



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

R. M. Mustafin, Estimation of an entire function in terms of the estimate of the function and its derivatives in a closed strip, *Mat. Zametki*, 1979, Volume 25, Issue 4, 537–549

<https://www.mathnet.ru/eng/mzm10029>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use <https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.86

May 21, 2025, 07:09:17



ОЦЕНКА ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ЧЕРЕЗ ОЦЕНКУ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ В ЗАМКНУТОЙ ПОЛОСЕ

Р. М. Мустафин

Пусть $0 < \lambda_k \uparrow \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} k/\lambda_k = 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\lambda_k = \infty$,

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda^2/\lambda_n^2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \lambda^{2n}$$

и m_n — положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n m_n < \infty, \quad \beta_{2n} = \beta_{2n+1} = |c_{2n}| \quad (n \geq 0).$$

При этих условиях в работе [1] установлено, что если $F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z)$ (сходимость равномерная на любом компакте), где $P_n(z)$ — конечные линейные комбинации функций $e^{\lambda_n z}$, удовлетворяет условию

$$|F^{(n)}(\alpha)| < K(\alpha) m_n \quad (n \geq 0), \quad K(\alpha) > 0,$$

тогда для любых $\varepsilon > 0$ и φ_0 , $0 < \varphi_0 < \pi/2$, существует такая постоянная A , не зависящая от $F(z)$, $K(\alpha)$ и α , что

$$|F(z)| < AK(\alpha), \quad |\pi - \arg[z - (\alpha - \varepsilon)]| < \varphi_0.$$

Если дополнительно

$$\delta = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right| < \infty,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная A , не

зависящая от $F(z)$, $K(\alpha)$ и α , что

$$|F(z)| < AK(\alpha) \quad (\operatorname{Re} z \leq \operatorname{Re} \alpha - \delta - \varepsilon).$$

Рассмотрим теперь случай, когда последовательность $\{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, разбита на две подпоследовательности $\{\lambda'_n\}$ и $\{\lambda''_n\}$, обладающие свойствами: числа λ'_n являются нулями целой функции $L(z)$ экспоненциального типа, причем

$$|L(re^{\pm \pi i/2})| \geq Be^{Ar}$$

и $L(z)$ в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ не имеет других нулей, кроме λ'_n ; последовательность $\{\lambda''_n\}$ удовлетворяет условиям:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n/\lambda''_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda''_n = \infty.$$

В этом случае А. Ф. Леонтьевым показано [2], что система $\{e^{\lambda_n z}\}$ полна в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq A$ в классе функций, аналитичных в полосе $|\operatorname{Im} z| < A$ и непрерывных вплоть до границы. Далее, им же показано [3], что существует функция

$$F(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_n < \rho_k} c_n e^{\lambda_n s} \quad (1)$$

(сходимость равномерная на компактах), не равная тождественно нулю, которая ограничена в полосе $|\operatorname{Im} s| \leq A$.

Из последнего утверждения вытекает, что для функции вида (1) нельзя получить оценку в угле (или в полуплоскости) через оценку ее на каком-либо множестве из полосы $|\operatorname{Im} z| \leq A$. В связи с этим естественно возникает задача о получении оценки функции вида (1) в угле (или в полуплоскости), если известна оценка производных $F^{(n)}(z)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) на некотором множестве \bar{G} из полосы $|\operatorname{Im} z| \leq A$:

$$|F^{(n)}(z)| \leq Km_n \quad (n = 0, 1, \dots), \quad z \in \bar{G}.$$

Решению этой задачи и посвящена статья. Показано, что если m_n не очень быстро растут, то действительно получается нужная оценка.

Итак, пусть последовательность $\{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, разбита на две подпоследовательности $\{\lambda'_n\}$ и $\{\lambda''_n\}$, обладающие свойствами: числа λ'_n ($n = 1, 2, \dots$) являются нулями целой функции $L_1(\lambda)$ экспоненциального типа, причем

$$|L_1(re^{\pm \pi i/2})| < Be^{Ar}, \quad (2)$$

последовательность $\{\lambda_n''\}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n/\lambda_n'' = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n'')^{-1} = \infty. \quad (3)$$

Пусть

$$L_2(\lambda) = (\lambda^2 - \lambda_1'^2)(\lambda^2 - \lambda_2'^2) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda^2/\lambda_n''^2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \lambda^{2n}$$

