



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

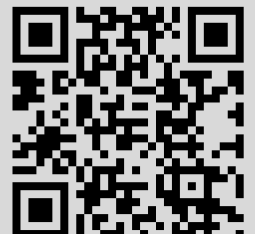
Р. Ф. Шамоян, О коэффициентных мультипликаторах пространств Блоха и Харди в поликруге, *Сиб. матем. журн.*, 2002, том 43, номер 1, 212–227

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

26 марта 2025 г., 08:36:28



О КОЭФФИЦИЕНТНЫХ МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ ПРОСТРАНСТВ БЛОХА И ХАРДИ В ПОЛИКРУГЕ

Р. Ф. Шамоян

Аннотация: Получено полное описание пространств коэффициентных мультипликаторов, действующих из пространств со смешанной нормой $H^{p,q,\alpha}$ и из классов Харди H^p в пространства Блоха в поликруге, а также из классов Харди H^p в H^q при $0 < p < 1$, $p < q \leq \infty$. Библиогр. 18.

Введение

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ — единичный круг на комплексной плоскости \mathbb{C} , $H(D)$ — множество всех голоморфных в D функций, $B(D)$ — класс Блоха в круге D :

$$B(D) = \{f \in H(D) : \|f\|_B = \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |f'(z)| < \infty\}.$$

Хорошо известно, что различные свойства функций из пространств Блоха играют основополагающую роль в теории однолистных функций и в теории конформных отображений (см. [1–4]).

Классы Блоха вводились и изучались различными авторами и в многомерных областях в \mathbb{C}^n (в шаре, в поликруге) (см. [4–6]). При этом выяснилось, что естественные аналоги пространств Блоха в поликруге D^n не обладают многими свойствами класса Блоха в круге D (см. [4]).

Одна из целей работы — нахождение таких аналогов пространств $B(D)$ в поликруге, на которые можно перенести некоторые утверждения недавно появившейся статьи [7], касающиеся коэффициентных мультипликаторов в классе Блоха. Оказалось, что метод, предложенный в работе автора (см. [8]), позволяет проводить прямые и более простые доказательства выше упомянутых результатов, причем при надлежащем выборе классов Блоха в D^n сразу в случае поликруга.

Применяя тот же подход во второй части заметки, мы получим полное описание мультипликаторов из класса Харди $H^p(D^n)$ в $H^q(D^n)$ при $0 < p < 1$, $0 < p < q \leq \infty$. При $n = 1$ другим методом этот результат получен в [9]. Отметим также, что мультипликаторам классов Харди посвящено большое количество работ (см. [4, 9]). Результаты о коэффициентных мультипликаторах различных классов аналитических функций, в частности пространств Харди $H^p(D^n)$, в поликруге начали появляться совсем недавно (см. [8, 10]).

Для формулировки основных утверждений работы введем обозначения и сформулируем основные определения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00992).

Пусть $D^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) : |z_j| < 1, j = 1, \dots, n\}$ — единичный поликруг комплексного пространства \mathbb{C}^n , $T^n = \{z = (z_1, \dots, z_n), |z_j| = 1, j = 1, \dots, n\}$ — его остов, $I^n = [0, 1]^n$, $H(D^n)$ — множество всех голоморфных в D^n функций. Далее, пусть

$$M_p(f, R) = \left(\int_{T^n} |f(R\xi)|^p dm_n(\xi) \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty;$$

$$M_\infty(f, R) = \sup_{\substack{|z_j|=R_j \\ j=1, \dots, n}} |f(z)|, \quad R \in I^n,$$

где $m_n(\xi)$ — мера Лебега на T^n , $Rz = (R_1z_1, \dots, R_nz_n)$, $z \in \mathbb{C}^n$, $R \in I^n$,

$$|z - \xi|^\gamma = \prod_{k=1}^n |z_k - \xi_k|^\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad \xi, z \in \mathbb{C}^n, \quad \xi_k \neq z_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

$m_{2n}(w)$ — $2n$ -мерная мера Лебега на D^n , $Z_+^n = Z_+ \times \dots \times Z_+$, $Z_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $dr = dr_1 \dots dr_n$.

