К. А. Жевлаков, О правых идеалах альтернативного кольца,
Матем. заметки, 1972, том 12, выпуск 3, 239–242

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 12, № 3 (1972), 239—242

УДК 519.48

О ПРАВЫХ ИДЕАЛАХ АЛЬТЕРНАТИВНОГО КОЛЬЦА

К. А. Жевлаков

Доказывается, что если P — правый, а I — двусторонний идеал альтернативного кольца A, то ни P^2, ни IP не являются, вообще говоря, правыми идеалами кольца A. Кроме того, показано, что в альтернативном кольце A правый аннулятор правого идеала P, т. е. множество $\mathfrak{Z}_r(P) = \{z \in A \mid Pz = 0\}$, не обязан быть ни левым, ни правым идеалом, ни даже подкольцом кольца A. Библ. 2 назв.

Довольно известные вопросы в теории альтернативных колец: будет ли произведение двух правых идеалов или хотя бы квадрат правого идеала альтернативного кольца снова правым идеалом этого кольца?

Эти вопросы, например, поднимаются М. Слэйтером в [1] (5.5 и 5.10).

Ниже даются отрицательные ответы на эти вопросы. Оказывается, что если P — правый, а I — двусторонний идеал альтернативного кольца A, то ни P^2, ни IP не являются, вообще говоря, правыми идеалами кольца A. Будет также показано, что в альтернативном кольце A правый аннулятор правого идеала P, т. е. множество $\mathfrak{Z}_r(P) = \{z \in A \mid Pz = 0\}$, не обязан быть ни левым, ни правым идеалом, ни даже подкольцом кольца A. При этом в качестве A может быть взята некоторая конечномерная альтернативная алгебра над любым полем.

1°. Пусть F — произвольное поле. Рассмотрим 16-мерную алгебру A над этим полем с базисом:

$$e_1, e_2, e_3; \quad f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6; \quad g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7.$$

Все произведения базисных элементов алгебры A, которые отличны от 0, суть следующие:

$$e_1e_2 = f_1, \quad e_1e_3 = f_2, \; e_1f_4 = g_3 - g_1, \quad e_1f_6 = g_1 + g_2;$$
$$e_2e_1 = f_3, \quad e_2e_3 = f_4, \quad e_2f_2 = g_1 + g_4, \quad e_2f_5 = g_5 - g_1;$$
$$e_3e_1 = f_5, \quad e_3e_2 = f_6, \quad e_3f_1 = g_7 - g_1, \quad e_3f_3 = g_6 + g_1;$$
$$f_1e_3 = g_3, \quad f_2e_2 = g_2, f_3e_3 = g_4, \quad f_4e_1 = g_5, \quad f_5e_2 = g_7,$$
$$f_6e_1 = g_6.$$

Для доказательства того, что эта алгебра A альтернативна, заметим прежде всего, что

1) все g_i — аннуляторы алгебры A,

2) все f_i порождают подалгебру с нулевым умножением,

3) $(e_ie_j)\,e_k = e_i\,(e_je_k)$, если только какие-либо два из индексов i, j, k совпадают.

Поэтому для доказательства альтернативности A достаточно показать, что $(e_i, e_j, e_k) + (e_i, e_k, e_j) = 0$ и $(e_i, e_j, e_k) + (e_j, e_i, e_k) = 0$ при любой перестановке i, j, k из 1, 2, 3. Таких сумм всего шесть:

$$(e_1, e_2, e_3) + (e_1, e_3, e_2) = f_1e_3 - e_1f_4 + f_2e_2 - e_1f_6 =$$
$$= g_3 - g_3 + g_1 + g_2 - g_1 - g_2 = 0,$$
$$(e_2, e_1, e_3) + (e_2, e_3, e_1) = f_3e_3 - e_2f_2 + f_4e_1 - e_2f_5 =$$
$$= g_4 - g_1 - g_4 + g_5 - g_5 + g_1 = 0,$$
$$(e_3, e_1, e_2) + (e_3, e_2, e_1) = f_5e_2 - e_3f_1 + f_6e_1 - e_3f_3 =$$
$$= g_7 - g_7 + g_1 + g_6 - g_6 - g_1 = 0,$$
$$(e_2, e_3, e_1) + (e_3, e_2, e_1) = f_4e_1 - e_2f_5 + f_6e_1 - e_3f_3 =$$
$$= g_5 - g_5 + g_1 + g_6 - g_6 - g_1 = 0,$$
$$(e_1, e_3, e_2) + (e_3, e_1, e_2) = f_2e_2 - e_1f_6 + f_5e_2 - e_3f_1 =$$
$$= g_2 - g_1 - g_2 + g_7 - g_7 + g_1 = 0,$$
$$(e_1, e_2, e_3) + (e_2, e_1, e_3) = f_1e_3 - e_1f_4 + f_3e_3 - e_2f_2 =$$
$$= g_3 - g_3 + g_1 + g_4 - g_1 - g_4 = 0.$$

