

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Кийко, А. Д. Чарухчев, Оптимизация формы стержня кольцевого поперечного сечения, изгибаемого в области упругопластических деформаций,

Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 5, 63–66

<https://www.mathnet.ru/vmumm2055>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

27 апреля 2025 г., 09:58:05



9. Green A. E., Naghdi P. M. A dynamical theory of interacting continua//Int. J. Eng. Sci. 1965. 3, N 2. 231—241.
10. Ильюшин А. А. Функционалы и меры необратимости на множествах процессов в механике сплошной среды (МСС)//Докл. РАН. Механика. 1994. 337, № 1. 48—50.
11. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformables. Paris, 1909.
12. Новацкий В. Теория упругости. М., 1975.
13. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid//J. Acoust. Soc. Amer. 1956. 28. 168—178.
14. Biot M. A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media//J. Appl. Phys. 1962. 33, N 4. 1482—1498.
15. Бровко Г. Л., Ильюшин А. А. Об одной плоской модели перфорированных плит//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1993. № 2. 83—91.

Поступила в редакцию
09.02.96

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. I, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 5

УДК 539.3

И. А. Кийко, А. Д. Чарухчев

ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ СТЕРЖНЯ КОЛЬЦЕВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ, ИЗГИБАЕМОГО В ОБЛАСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

В публикациях [1, 2] представлено решение задачи об оптимальной форме стержня прямоугольного поперечного сечения; показано, что при упругопластическом изгибе (так же, как и при упругом) условие минимума энергии деформации (как критерий оптимальности) при сохранении объема материала стержня приводит к условию равнодеформируемости. В работе [3] та же задача решена для случая переменного нагружения.

1. Рассмотрим стержень кольцевого поперечного сечения; внутренний радиус r считаем постоянным, внешний $R_1=R_1(x)$ — переменным (координата x направлена по оси стержня). Стержень свободно оперт по торцам и изгибается поперечной нагрузкой $q(x)$, которой соответствует эпюра изгибающих моментов $m_0M(x)$; m_0 — монотонно возрастающий параметр нагрузки. Ставится задача определения $R_1(x)$ из условий равнодеформируемости и постоянства объема; материал стержня полагаем идеальным упругопластическим.

В дальнейшем изложении различаем два случая: а) $y_s > r$ — изгиб при малых деформациях; б) $y_s < r$ — изгиб при развитых упругопластических деформациях; y_s — граница упругопластической области.

Рассмотрим задачу в варианте $y_s > r$. Уравнение равновесия запишется в виде

$$mM(x) = R^3(x) \varphi(u) - \pi \kappa / 4 \epsilon_s, \quad (1.1)$$

$$\varphi(u) = \frac{(1-u^2)^{1/2}}{2} + \frac{\arcsin u}{2u} + \frac{(1-u^2)^{3/2}}{3};$$

здесь обозначено $u = \epsilon_s / \kappa R$, $\kappa = \kappa_1 r$, $R = R_1 / r$, $m = m_0 / \sigma_s r^3$, κ_1 — кривизна изогнутой оси стержня, ϵ_s — предел упругих деформаций, σ_s — предел текучести.

Условие сохранения объема примет форму

$$\int_0^l (R^2(x) - 1) dx = V_0 / \pi r^2 l \equiv V, \quad (1.2)$$

где V_0 — заданный объем, l — длина стержня.

Критерий равнодеформируемости означает $u = u_0 = \text{const}$, откуда $\kappa = \varepsilon_s / u_0 R$. Подставив это выражение в (1.1), получим уравнение для определения $R(x)$:

$$mM(x)R(x) = R^4(x) \varphi(u_0) - \pi/4u_0. \quad (1.3)$$

Обозначим через $R_0(x)$ положительный, превосходящий единицу корень этого уравнения; подставив его в (1.2), придем к уравнению относительно u_0 :

$$\int_0^1 R_0^2(x) dx = V + 1. \quad (1.4)$$

Соотношения (1.3), (1.4) решают поставленную задачу.