Введем классы $H^{p,q,\alpha}(D^n)$:

$$H^{p,q,\alpha}(D^n) = \left\{ f \in H(D^n) : \|f\|_{H^{p,q,\alpha}}^q = \int_{I^n} M_p^q(f, r)(1-r)^{\alpha q-1} dr < \infty, \right.$$

$$\left. 0 < q < \infty, 0 < p \leq \infty, 0 < \alpha < \infty \right\},$$

$$H^{p,\infty,\alpha}(D^n) = \{f \in H(D^n) : \|f\|_{H^{p,\infty,\alpha}} = \sup_{r \in I^n} M_p(f, r)(1-r)^\alpha < \infty, \\ 0 < \alpha < \infty, 0 < p \leq \infty\}.$$

Свойства пространств со смешанной нормой $H^{p,q,\alpha}(D)$ и их аналогов в поликруге или в шаре B^n пространства \mathbb{C}^n хорошо изучены (см. [4, 7, 11]). Легко видеть, что $H^{p,\infty,0}(D^n)$ и $H^{p,p,\alpha}(D^n)$ — классы Харди и Бергмана — Джрбашяна в поликруге D^n соответственно. Далее

$$(\mathfrak{D}^\alpha f)(z), (D^\alpha f)(z), \quad f \in H(D^n), \quad f(z) = \sum_{|k| \geq 1} a_k z^k$$

— операторы дробного дифференцирования (см. [11, 12]):

$$(\mathfrak{D}^\alpha f)(z) = \sum_{|k| \geq 0} (k+1)^\alpha a_k z^k, \quad \alpha \geq 0, \quad (k+1)^\alpha = \prod_{j=1}^n (k_j+1)^\alpha;$$

$$(D^\alpha f)(z) = \sum_{|k| \geq 0} \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)} a_k z^k, \quad \alpha \geq 0, \quad \Gamma(k+\alpha+1) = \prod_{j=1}^n \Gamma(k_j+\alpha+1).$$

Легко видеть, что $(\mathfrak{D}^\alpha f)(z)$ и $(D^\alpha f)(z) \in H(D^n)$, если $f \in H(D^n)$, и что

$$(\mathfrak{D}f)(z) = \frac{\partial^n (z_1 \dots z_n f(z))}{\partial z_1 \dots \partial z_n}, \quad \mathfrak{D}^m f = \mathfrak{D}^{m-1}(\mathfrak{D}f), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Введем операторы $D^{-\alpha}$ и $\mathfrak{D}^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, так, что

$$\mathfrak{D}^{-\alpha}(\mathfrak{D}^\alpha f) = f, \quad D^{-\alpha}(D^\alpha f) = f, \quad \alpha \geq 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть X и Y — подпространства $H(D^n)$. Говорят, что последовательность комплексных чисел $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}_+^n}$ является *мультипликатором* из X в Y , если для любой функции $f \in H(D^n)$, $f(z) = \sum_{|k| \geq 0} a_k z^k$, функция h , $h(z) = \sum_{|k| \geq 0} c_k a_k z^k$, принадлежит Y . Множество всех мультипликаторов из X в Y обозначим через $M_T(X, Y)$. Введем классы Блоха $B_l(D^n)$, $B_\alpha(D^n)$ и $B(D^n)$ в поликруге D^n :

$$\begin{aligned} B_l(D^n) &= \{f \in H(D^n) : \|f\|_{Bl} = \sup_{r \in I^n} M_\infty(Df, r)(1-r) < \infty\}, \\ B_\alpha(D^n) &= \{f \in H(D^n) := \sup_{r \in I^n} M_\infty(\mathfrak{D}^\alpha f, r)(1-r)^\alpha < \infty\}, \quad 0 < \alpha < \infty, \\ B(D^n) &= \bigcup_{\alpha > 0} B_\alpha(D^n). \end{aligned}$$

Отметим также, что «нормы» для классов Блоха в поликруге можно вводить и другим способом, например,

$$\|f\| = \sup_{z \in D^n} \left| \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) \right| (1 - |z_1|) \dots (1 - |z_j|) < \infty, \quad j = 1, \dots, n,$$

или

$$\|f\| = \sup_{z \in D^n} |D^n f(z)|(1 - |z_n|) < \infty.$$

Легко видеть, что при $n = 1$ в силу результатов [11] и леммы 1.4 работы [7] $B_l(D) = B_\alpha(D) = B(D) = B_\beta(D)$ для любых $\alpha, \beta > 0$, $B(D)$ — обычные классы Блоха в круге D .