и m_n — положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n m_n < \infty, \quad \beta_{2n} = \beta_{2n+1} = |c_{2n}| \quad (n \geq 0). \quad (4)$$

Обозначим через \bar{D} сопряженную диаграмму функции $L_1(\lambda)$ (в силу условия (2) она расположена в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq A$). Пусть $0 \in \bar{D}$, \bar{D}_α — смещение \bar{D} на вектор α . Возьмем выпуклую область \bar{G}_α , $\bar{G}_\alpha \supset \bar{D}_\alpha$, и положим $\bar{G}'_\alpha = \bar{G}_\alpha \cap \{| \operatorname{Im} (z - \alpha) | \leq A\}$. В случае, если

$$L_1(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda^2/\lambda_n'^2), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n/\lambda_n') = \sigma < \infty, \quad (5)$$

\bar{D}_α есть вертикальный отрезок длины $2\pi\sigma$, середина которого находится в точке α , в качестве \bar{G}'_α в этом случае можно взять прямоугольник с центром в точке α произвольно малой ширины с большей стороной длины $2\pi\sigma = 2A$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z)$ (сходимость равномерная на любом компакте), где $P_n(z)$ — конечные линейные комбинации функций $e^{\lambda_n z}$, удовлетворяет условию

$$|F^{(n)}(z)| < K(\alpha) m_n \quad (n \geq 0), \quad K(\alpha) > 0, \quad z \in \bar{G}'_\alpha \quad (6)$$

(m_n удовлетворяют условию (4)). Тогда для любого φ_0 , $0 < \varphi_0 < \pi/2$, существуют такие положительные постоянные C и b , не зависящие от $F(z)$, $K(\alpha)$ и α , что

$$|F(z)| < CK(\alpha), \quad |\pi - \arg [z - (\alpha - b)]| < \varphi_0.$$

В случае (5) для любых $\varepsilon > 0$ и φ_0 , $0 < \varphi_0 < \pi/2$, существует такая постоянная C , не зависящая от $F(z)$, $K(\alpha)$ и α , что

$$|F(z)| < CK(\alpha), \quad |\pi - \arg [z - (\alpha - \varepsilon)]| < \varphi_0.$$

Отметим, что если $H_\alpha \supset \bar{G}'_\alpha$ и $K(\alpha) = \max_{z \in \bar{H}_\alpha} |F(z)|$, то

$$|F^{(n)}(z)| \leq K(\alpha) m_n \quad (n \geq 0), \quad z \in \bar{G}'_\alpha,$$

где m_n удовлетворяют условию (4).

Действительно, пользуясь представлением производных функции $F(z)$ интегралом Коши, получаем для $z \in \bar{G}_\alpha$

$$|F^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\partial H_\alpha} \frac{F(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \right| \leq K(\alpha) \frac{n!}{\rho^n},$$

где ρ — расстояние между G_α и ∂H_α . Проверим, что числа $m_n = n!/\rho^n$ удовлетворяют условию (4). Функция $L_2(z)$ — функция первого порядка нулевого типа, поэтому $\beta_n = (\varepsilon_n/n)^n$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n m_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon_n/n)^n n!/\rho^n < C \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[n]{n} (\varepsilon_n/\rho)^n < \infty.$$

Имея это в виду, получаем

С л е д с т в и е. Пусть функция $F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z)$ (сходимость равномерная на любом компакте), где $P_n(z)$ — конечные линейные комбинации функций $e^{\lambda_n z}$, удовлетворяет условию

$$|F(z)| < K(\alpha), \quad K(\alpha) > 0, \quad z \in \bar{H}_\alpha, \quad H_\alpha \supset \bar{G}_\alpha.$$

Тогда для любого φ_0 , $0 < \varphi_0 < \pi/2$, существуют такие положительные постоянные C и b , не зависящие от $F(z)$, $K(\alpha)$ и α , что

$$|F(z)| < CK(\alpha), \quad |\pi - \arg [z - (\alpha - b)]| < \varphi_0.$$

В случае (5) для любых $\varepsilon > 0$ и φ_0 , $0 < \varphi_0 < \pi/2$, существует такая постоянная C , не зависящая от $F(z)$, $K(\alpha)$ и α , что

$$|F(z)| < CK(\alpha), \quad |\pi - \arg [z - (\alpha - \varepsilon)]| < \varphi_0.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть дополнительно

$$\delta = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right| < \infty.$$

