых, когда алгебра симметрий абелева. Во-вторых, когда рассматриваются спектральные серии, соответствующие точкам покоя вспомогательной системы, т. е. положениям равновесия резонансного тора. Эти случаи — простейшие; решение получается здесь комбинацией методов [4; 5] и метода Борна — Оппенгеймера.

Наиболее интересная ситуация возникает при больших отклонениях тора от положения равновесия. Из-за взаимодействия близких термов упомянутые выше методы здесь непосредственно неприменимы. Но при условии интегрируемости вспомогательной системы (например, при однократном резонансе) вклады близких термов в асимптотику удается эффективно просуммировать, вводя вместо собственных функций операторные (смешанные) состояния [6]. Их главными фронтами осцилляций служат лагранжевы подмногообразия с краем — тороидальные кольца, заметаемые при колебаниях резонансным тором. Проекция края этих колец на конфигурационное пространство представляет собой каустику, возникшую за счет резонанса. Совершенно изменяется также сама структура асимптотики и в разложении по степеням параметра появляются дробные показатели. Асимптотика теперь строится сразу в нескольких масштабах, которые определяются степенью малости возмущения относительно параметра квазиклассического приближения, степенью резонанса в основной системе, во вспомогательной системе и т. д.

При некотором соотношении между этими степенями дробные показатели отсутствуют и одновременно исчезает вспомогательная гамильтонова система. Вычисление термов требует тогда точного решения некоторого дифференциального уравнения порядка $\geqslant 2$ (впервые оно было получено в [7]; см. также [8; 9]). В модельном примере, рассмотренном ниже, этот вырожденный случай соответствует нулевому субглавному символу $a = b = c = 0$.

2. На торе $\mathbf{T}^3$ рассмотрим вейлевский оператор $\mathbf{H} = H(x, y, z; -i\nabla_x, -i\nabla_y, -i\nabla_z)$ с символом $H(x, y, z; \xi, \zeta, \eta) = \xi^2 + \zeta^2 + a\xi + b\zeta + c\eta + V$, где $0 \leqslant x, y, z \leqslant 2\pi$, a, b, c, V — гладкие вещественные функции на торе. Главный символ $H_0(\xi, \zeta) = \xi^2 + \zeta^2$ имеет некоммутативную алгебру симметрий с образующими z, η и, кроме того, его орбитальные частоты $\partial H_0/\partial\xi$, $\partial H_0/\partial\zeta$ попадают в резонанс при любых целых ξ, ζ. Не уменьшая общности, можно считать, что резонанс наступает на луче $\xi = 0$, $\zeta \geqslant 1$; любой другой приводится к нему поворотом и растяжением координат x, y. Нас будет интересовать лишь область $|\xi| \lesssim |\zeta|^{1/2}$, так как при $|\zeta|^{1/2} \ll |\xi| \ll |\zeta|$ применима обычная нерезонансная схема, а область $|\xi| \sim |\zeta|$ соответствует уже переходу в зону нового резонанса.

После усреднения по траекториям нерезонансной части главного символа $H_0(0, \zeta)$ (т. е. после подходящего унитарного преобразования U) мы перейдем от оператора $\mathbf{H}$ к новому оператору $\overline{\mathbf{H}} = U\mathbf{H}U^{-1}$ с символом

$$\overline{H} = \zeta^2 + \zeta \cdot s(x, p; z, k) + \mathcal{R}, \quad p \equiv \zeta^{-1/2}\xi, \quad k \equiv \zeta^{-1}\eta. \tag{1}$$

Здесь $s = s_0 + \zeta^{-1/2}s_1$, $s_0 = p^2 + \bar{b}(x, z) + k\bar{c}(x, z)$, $s_1 = p\bar{a}(x, z)$, чертой обозначено среднее по переменной y, а остаток $\mathcal{R}$ равномерно ограничен $\mathcal{R} = O(1)$ в области $|p| \lesssim |\zeta|^{11/10}$ (и, тем более, в интересующей нас области $|p| \lesssim 1$).

Отметим, что на спектре значения нерезонансного «действия» $\zeta = n$ целые. Найдем асимптотику собственных значений оператора $\mathbf{H}$ при $n \to \infty$.

Из (1) следует, что операторнозначный секулярный символ в данной задаче имеет вид $\hat{s} = s(x, -in^{-1/2}\nabla_x; z, k)$. Таким образом, помимо n сразу возникает новый масштаб асимптотики $\sqrt{n}$. *Вспомогательная система*, определяемая в (x, p)-пространстве функцией Гамильтона $s_0(x, p; z, k)$, параметрически зависит от образующих алгебры симметрий. Ее квантование дает термы (функции от z, k), отстоящие друг от друга на расстояние $\sim n^{-1/2}$. Мы рассмотрим здесь лишь высокие термы, т. е. третий из перечисленных в разделе 1 случаев, и опишем взаимодействие динамики в (z, k)-пространстве симметрий с динамикой в (x, p)-пространстве.

3. Фиксируем последовательности целых чисел $m \sim n$, $l \sim n^{1/2}$. Пусть для всех (z, k, E) из некоторого компакта уравнение $\bar{b}(x, z) + k\bar{c}(x, z) = E$ имеет относительно x два гладких решения $x_i = x_i(z, k, E)$ $(i = 0, 1)$, причем, $0 < x_0 < x_1 < 2\pi$ и на интервале (x_0, x_1) функция $\bar{b} + k\bar{c}$ строго меньше E, а вне отрезка $[x_0, x_1]$ вблизи его концов она строго больше E. Точки x_0, x_1 — это границы зоны колебаний резонансного тора. Обозначим $J(z, k, E) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x_1}(E - \bar{b} - k\bar{c})^{1/2}dx$. Предположим, что кривые $\Gamma(E)$ в (z, k)-пространстве, заданные уравнением $J(z, k, E) = (l + 1/2)\, n^{-1/2}$, замкнуты. Через $e(z, k)$ обозначим решение этого уравнения относительно неизвестной E, а через $e_{n,l,m}$ — те значения энергии E, при которых действие $\Sigma = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\Gamma(E)} k\,dz$ принимает значения m/n. Пусть τ координата угол, сопряженная Σ.