Нетрудно показать также, что имеет место включение $B_\alpha(D^n) \subset B_\beta(D^n)$, $\beta > \alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим для простоты случай двух переменных. Учтывая, что верна оценка (см., например, [13])

$$M_\infty(\mathfrak{D}^\alpha f, r) \leq c(\alpha)(1-r)^{-\alpha} M_\infty(f, r), \quad f \in H(D), \quad \alpha > 0,$$

и очевидное равенство

$$(\mathfrak{D}^{\alpha+\beta} f)(z) = \mathfrak{D}^\alpha(\mathfrak{D}^\beta f)(z), \quad \alpha, \beta > 0, \quad f \in H(D^n),$$

ВЫВОДИМ:

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{r_1 \in I, \\ r_2 \in I}} \left(\sup_{\substack{|z_1|=r_1, \\ |z_2|=r_2}} |\mathfrak{D}_{z_1}^\beta \mathfrak{D}_{z_2}^\beta f(z_1, z_2)| \right) (1-r_1)^\beta (1-r_2)^\beta \\ &= \sup_{r_1 \in I} \sup_{|z_1|=r_1} \left(\sup_{r_2 \in I} \sup_{|z_2|=r_2} |\mathfrak{D}_{z_2}^\beta (\mathfrak{D}_{z_1}^\beta f(z_1, z_2))| \right) (1-r_2)^\beta (1-r_1)^\beta \\ &= \sup_{r_1 \in I} \sup_{|z_1|=r_1} \left(\sup_{r_2 \in I} \sup_{|z_2|=r_2} |\mathfrak{D}_{z_2}^{\beta-\alpha} \mathfrak{D}_{z_2}^\alpha (\mathfrak{D}_{z_1}^\beta f(z_1, z_2))| \right) (1-r_2)^\beta (1-r_1)^\beta \\ &\leq c(\beta, \alpha) \sup_{r_1 \in I} \sup_{|z_1|=r_1} \left(\sup_{r_2 \in I} \sup_{|z_2|=r_2} |\mathfrak{D}_{z_2}^\alpha (\mathfrak{D}_{z_1}^\beta f(z_1, z_2))| \right) (1-r_2)^\alpha (1-r_1)^\beta \\ &= c(\beta, \alpha) \sup_{r_2 \in I} \sup_{|z_2|=r_2} \left(\sup_{r_1 \in I} \sup_{|z_1|=r_1} |\mathfrak{D}_{z_1}^{\beta-\alpha} \mathfrak{D}_{z_1}^\alpha (\mathfrak{D}_{z_2}^\beta f(z_1, z_2))| \right) (1-r_1)^\beta (1-r_2)^\alpha \\ &\leq c_1(\beta, \alpha) \sup_{r \in I^2} M_\infty(\mathfrak{D}^\alpha f, r_1, r_2) (1-r_1)^\alpha (1-r_2)^\alpha. \end{aligned}$$

§ 1. Описание мультипликаторов из классов Харди $H^p(D^n)$ и из пространств со смешанной нормой $H^{p,q,\alpha}(D^n)$ в пространства $B_\alpha(D^n)$ и $B(D^n)$

Основными результатами этого параграфа являются следующие теоремы.