Тогда существуют такие положительные постоянные C и b , не зависящие от $F(z)$, α и $K(\alpha)$, что

$$|F(z)| < CK(\alpha) \quad (\operatorname{Re} z \leq \operatorname{Re} \alpha - b).$$

В случае (5) для любого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная C , не зависящая от $F(z)$, $K(\alpha)$ и α , что

$$|F(z)| < CK(\alpha) \quad (\operatorname{Re} z \leq \operatorname{Re} \alpha - \delta - \varepsilon).$$

§ 1. Об интегральном представлении функции. Положим $\tilde{L}_1(\lambda) = L_1(\lambda)/((\lambda - \lambda'_1)(\lambda - \lambda'_2))$. Ввиду оценки (2) функция $\gamma_1(t)$, ассоциированная по Борелю с $\tilde{L}_1(\lambda)$, аналитична при $|\operatorname{Im} t| > A$ и непрерывна вплоть до границы.

Отсюда следует, что имеется контур C , лежащий в полосе $|\operatorname{Im} t| \leq A$ такой, что $\gamma_1(t)$ аналитична вне C и непрерывна вплоть до C . Имеем

$$\tilde{L}_1(\lambda) = 1/(2\pi i) \cdot \int_C \gamma_1(t) e^{\lambda t} dt.$$

Можно считать, что $C \subset \bar{G}$, в силу чего C_α — смещение C на α — содержится в \bar{G}_α .

По условию $\lim_{n \rightarrow \infty} n/\lambda''_n = 0$, поэтому $L_2(\lambda)$ растет не быстрее целой функции первого порядка минимального типа. Значит, $L(\lambda) = \tilde{L}_1(\lambda) L_2(\lambda)$ есть целая функция экспоненциального типа, причем ее индикатриса совпадает с индикатрисой $h(\varphi)$ функции $\tilde{L}_1(\lambda)$. Отметим (см. [4, стр. 20—22]), что в любом угле найдется путь Γ из отрезков и дуг окружностей, на котором при некотором $h > 0$

$$|L(\lambda)| > C_1 e^{-h|\lambda|}, \quad \lambda \in \Gamma, \quad (7)$$

а также найдутся окружности $|\lambda| = r_k \uparrow \infty$, на которых

$$|L(\lambda)| > e^{-h|\lambda|}, \quad |\lambda| = r_k. \quad (8)$$

В случае (5) при произвольном $\varepsilon > 0$ выполняется оценка $|L(\lambda)| > C_2(\varepsilon) e^{(h(\varphi) - \varepsilon)|\lambda|}$,

$$\arg \lambda = \varphi, \quad \varphi \neq 0, \pi, \quad h(\varphi) = \pi \sigma |\sin \varphi|, \quad (9)$$

и имеются окружности $|\lambda| = r_k \uparrow \infty$ такие, что при любом $\varepsilon > 0$

$$|L(r_k e^{i\varphi})| > e^{(h(\varphi) - \varepsilon)r_k}, \quad k > K(\varepsilon). \quad (10)$$

Справедливо неравенство (см. [5])

$$\beta_{m+k} \leq q \beta_m \beta_k \quad (m \geq 0, k \geq 0), \quad q = \max(1, |c_2|). \quad (11)$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \omega_{L_2}(\mu, \alpha, F) &= \\ &= e^{-\alpha\mu} \sum_{k=1}^{\infty} c_k [F^{(k-1)}(\alpha) + \mu F^{(k-2)}(\alpha) + \dots + \mu^{k-1} F(\alpha)]. \end{aligned}$$

Воспользуемся следующим свойством ([4, стр. 246]):

$$\omega_{\tilde{L}_1 L_2}(\mu, \alpha, F) = \tilde{L}_1(\mu) \omega_{L_2}(\mu, \alpha, F) + \omega_{\tilde{L}_1}(\mu, \alpha, \Phi), \quad (12)$$

где

$$\Phi(z) = 1/(2\pi i) \int_{C_2} \gamma_2(t) F(t+z) dt,$$

$\gamma_2(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L_2(\lambda)$ (она регулярна всюду кроме $t=0$), C_2 — замкнутый контур, охватывающий точку $t=0$. Подставляя в последний интеграл разложение функции $F(t+z)$ в ряд Тейлора, получим