Введем также действие $I = J(z, k, s_0(x, p; z, k))$ для гамильтониана s_0 и две частоты: $\omega(z, k, I) = \partial s_0/\partial I$ — частота колебаний резонансного тора вдоль кривых $\{s_0 = e(z, k)\}$ в (x, p)-пространстве и $\Omega(E) = \partial e/\partial\Sigma$ — частота движения вдоль кривых $\Gamma(E) = \{e(z, k) = E\}$ в (z, k)-пространстве. Усреднение вдоль первого семейства кривых и дополнительное усреднение вдоль второго семейства (относительно нормированных инвариантных мер) обозначим скобками $\langle\ldots\rangle$ и «...».

Пусть $\mathrm{ad}(I)$ гамильтоново поле функции I в (x, p)-пространстве. Поскольку I адиабатический инвариант, то среднее от его дифференциала $\partial I = \partial_{z,k} I$ по параметрам z, k равно нулю: $\langle\partial I\rangle = 0$. Поэтому уравнение $\mathrm{ad}(I)\,\varphi = \partial I$ имеет единственное решение φ с нулевым средним $\langle\varphi\rangle = 0$. Именно это решение описывает в з а и м о д е й с т в и е б л и з к и х т е р м о в. Оно задает 1-форму в (z, k)-пространстве и позволяет построить две функции: $\nu = \varphi(a\partial(e))$ и $\mu = \varphi(a\partial(I))$. Обозначим $\delta =$ «$s_1 - \nu - \omega\mu/2$». Кроме того, по двум базисным циклам на торе $\{I = \mathrm{const},\ e = E = \mathrm{const}\}$ в (x, p, z, k)-пространстве проинтегрируем форму $(\nu d\tau - \Omega p dx)/2\pi$. Один из этих двух интегралов равен ΩI; второй обозначим через $\sigma = \sigma(I, E)$. Договоримся также значения какой-либо величины $g(I, E)$ при $I = (l + 1/2)\, n^{-1/2}$ и $E = e_{n,l,m}$ обозначать через $g_{n,l,m}$.

Т е о р е м а. *Пусть для выбранной последовательности целых чисел* $m \sim n$, $l \sim n^{1/2}$ *каждая частота* $\Omega_{n,l,m}$ *несоизмерима с частотой* $(\partial\sigma/\partial I)_{n,l,m}$ *(так что константа c в общем условии несоизмеримости (5.11) [3] растет медленнее* $n^{1/8}$*). Тогда оператор* **H** *имеет резонансную серию собственных значений* $n^2 + ne_{n,l,m} + n^{1/2}(\delta_{n,l,m} + \sigma_{n,l,m}) + \varepsilon_{n,l,m} + O(n^{-1/2})$.

Формула для чисел $\varepsilon_{n,l,m} = O(1)$ опущена из-за ее чрезвычайной громоздкости.

Главный фронт осцилляций собственных состояний оператора **H**, отвечающих указанной резонансной серии, является трехмерным л а г р а н ж е в ы м к о л ь ц о м. Точнее, в фазовом пространстве $T^*(\mathbf{T}^3)$ с координатами $(x, y, z;\ k_x, k_y, k_z)$ (где $\vec{k} \sim -in^{-1}\nabla$) фронт задается соотношениями $k_x = 0$, $k_y = 1$, $(z, k_z) \in \Gamma(E)$, $x_0(z, k_z, E) \leqslant x \leqslant x_1(z, k_z, E)$, где $E = e_{n,l,m}$.

Рассмотренная здесь на модельном примере схема построения резонансных серий применима и в общей ситуации работ [1, 2].

П р и м е ч а н и е п р и к о р р е к т у р е. Дифференциальные операторы с символами типа (1), содержащие параметры разных масштабов по разным переменным, возникли также в работе Л. В. Б е р л я н д а, С. Ю. Д о б р о х о т о в а (УМН.— 1986.— т. 41, № 4.— С. 195) по методу усреднения для уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами. Здесь многомасштабность асимптотики заложена в самой постановке задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карасев М. В.* // Функцион. анализ и его прил.— 1984. Т. 18, вып. 2.— С. 65—66. 2. *Карасев М. В.* // Функцион. анализ и его прил.— 1986. Т. 20, вып. 1.— С. 21—32. 3. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3. М.: 1985.— С. 5—304. Деп. в ВИНИТИ. 4. *Маслов В. П.* Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965. 5. *Маслов В. П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1976. 6. *Карасев М. В.* // ТМФ.— 1984. Т. 61, № 1.— С. 118—127. 7. *Маслов В. П.* // ДАН СССР.— 1958. Т. 123, № 4.— С. 631—634. 8. *Маслов В. П., Воробьев Е. М.* // ДАН СССР.— 1968. Т. 179, № 3.— С. 558—561. 9. *Велиев О. А., Молчанов С. А.* // Функцион. анализ и его прил.— 1985. Т. 19, вып. 3.— С. 86—87.

Московский институт
электронного машиностроения

Поступило в редакцию
9 декабря 1985 г