Теорема 1. 1. Пусть $0 < p \leq 1$. Тогда последовательность $\{(c_k)_{k \in Z_+^n}\}$ принадлежит классам $M_T(H^p(D^n)), Bl$ в том и только том случае, если

$$\sup_{r \in I^n} M_\infty(DD^{\beta+1/p-2}g, r)(1-r)^\beta < \infty, \quad (1)$$

где

$$1 < \beta < \infty, \quad g(z) \in H(D^n), \quad g(z) = \sum_{|k| \geq 0} c_k z^k.$$

2. Пусть $\beta > 0, 1 < p < \infty$. Тогда $\{(c_k)_{k \in Z_+^n}\} \in M_T(H^p(D^n), B_\beta(D^n))$ в том и только том случае, если

$$\sup_{r \in I^n} M_{p'}(\mathfrak{D}^\beta g, r)(1-r)^\beta < \infty, \quad 1/p + 1/p' = 1, \quad (2)$$

где

$$g \in H(D^n), \quad g(z) = \sum_{|k| > 0} c_k z^k.$$

Теорема 2. 1. Пусть $0 < \alpha < \infty, 0 < p \leq 1, 0 < q \leq 1$. Тогда последовательность $\{(c_k)_{k \in Z_+^n}\}$ принадлежит классам $M_T(H^{p,q,\alpha}(D^n)), Bl(D^n)$ в том и только том случае, если

$$\sup_{r \in I^n} M_\infty(DD^{\beta+\alpha+1/p-2}g, r)(1-r)^\beta < \infty, \quad (3)$$

где $\beta > 1$ — некоторое число.

2. Пусть $0 < \alpha < \infty, 1 < q, p < \infty, S = \beta + \alpha, \beta > \{\alpha(q-1)\}$. Тогда последовательность $\{(c_k)_{k \in Z_+^n}\}$ принадлежит классам $M_T(H^{p,q,\alpha}(D^n), B_S(D^n))$ в том и только том случае, если

$$\sup_{r \in I^n} M_{p'}(\mathfrak{D}^{\beta+\alpha}g, r)(1-r)^\beta < \infty, \quad (4)$$

где

$$g(z) = \sum_{|k| \geq 0} c_k z^k, \quad g \in H(D^n).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из результатов работ [7, 11] нетрудно вывести, что при $n = 1$ пространства мультипликаторов $M_T(H^p, Bl), 0 < p < \infty$, и $M_T(H^{p,q,\alpha}, Bl)$ при $0 < p \leq 1, 0 < q \leq 1 (1 < q, p < \infty)$, описанные в теоремах 1 и 2, совпадают с соответствующими пространствами, описание которых дано в работе [7]. Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться нижеследующей леммой 2 и учесть, что

$$\mathfrak{D}^\alpha(\mathfrak{D}^\beta g(z)) = \mathfrak{D}^{\alpha+\beta}g(z)(\mathfrak{D}^\alpha D^\beta)g(z) = (D^\beta \mathfrak{D}^\alpha)g(z) = D^\beta(\mathfrak{D}^\alpha g(z)), \quad \alpha, \beta > 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Методами, применяемыми в доказательствах теорем 1 и 2, по-видимому, можно получить также описание пространств $M_T(H^{p,q,\alpha}(D^n), X)$, где X — одно из введенных выше классов Блоха в D^n , а $1 < q < \infty, 0 < p \leq 1$ или $1 < p < \infty, 0 < q \leq 1$. В дальнейшем через $C, C(\alpha), C_1, C_2(p)$ мы обозначаем различные положительные константы.

Для доказательства теорем нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Справедливы следующие оценки:

$$\left\| \frac{1}{(1-rz)^{S+1}} \right\|_{H^p(D^n)} \leq \frac{C(p, \beta)}{(1-r)^{S+1-1/p}}, \quad r \in I^n, \quad S > 1/p - 1,$$

$$1 - zr = \prod_{k=1}^n (1 - r_k z_k), \quad z_k \in D, \quad k = 1, \dots, n;$$

$$\left\| \frac{1}{(1-rz)^\gamma} \right\|_{H^{p,q,\alpha}(D^n)} \leq \frac{C(p, q, \alpha, \gamma)}{(1-r)^{\beta-1}},$$

$$r \in I^n, \quad 0 < p, q < \infty, \quad 0 < \alpha < \infty, \quad \gamma = \beta + \alpha + 1/p - 1, \quad \beta > 1.$$