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k k!}{i^{k+1}} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(z) i^n}{n!} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n F^{(n)}(z). \end{aligned} \quad (13)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (12), учитывая условия (4) и (6). Имеем

$$\begin{aligned} |\omega_{L_2}(\mu, \alpha, F)| &< \\ &< K(\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (m_{k-1} + |\mu| m_{k-2} + \dots + |\mu|^{k-1} m_0) e^{-\operatorname{Re}(\alpha\mu)} = \\ &= K(\alpha) \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n+p} m_n \right) |\mu|^{p-1} e^{-\operatorname{Re}(\alpha\mu)}. \end{aligned}$$

На основании (11) и (4)

$$|\omega_{L_2}(\mu, \alpha, F)| \leq K(\alpha) M \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{p+1} |\mu|^p e^{-\operatorname{Re}(\alpha\mu)}. \quad (14)$$

Здесь M не зависит от $F(z)$, α и $K(\alpha)$, а зависит от $\{\lambda_n\}$ и $\{m_n\}$. Так как $L_2(\lambda)$ — функция первого порядка минимального типа, то при любом $\varepsilon > 0$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \beta_{p+1} |\mu|^p < C_3(\varepsilon) e^{\varepsilon|\mu|}. \quad (15)$$

В силу (14) и (15) получим нужную оценку

$$\begin{aligned} |\tilde{L}_1(\mu) \omega_{L_2}(\mu, \alpha, F)| &< \\ &< K(\alpha) C_4(\varepsilon) e^{(h(\varphi)+\varepsilon)|\mu|} e^{-\operatorname{Re}(\alpha\mu)}, \quad \varphi = \arg \mu. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $h(\varphi)$ — индикатриса роста функции $\tilde{L}_1(\mu)$.

Для оценки второго слагаемого используем другую запись функции $\omega(\mu, \alpha, F)$ [4, стр. 247]

$$\omega_{\tilde{L}_1}(\mu, \alpha, \Phi) = e^{-\alpha\mu} (1/2\pi i) \int_C \gamma_1(t) \left[\int_0^t \Phi(t+\alpha-\xi) e^{\mu\xi} d\xi \right] dt.$$

Оценим это выражение, пользуясь равенством (13) и учитывая, что $t + \alpha - \xi \in \bar{G}_\alpha$. Имеем

$$|\omega_{L_1}(\mu, \alpha, \Phi)| \leq e^{-\operatorname{Re}(\alpha\mu)} (1/(2\pi)) \int_C |\gamma_I(t)| \cdot \int_0^{|\mu|} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n m_n \right) K(\alpha) e^{(h(\varphi)+\varepsilon)|\mu|} |d\xi| |dt| \leq \leq M_I(\varepsilon) K(\alpha) e^{(h(\varphi)+\varepsilon)|\mu|} e^{-\operatorname{Re}(\alpha\mu)}, \quad \mu = |\mu| e^{i\varphi}. \quad (17)$$

Объединяя (16) и (17), получаем оценку

$$|\omega_L(\mu, \alpha, F)| \leq C_0(\varepsilon) K(\alpha) e^{(h(\varphi)+\varepsilon)|\mu|} e^{-\operatorname{Re}(\alpha\mu)}, \quad \varphi = \arg \mu. \quad (18)$$

Имеем

$$\omega_L(\mu, \alpha, \psi_\nu) = e^{(\lambda_\nu - \mu)\alpha} L(\mu) / (\mu - \lambda_\nu), \quad \psi_\nu = e^{\lambda_\nu z}.$$

Поэтому вычет функции $\omega_L(\mu, \alpha, \psi_\nu) e^{\mu z} / L(\mu)$ как функции переменного μ равен $e^{\lambda_\nu z}$ в точке $\mu = \lambda_\nu$ и равен нулю во всех остальных точках. На основании отмеченного свойства

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0^n} \frac{\omega_L(\mu, \alpha, P_n) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu,$$

где $P_n(z) = \sum_{k=1}^{p_n} \gamma_k^{(n)} e^{\lambda_k z}$, контур Γ_0^n — замкнутый, содержащий внутри точки $\lambda_1, \dots, \lambda_{p_n}$.