Итак, алгебра A альтернативна. Возьмем в алгебре A следующие подпространства (в фигурных скобках выписан их базис):

$$I = \{e_1; f_1, f_2, f_3, f_5; \quad g_i, \quad i = 1, 2, \ldots, 7\},$$
$$B = \{e_2; f_3, f_4; g_i, i = 1, 2, \ldots, 7\},$$
$$C = \{e_1, e_2; f_1, f_2, f_3, f_4; g_i, \; i = 1, 2, \ldots, 7\}.$$

Из таблицы умножения алгебры A очевидным образом следует, что в алгебре A I — двусторонний идеал, а B и C — правые идеалы. Рассмотрим теперь подпространства IB и C^2.

$$IB = \{f_1, g_2, g_7, \ g_3 - g_1\},$$
$$C^2 = \{f_1, f_3, g_3 - g_1, g_1 + g_4, g_2, g_5\}.$$

Остается только убедиться, что ни IB, ни C^2 не являются правыми идеалами алгебры A. В самом деле, f_1 лежит и в IB и в C^2, но $f_1e_3 = g_3$, а g_3 не лежит ни в IB, ни в C^2.

2°. Сначала заметим, что в алгебре A идеал, порожденный элементами f_3 и f_4 есть подпространство $N = \{f_3, f_4, g_4, g_5, g_1 + g_6, g_3 - g_1\}$. Рассмотрим фактор-алгебру $\bar{A} = A/N$. Обозначив в $\bar{A}$ образы e_1, e_2, e_3 через p_1, p_2, p_3, образы f_1, f_2, f_5, f_6 — через t_1, t_2, t_3, t_4 и образы g_1, g_2, g_7 — через s_1, s_2, s_3 соответственно, получаем, что $\bar{A}$ — 10-мерная алгебра над полем F, альтернативная (как гомоморфный образ альтернативной алгебры A), с базисом

$$p_1, p_2, p_3; \ t_1, t_2, t_3, t_4; \ s_1, s_2, s_3,$$

причем все отличные от 0 произведения базисных элементов суть следующие:

$$\begin{array}{llll} p_1p_2 = t_1, & p_1p_3 = t_2, & p_1t_4 = s_1 + s_2, & p_2t_2 = s_1, \\ p_2t_3 = -s_1, & p_3p_1 = t_3, & p_3p_2 = t_4, & p_3p_1 = -s_1 + s_3, \\ t_1p_3 = s_1, & t_2p_2 = s_2, & t_3p_2 = s_3, & t_4p_1 = -s_1. \end{array}$$

Возьмем в алгебре $\bar{A}$ подпространство

$$D = \{p_2; s_i, \ i = 1, 2, 3, 4\}.$$

Легко видеть, что D — правый идеал алгебры $\bar{A}$. Обозначив через $\mathfrak{Z}_r(D) = \{z \in \bar{A} \mid Dz = 0\}$ правый аннулятор правого идеала D, заметим, что $p_1 \in \mathfrak{Z}_r(D)$ и $p_3 \in \mathfrak{Z}_r(D)$. В то же время $p_1p_3 = t_2$ и $p_2t_2 = s_1 \neq 0$, т. е. $t_2 = p_1p_3 \notin \mathfrak{Z}_r(D)$, таким образом, $\mathfrak{Z}_r(D)$ не является подалгеброй алгебры A.

З а м е ч а н и е. Очевидно, что в ассоциативном кольце R для правого идеала $P\mathfrak{Z}_r(P)$ является двусторонним идеалом. Любопытно заметить, что во всяком альтернативном кольце A левый аннулятор правого идеала P, т. е. множество $\mathfrak{Z}_e(P) = \{y \in A \mid yP = 0\}$, является левым идеалом (так же, как и в ассоциативном случае).

Действительно, пусть P — правый идеал альтернативного кольца A, $\mathfrak{Z}_e(P)$ — левый аннулятор P, $p \in P$, $z \in \mathfrak{Z}_e(P)$ и $a \in A$, тогда

$$(az)\,p = a\,(zp) + (a, z, p) = (z, p, a) = \\ = (zp)\,a - z\,(pa) = 0,$$

так как $pa \in P$ и $z \in \mathfrak{Z}_e(P)$ (см. также [2], леммы 1 и 2).

В заключение отметим, что, взяв фактор-алгебру $\widetilde{A}$ алгебры A по идеалу, порожденному f_3 и g_5, получим 12-мерную алгебру, в которой для правого идеала $\widetilde{D}$ — полного прообраза D в алгебре $\widetilde{A}$ ($\bar{A}$ является очевидным образом фактор-алгеброй алгебры $\widetilde{A}$) — правый аннулятор $\mathfrak{Z}_r(D)$ является подалгеброй, но не является ни правым, ни левым идеалом алгебры $\widetilde{A}$.

Институт математики
Сибирского отделения АН СССР

Поступило
30. III. 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Slater M., Alternative rings with d. c. c. II, J. Algebra, 14, № 4 (1970), 464—484.
[2] Жевлаков К. А., Радикальные идеалы альтернативного кольца, Алгебра и логика, Семинар, 4 № 4 (1965), 87—102.