Доказательство оценок леммы следует непосредственно из хорошо известных оценок (см. [12])

$$\int_0^1 (1-\rho r)^{-\lambda} (1-r)^\alpha dr \leq c(\lambda, \alpha) (1-\rho)^{-\lambda+\alpha+1}, \quad \rho \in I, \quad \lambda > \alpha + 1, \quad \alpha > -1,$$

$$\int_T \frac{dm(\varphi)}{|1 - re^{i\varphi}|^\gamma} \leq \frac{C(\gamma)}{(1-r)^{\gamma-1}}, \quad \gamma > 1, \quad r \in I. \quad (5)$$

Введем пространства

$$H_S^{p,q,\alpha}(D^n) = \{f \in H(D^n) : \|\mathfrak{D}^S f\|_{H^{p,q,\alpha}} < \infty, S \in \mathbb{R}\}.$$

Лемма 2. 1. Пусть $t > 0$, $g \in H(D)$. Тогда $D^t g \in H^{p,q,\alpha}(D)$, $0 < p, q < \infty$, $0 < \alpha < \infty$, в том и только том случае, если $\mathfrak{D}^t g \in H^{p,q,\alpha}(D)$.

2. Пусть $\alpha, \beta > 0$, $\alpha - \beta = S - t$, $s, t \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$. Тогда $H_S^{p,q,\alpha}(D) = H_t^{p,q,\beta}(D)$.

3. Пусть $f, g \in H(D^n)$, $\alpha > 0$. Тогда

$$\left| \int_{T^n} \overline{g(rt)} f(rt) dm_n(t) \right| \leq C(r, \alpha) \int_{D^n} |\mathfrak{D}^\alpha g(w)| |f(w)| (1-|w|)^{\alpha-1} dm_{2n}(w),$$

причем $C(r, \alpha) \rightarrow C(\alpha)$ при $r \rightarrow 1$.

Доказательство утверждений 1–3 приведены в [11, 7, 14] соответственно.

Лемма 3. Пусть $g \in H(D^n)$, $0 < p, q \leq 1$, $X = H^{p,q,\alpha}(D^n)$ или $F_\alpha^{p,q}(D^n)$, где

$$F_\alpha^{p,q}(D^n) = \left\{ f \in H(D^n), \|f\|_{F_\alpha^{p,q}(D^n)}^p = \int_{T^n} \left(\int_{I^n} |f(R\xi)|^q (1-R)^{\alpha q-1} dR \right)^{p/q} dm_n(\xi) < \infty, \quad 0 < p, q, \alpha < \infty \right\}.$$

Тогда

$$\int_{D^n} |f(w)| (1-|w|)^{\alpha+1/p-2} dm_{2n}(w) \leq c \|f\|_X, \quad f \in X.$$

Доказательство. Утверждение леммы доказано в [8] при $X = F_\alpha^{p,q}(D^n)$. При $X = H^{p,q,\alpha}(D^n)$ рассуждения не претерпевают значительных изменений.

Лемма 4. 1. Пусть $(B_\gamma(D^n))^*$ — пространство всех линейных непрерывных функционалов класса $B_\gamma(D^n)$. Тогда каждая функция из класса $H_1^{1,1,1}(D^n)$ порождает линейный непрерывный функционал в пространстве $B_\gamma(D^n)$.

2. Имеет место оценка

$$\int_{D^n} |f(w)|(1 - |w|)^{1/p-2} dm_{2n} \leq C(p)\|f\|_{H^p}, \quad f \in H^p(D^n), \quad 0 < p < 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Покажем, что любая функция $f \in H_1^{1,1,1}(D^n)$ порождает линейный непрерывный функционал на $B_\gamma(D^n)$ по формуле

$$\Phi_f(g) = \lim_{r \rightarrow 1} \int_{T^n} g(rt) \overline{f(rt)} dm_n(t), \quad g \in B_\gamma(D^n).$$

Действительно, проводя стандартные рассуждения и учитывая лемму 2, получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{T^n} \overline{f(rt)} g(rt) dm_n(t) \right| &= \left| \int_{T^n} \overline{(\mathfrak{D}f(rt))} \mathfrak{D}^{-1} g(rt) dm_n(t) \right| \\ &\leq C(r, \gamma) \int_{D^n} |\mathfrak{D}^\gamma g(w)| |\mathfrak{D}f(w)|(1 - |w|)^\gamma dm_{2n}(w), \end{aligned}$$

где $C(r, \gamma) \rightarrow C_1(\gamma)$ при $r \rightarrow 1$. Отсюда $|\Phi_f(g)| \leq C\|g\|_{B_\gamma(D^n)}\|f\|_{H_1^{1,1,1}(D^n)}$.