Пусть Γ — путь из отрезков и дуг окружностей, расположенный в углах $0 < |\arg \mu| < \psi_0 < \pi/2$, на котором выполняются оценки (7) или (9). Обозначим через Γ^k часть Γ , лежащую в круге $|\mu| \leq r_k$, а через Γ_k — дугу окружности $|\mu| = r_k$, заключенную внутри Γ . Возьмем в качестве Γ_0^n путь $\Gamma^k \cup \Gamma_k$ (при достаточно больших k) и докажем, что интеграл по дуге Γ_k стремится к 0 при $k \rightarrow \infty$. Имеем

$$\omega_L(\mu, \alpha, P_n) = e^{-\alpha\mu} (1/(2\pi i)) \int_{C_1} \gamma(t) \cdot \left[\int_0^t P_n(t + \alpha - \xi) e^{\mu\xi} d\xi \right] dt,$$

где $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L(\lambda)$, контур C_1 — замкнутый, охватывающий все особенности функции $\gamma(t)$. Обозначим G_1 — внутренность контура C_1 . Так как $P_n'(z) \rightrightarrows F(z)$, $z \in (\bar{G}_1)_\alpha$, то $|P_n(z)| \leq N$,

$z \in (\bar{G}_1)_\alpha$, N от n не зависит. Отсюда

$$\begin{aligned}
 |\omega_L(\mu, \alpha, P_n)| &\leq \\
 &\leq e^{(h(\varphi)+\varepsilon)|\mu|} |e^{-\alpha\mu}| N(1/(2\pi)) \int_{C_1} |\gamma(t)| |t| |dt| = \\
 &= e^{(h(\varphi)+\varepsilon)|\mu|} |e^{-\alpha\mu}| NN_1(\varepsilon), \quad \varphi = \arg \mu, \quad \varepsilon > 0 \text{ — любое.} \quad (19)
 \end{aligned}$$

И аналогично

$$|\omega_L(\mu, \alpha, F)| \leq e^{(h(\varphi)+\varepsilon)|\mu|} |e^{-\alpha\mu}| NN_1(\varepsilon), \quad \varphi = \arg \mu. \quad (20)$$

В силу (8) и (19)

$$E \equiv \left| \frac{\omega_L(\mu, \alpha, P_n) e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| \leq NN_1(\varepsilon) \frac{e^{(\sigma+\varepsilon)|\mu|} e^{\operatorname{Re}[\mu(z-\alpha)]}}{e^{-h|\mu|}}, \quad \mu \in \Gamma_k,$$

где σ — тип функции $L(\lambda)$. Возьмем $h_1 > 0$. Имеем $\operatorname{Re}[\mu(z-\alpha)] = \operatorname{Re}[\mu(z+h_1-\alpha)] - \operatorname{Re} \mu h_1 \leq \leq \operatorname{Re}[\mu(z+h_1-\alpha)] - |\mu| h_1 \cos \psi_0, \quad \mu \in \Gamma_0^n$.

Пусть z лежит в области

$$E_1 = \{z: |\arg(\alpha - h_1 - z)| < \pi/2 - \psi_0\}$$

и $\arg \mu = \psi, |\psi| \leq \psi_0$. Положив $\arg(\alpha - h_1 - z) = \varphi$, получим

$$\operatorname{Re}[(z+h_1-\alpha)\mu] = -|\mu| |z+h_1-\alpha| \cos(\varphi+\psi).$$

Но $\cos(\varphi+\psi) \geq \cos(\pi/2 - \psi_0 + \psi_0) = 0$, поэтому $\operatorname{Re}[(z+h_1-\alpha)\mu] \leq 0$,

$$\operatorname{Re}[\mu(z-\alpha)] \leq -|\mu| h_1 \cos \psi_0, \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
 E &\leq NN_1(\varepsilon) e^{-h_2|\mu|}, \quad h_2 = h_1 \cos \psi_0 - h - \sigma - \varepsilon, \\
 &\mu \in \Gamma_k. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Если теперь взять $h_1 \cos \psi_0 > h + \sigma + \varepsilon$, то $h_2 > 0$, и мы видим, что интеграл по дуге Γ_k стремится к 0 при $k \rightarrow \infty$. На основании этого

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, \alpha, P_n)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu, \quad z \in E_1. \quad (23)$$

В случае (5) в силу (10) и (19) имеем

$$E \equiv \left| \frac{\omega_L(\mu, \alpha, P_n) e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| \leq NN_1(\varepsilon) \frac{e^{(h(\varphi)+\varepsilon)|\mu|} e^{\operatorname{Re}[\mu(z-\alpha)]}}{e^{(h(\varphi)-\varepsilon)|\mu|}}.$$