При малых упругопластических деформациях $u_0 = 1 - \lambda$, $\varphi(u_0) \cong \cong \pi(1 + \lambda)/4$, $\lambda^2 \ll 1$; подставив это выражение в (1.3), получим относительно $R(x)$ уравнение

$$R^4 = 1 + aR, \quad a = 4mM(x)/\pi(1 + \lambda).$$

Его решение может быть найдено методом приближений

$$R^{(0)} = 1, \quad R^{(k)} = (1 + aR^{(k-1)})^{1/4}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

сходимость которого легко устанавливается [4]. Если $\max(a) \ll 1$, достаточно ограничиться вторым приближением

$$R_0(x) \cong R^{(2)}(x) = (1 + a(1 + a)^{1/4})^{1/4} = 1 + \frac{a}{4} - \frac{a^2}{32}.$$

С такой же точностью $R_0^2 \cong 1 + a/2$, поэтому из (1.4) находим $1 + \lambda = 2mM_0/\pi V$, $a = 2MV/M_0$ и окончательно

$$R(x) = 1 + \frac{VM(x)}{2M_0} - \frac{V^2M^2(x)}{8M_0^2}, \quad M_0 = \int_0^1 M(x) dx.$$

Условие $\max(a) = (2V/M_0)M_{\max}(x) \ll 1$ заведомо выполняется для сравнительно тонкостенных стержней, когда $V^2 \ll 1$.

Результат, как видно, состоит в том, что в рассмотренном приближении оптимальная толщина стенок стержня $h(x) = R(x) - 1$ не зависит от механических свойств материала и определяется только видом нагрузки; это согласуется с результатами [1—3].

2. В случае развитых упругопластических деформаций ($y_s < r$) уравнение изгиба имеет вид

$$mM(x) = R^3(x) \varphi(u) - \varphi(uR), \quad (2.1)$$

здесь функция φ та же, что и в соотношении (1.1).

При условии равнодеформируемости $u = u_0 = \text{const}$ правая часть (2.1) есть непрерывная функция от R , равная нулю при $R = 1$ и монотонно возрастающая при $R > 1$. Следовательно, существует решение (2.1): $R(x) = f_1(u_0, mM(x)) > 1$; подставив его в условие (1.2) сохранения объема, получим

$$\int_0^1 f_1^2(u_0, mM(x)) dx \equiv f_2(u_0, m) = V + 1, \quad (2.2)$$

откуда $u_0 = f_3(m, V)$. Окончательно для оптимального радиуса $R(x)$ находим

$$R(x) = f_1(f_3, mM(x)) = f(x; m, V).$$

Качественный анализ решения проведем для сравнительно тонкостенного стержня $R(x) = 1 + h(x)$, $h^2(x) \ll 1$. Легко доказывается [4], что решение (2.1) может быть построено сходящимся методом последовательных приближений

$$R^{(0)} = 1,$$

$$R^{(k)} = \left(\frac{mM(x) + \varphi(u_0 R^{(k-1)})}{\varphi(u_0)} \right)^{1/3}; \quad k = 1, 2, \dots$$

В рассматриваемом случае достаточно ограничиться первым приближением

$$R(x) \cong R^{(1)}(x) = \left(1 + \frac{mM(x)}{\varphi(u_0)} \right)^{1/3}; \quad (2.3)$$

поскольку решение зависит только от отношения $m/\varphi(u_0)$, из (2.2) находим $f_2(u_0, m) \equiv g(m/\varphi(u_0)) = V + 1$, откуда $m/\varphi(u_0) = g^{-1}(V + 1) = g_0(V)$. Подставив его в (2.3), окончательно получаем

$$R(x) \cong R^{(1)}(x) = (1 + g_0(V)M(x))^{1/3}.$$

Следовательно, как и в п.1, оптимальная толщина стенок стержня определяется только видом нагрузки.

Представляет интерес сравнить несущую способность стержня оптимальной формы и стержня постоянного поперечного сечения. Исчерпанию несущей способности соответствует $u \rightarrow 0$, $uR \rightarrow 0$, $\varphi(u) \cong \varphi(uR) \rightarrow 4/3$. Если m^* — критическое значение параметра нагрузки, то из (2.1) находим

$$R_*(x) = (1 - 3m^*M(x)/4)^{1/3}, \quad (2.4)$$

при этом $m^* = 4g_0(V)/3$.