Когда z лежит в области

$$E_2 = \{z: |\arg(\alpha - \delta_1 - z)| < \pi/2 - \psi_0, \delta_1 > 0\},$$

аналогично имеем

$$\operatorname{Re} [(z - \alpha)\mu] < -|\mu|\delta_1 \cos \psi_0, \quad (24)$$

$$E \leq NN_1(\varepsilon)e^{(2\varepsilon - \delta_1 \cos \psi_0)|\mu|}. \quad (25)$$

При ε достаточно малом $2\varepsilon - \delta_1 \cos \psi_0 < 0$, вследствие чего интеграл по дуге Γ_k стремится к 0 при $k \rightarrow \infty$. На основании этого

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, \alpha, P_n)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu, \quad z \in E_2. \quad (26)$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, \alpha, F) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, \alpha, P_n) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu \right| = \\ & = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{\omega_L(\mu, \alpha, F - P_n) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^*} \frac{\omega_L(\mu, \alpha, F) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^*} \frac{\omega_L(\mu, \alpha, P_n) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu \right|, \end{aligned}$$

где Γ_R — часть Γ , лежащая в круге $|\mu| \leq R$, а Γ_R^* — остальная часть Γ . Второе и третье слагаемые по модулю меньше ε при достаточно большом R в силу (22) или (25), первое слагаемое по модулю меньше ε при фиксированном R и достаточно больших n в силу $P_n \rightrightarrows F$. Таким образом, перейдя к пределу в равенствах (23) и (26) при $n \rightarrow \infty$, получим искомое интегральное представление

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, \alpha, F) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu, \quad |\pi - \arg(z + h_1 - \alpha)| < \frac{\pi}{2} - \psi_0. \quad (27)$$

В частном случае (5)

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, \alpha, F) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu, \quad |\pi - \arg(z - \alpha_1)| < \pi/2 - \psi_0, \operatorname{Re} \alpha_1 < \operatorname{Re} \alpha. \quad (28)$$

§ 2. Доказательство теоремы 1. Из интегрального представления (27) на основании (7), (18) и (21) получаем

для $z \in E_1$

$$|F(z)| < (1/(2\pi)) C_1 K(\alpha) C_0(\varepsilon) \int_{\Gamma} e^{(\lambda+\sigma+\varepsilon)|\mu|} e^{\operatorname{Re}[\mu(z-\alpha)]} |d\mu| < \\ < K(\alpha) B_1(\varepsilon) \int_{\Gamma} e^{-h_2|\mu|} |d\mu|.$$

Отсюда

$$F(z) | < CK(\alpha), \quad |\pi - \arg [z - (\alpha - h_1)]| < \varphi_0, \\ \varphi_0 < \pi/2,$$

причем C не зависит от $F(z)$, $K(\alpha)$ и α .

Из интегрального представления (28) на основании (9), (18) и (24) получаем в случае (5) для $z \in E_2$

$$|F(z)| < (1/(2\pi)) (C_2(\varepsilon) K(\alpha) C_0(\varepsilon)) \int_{\Gamma} e^{2\varepsilon|\mu|} e^{\operatorname{Re}[\mu(z-\alpha)]} |d\mu| < \\ < K(\alpha) B_2(\varepsilon) \int_{\Gamma} e^{2\varepsilon|\mu|} e^{-\delta_1 \cos \psi_0 |\mu|} |d\mu|.$$

Выбрав $\varepsilon < (\delta_1/2) \cos \psi_0$, будем иметь

$$|F(z)| < CK(\alpha), \quad |\pi - \arg [z - (\alpha - \delta_1)]| < \varphi_0, \\ \varphi_0 < \pi/2,$$

причем C не зависит от $F(z)$, $K(\alpha)$ и α . Теорема доказана.

Пусть теперь точка α пробегает кривую $L: y = f(x)$, $-\infty < x < \infty$, причем касательная к L в каждой точке наклонена к вещественной оси под углом ψ , $|\psi| < \psi_1 < \pi/2$. Возьмем криволинейную полосу S ширины (в вертикальном направлении), равной $2K$, серединой которой является кривая L . При подходящем выборе ψ_2 , $\psi_1 < \psi_2 < \pi/2$, точки S , удовлетворяющие условию $\operatorname{Re} z \leq \leq \operatorname{Re} \alpha - b_0$, $b_0 > b$, лежат в угле $|\pi - \arg [z - (\alpha - b)]| < \psi_2$, а точки S , удовлетворяющие условию $\operatorname{Re} z \leq \leq \operatorname{Re} \alpha - \gamma$, $\gamma > \varepsilon$, лежат в угле $|\pi - \arg [z - (\alpha - \varepsilon)]| < \psi_2$, причем ψ_2 не зависит от α , ибо ψ_1 не зависит от α . Получаем при условии (4)

С л е д с т в и е. Пусть функция $F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z)$ (сходимость равномерная на любом компакте), где $P_n(z)$ — конечные линейные комбинации функций $e^{\lambda_n z}$, удовлетворяет условию

$$|F^{(n)}(z)| < K(\alpha) m_n \quad (n \geq 0), \\ \alpha \in L, \quad z \in \bar{G}_\alpha, \quad \bar{G}_\alpha = \bar{G}'_\alpha \cap \{|\operatorname{Im}(z - \alpha)| \leq A\}, \\ \bar{G}'_\alpha — выпуклая область, \quad \bar{G}'_\alpha \supset \bar{D}_\alpha, \quad K(\alpha) > 0,$$

Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $K > 0$ существуют такие постоянные $b > 0$ и C , не зависящие от $F(z)$, $K(\alpha)$ и α , что в криволинейной полосе S справедлива оценка $|F(z)| < CK(\alpha)$, $\operatorname{Re} z \leq \operatorname{Re} \alpha - b$, а в случае (5) $|F(z)| < CK(\alpha)$, $\operatorname{Re} z \leq \operatorname{Re} \alpha - \varepsilon$.

§ 3. Доказательство теоремы 2. Из представлений (27) и (28) следует [4, стр. 172—174], что соответственно

$$F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{q_n} a_k e^{\lambda_k z}, \quad |\pi - \arg(z + h_1 - \alpha)| < \pi/2 - \psi_0,$$

$$F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{q_n} a_k e^{\lambda_k z},$$

$$|\pi - \arg[z - (\alpha - \delta_1)]| < \pi/2 - \psi_0, \quad \delta_1 > 0,$$

где q_n — наибольшие целые числа такие, что $\lambda_{q_n} < r_n$ и

$$a_k = \omega_L(\lambda_k, \beta, F)/L'(\lambda_k), \quad (29)$$

β — произвольное число, которое мы выберем ниже. Оценим числитель. Имеем

$$\omega_L(\lambda_k, \beta, F) \leq (1/(2\pi)) |e^{-\beta \lambda_k}| \left(\int_{C_1} |\gamma(t)| \cdot \left[\int_0^{|t|} |F(t + \beta - \eta)| |e^{\lambda_k \eta}| |d\eta| \right] |dt| \right).$$

По теореме 1, поскольку $\operatorname{Re}(t - \eta) \leq \sigma + \rho$, где $\rho > 0$ — произвольное число, имеем $|F(t + \beta - \eta)| \leq A_1 K(\alpha)$, если взять $\beta = \alpha - b - \sigma - \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$, и считать $\rho < \varepsilon_0$; в частном случае (5) $\operatorname{Re}(t - \eta) \leq \rho$ и

$$|F(t + \beta - \eta)| \leq A'_1 K(\alpha), \quad \beta = \alpha - \varepsilon_0.$$

Тогда

$$|\omega_L(\lambda_k, \beta, F)| \leq A_2 |e^{-\beta \lambda_k}| e^{\lambda_k(\sigma + \rho)} K(\alpha), \quad (30)$$

а в случае (5)

$$|\omega_L(\lambda_k, \beta, F)| \leq A'_2 |e^{-\beta \lambda_k}| e^{\lambda_k \rho} K(\alpha). \quad (31)$$

Из условия

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \ln |1/L'(\lambda_k)| = \delta$$

получаем,

$$|1/L'(\lambda_k)| < B(\varepsilon_0) \exp[(\delta + \varepsilon_0)\lambda_k] \quad (k = 1, 2, \dots).$$

В силу этого и на основании (29) и (30) при всех k

$$|a_k| \leq A_2 B(\varepsilon_0) K(\alpha) e^{-\operatorname{Re} \beta \lambda_k} e^{\lambda_k(\sigma+\rho)} e^{(\delta+\varepsilon_0)\lambda_k},$$

а в частном случае (5) в силу (29) и (31)

$$|a_k| \leq A'_2 B(\varepsilon_0) K(\alpha) e^{-\operatorname{Re} \beta \lambda_k} e^{\lambda_k \rho} e^{(\delta+\varepsilon_0)\lambda_k}.$$