Обозначим через $\rho = (1 + V)^{1/2}$ внешний радиус стержня постоянного поперечного сечения, x_m — точка максимального значения изгибающего момента, \tilde{m}^* — критическое значение параметра нагрузки; условием исчерпания несущей способности стержня постоянного поперечного сечения является

$$\frac{3}{4} \tilde{m}^* M(x_m) = \rho^3 - 1 = (1 + V)^{3/2} - 1.$$

Коэффициент увеличения прочности по несущей способности окажется равным

$$\eta = \frac{m^*}{\tilde{m}^*} = \frac{4m^*M(x_m)}{3[(1 + V)^{3/2} - 1]} = \frac{g_0(V)M(x_m)}{(1 + V)^{3/2} - 1}. \quad (2.5)$$

Рассмотрим для примера стержень, который изгибается сосредоточенной силой, приложенной к середине пролета. Тогда картина симметрична относительно точки $x = 0,5$, $M(x) = 0,5x$, $0 \leq x \leq 0,5$, и из (2.4) следует

$$R_*(x) = (1 + 3m^*x/8)^{1/3}, \quad 0 \leq x \leq 0,5.$$

Из условия сохранения объема получим

$$(1 + 3m^*/16)^{5/3} = 1 + 5m^*(1 + V)/16. \quad (2.6)$$

Если, например, $V=1/3$, то решением (2.6) будет $m^*=5,88$; поскольку $x_m=0,5$, $M(x_m)=0,25$, из (2.5) окончательно находим $\eta=2,04$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кийко И. А., Чарухчев А. Д. Оптимизационные задачи в изгибе и устойчивости упругопластических стержней//Изв. РАН. Механ. тверд. тела. 1991. № 6. 170—175.
2. Кийко И. А., Хашба Г. Н., Чарухчев А. Д. Две задачи об оптимизации формы неупругих стержней//Упругость и неупругость. М., 1993. 97—107.
3. Кийко И. А. Оптимизация формы упругопластического стержня при сложном переменном нагружении//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1994. № 4. 60—63.
4. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2. М., 1959.

Поступила в редакцию
09.02.96

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 5

УДК 530.9

А. А. Васильев

КОНТИНУАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ДВУХРЯДНОЙ КОНЕЧНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ КРАЕВЫХ ЭФФЕКТОВ

Замена неоднородных систем однородными моделями эффективно используется при решении ряда задач. В строительной механике широко применяются решетчатые конструкции. Уточнение моделей с целью учета некоторых эффектов, обусловленных структурой, базируется, как правило, на отказе от тех или иных гипотез, принимаемых в простейших моделях [1]. Отказ от предположения о том, что движение системы может быть полностью определено одним полем перемещений, и использование при моделировании нескольких полей перемещений приводят к построению многополевых моделей. Вопросы разработки многополевого подхода рассматривались, в частности, в работах [2, 3], вопросы построения пограничных операторов — в работе [4].

В настоящей статье на примере двухрядной конечной дискретной системы при растяжении с помощью многополевого подхода показано, что у краев, в окрестности дефектов, локальных нагрузок возникает погранслоное быстроосциллирующее поле смещений. Такие модели представляют интерес, в частности, при изучении разрушения.

Дискретные уравнения, уравнения однополевой и двухполевой моделей. Уравнения для поперечных смещений v_n узлов двухрядной системы (рис. 1) при действии сил f , если пренебречь смещениями вдоль

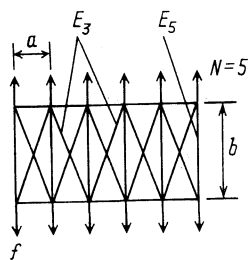


Рис. 1

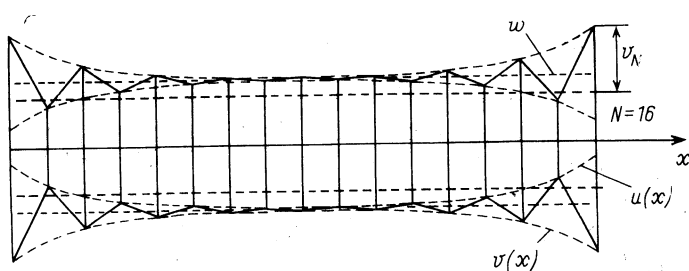


Рис. 2