Значит, полагая $x = \operatorname{Re} z$, получаем

$$|F(z)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| e^{\lambda_k x} \leq A_3 K(\alpha) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-(\operatorname{Re} \beta - \delta - \sigma - \rho - \varepsilon_0 - x)\lambda_k],$$

в случае (5)

$$|F(z)| \leq A'_3 K(\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-(\operatorname{Re} \beta - \delta - \rho - \varepsilon_0 - x)\lambda_k].$$

В общем случае требуем $\operatorname{Re} \beta - \delta - \sigma - \rho - \varepsilon_0 - x \geq \varepsilon_0$, т. е. $x \leq \operatorname{Re} \alpha - 2\sigma - b - \delta - 3\varepsilon_0 - \rho$. Тогда ряд справа сходится. Обозначив $b_1 = b + 2\sigma + \delta + 3\varepsilon_0 + \rho$, имеем

$$|F(z)| < A_0 K(\alpha), \quad \operatorname{Re} z \leq \operatorname{Re} \alpha - b_1,$$

где A_0 не зависит от $F(z)$, $K(\alpha)$ и α .

В частном случае (5) пусть также $\operatorname{Re} \beta - \delta - \rho - \varepsilon_0 - x \geq \varepsilon_0$, т. е. $x \leq \operatorname{Re} \alpha - \delta - \rho - 3\varepsilon_0$. Получаем

$$|F(z)| < A'_0 K(\alpha), \quad \operatorname{Re} z \leq \operatorname{Re} \alpha - \delta - \varepsilon,$$

где A'_0 не зависит от $F(z)$, $K(\alpha)$ и α .

С л е д с т в и е. Если в условиях теоремы 2 в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq A$

$$|F^{(n)}(z)| < C m_n \quad (n \geq 0),$$

то $F(z) \equiv 0$.

З а м е ч а н и е. Рассмотрим случай, когда $\delta = 0$ и последовательность $\{\lambda_n''\}$ имеет плотность τ , $0 < \tau < \infty$, при уточненном порядке $\rho(r)$, т. е. существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n/\lambda_n''^{\rho(\lambda_n'')} = \tau, \quad (32)$$

где $\rho(r)$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\rho(r)-1} = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 1/\varphi(n) = \infty, \quad (33)$$

$\varphi(t)$ — функция, обратная к функции $t = r^{\rho(r)}$ (в силу

условий (33) $\lim_{n \rightarrow \infty} n/\lambda_n'' = 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n'')^{-1} = \infty$). Тогда в качестве m_n можно взять числа

$$m_n = h_1^n [\varphi(n)]^n, \quad h_1 < h_0, \quad h_0 = (\pi e \tau)^{-1}.$$

Действительно, ввиду условия (32), функция

$$L_2(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda^2/\lambda_n''^2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \lambda^{2n}$$

имеет тип $\pi \tau$ при уточненном порядке $\rho(r)$. На основании этого и первого из условий (33) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) \sqrt[n]{|c_n|} = \pi e \tau$, откуда при любом $\varepsilon > 0$

$$|c_n| < [(\pi e \tau + \varepsilon)/\varphi(n)]^n, \quad n > N(\varepsilon).$$

Такому же неравенству будут удовлетворять числа β_n ($\beta_{2n} = \beta_{2n+1} = |c_{2n}|$). При малом $\varepsilon > 0$ получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n m_n < \infty, \quad m_n = h_1^n [\varphi(n)]^n, \quad h_1 < h_0 = (\pi e \tau)^{-1}.$$

В заключение автор приносит глубокую благодарность своему научному руководителю А. Ф. Леонтьеву.

Башкирский государственный университет

Поступило
25.V.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мустафин Р. М., Оценка целой функции через оценку функции и ее производных на кривой, Матем. заметки, 25, № 3 (1979).
- [2] Леонтьев А. Ф., О полноте системы $\{e^{\lambda_n z}\}$ в замкнутой полосе, Докл. АН СССР, 152, № 2 (1963), 266—268.
- [3] Леонтьев А. Ф., О некоторых теоремах единственности для рядов Дирихле, Изв. АН СССР, Сер. физ.-матем., 27 (1963), 1251—1280.
- [4] Леонтьев А. Ф., Ряды экспонент, М., «Наука», 1976.
- [5] Леонтьев А. Ф., К вопросу о полноте системы экспонент на интервале, Изв. АН Арм. ССР, 6, № 2—3 (1971), 195—209.