2. См. [14].

Лемма 5. Пусть $0 < p, q < \infty, f \in H^{p,q,\alpha}(D^n)$. Тогда

$$M_p(f, r)(1 - r)^\alpha \leq c\|f\|_{H^{p,q,\alpha}}, \quad r \in I^n,$$

для некоторой константы c .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} Q &= M_p(f, r_1, \dots, r_n)(1 - r_1)^\alpha \dots (1 - r_n)^\alpha \\ &\leq C \left(\int_{1-2^{k_{s,1}-1}}^{1-2^{-k_{s,1}-2}} \dots \int_{1-2^{k_{s,n}-1}}^{1-2^{-k_{s,n}-2}} M_p^q(f, r_1, \dots, r_n) \right. \\ &\quad \left. \times (1 - r_1)^{\alpha q} \dots (1 - r_n)^{\alpha q} dR_1 \dots dR_n (2^{k_{s,1} + \dots + k_{s,n}}) \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

где $k_{s,j} \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty; j = 1, \dots, n, r_j \in [1 - 2^{-k_{s,j}}; 1 - 2^{-k_{s,j}-1}]; j = 1, \dots, n$. Далее,

$$Q^q \leq C_1 \int_{1-2^{k_{s,1}-1}}^{1-2^{-k_{s,1}-2}} \dots \int_{1-2^{k_{s,n}-1}}^{1-2^{-k_{s,n}-2}} M_p^q(f, R)(1 - R)^{\alpha q-1} dR \leq C_2 \|f\|_{H^{p,q,\alpha}}^q.$$

В силу неравенств $M_p(f, R_1) \leq M_p(f, R_2), f \in H(D^n), R_k = (R_k^1, \dots, R_k^n), k = 1, 2, R_k \in I^n, k = 1, 2, R_1^j \leq R_2^j, j = 1, \dots, n$. Лемма 5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1 И 2. Доказательство необходимости условий (1) и (3) следует из леммы 1 и из теоремы о замкнутом графике. Докажем, к примеру, необходимость условия (3).

Пусть

$$f_r(z) = \frac{1}{(1-rz)^\gamma}, \quad r \in I^n, \quad \gamma = \beta + \alpha + 1/p - 1, \quad \beta > 1.$$

Тогда функцию

$$h(z) = \sum_{|k| \geq 0} a_k c_k z^k,$$

где

$$f_r(z) = \sum_{|k| \geq 0} a_k z^k r^k, \quad g(z) = \sum_{|k| \geq 0} c_k z^k,$$

можно представить в виде $h_r(z) = D^{\gamma-1} g_r(z)$. Следовательно, используя теорему о замкнутом графике и оценку леммы 1, получаем

$$\begin{aligned} \sup_{R \in I^n} M_\infty(D(D^{\beta+\alpha+1/p-2} g_r), R)(1-R) \\ = \|D^{\beta+\alpha+1/p-2} g_r\|_{Bl(D^n)} \leq C \|f_r(z)\|_{H^{p,q,\alpha}} \leq \frac{C_1}{(1-r)^{\beta-1}}. \end{aligned}$$

Отсюда учитывая, что $f(r) \leq \sup_{R \in I^n} f(R)$, где $r \in I^n$ любое, выводим

$$\sup_{r \in I^n} M_\infty(D(D^{\alpha+\beta+1/p-2} g), r)(1-r)^\beta < \infty,$$

и условие (3) установлено. Аналогично, используя оценку 1 леммы 1, можно вывести необходимость условия (1). Докажем необходимость условия (2). Заметим для этого, что если оператор

$$T_g : T_g(f) = h, \quad h(z) = \sum_{|k| \geq 0} c_k a_k z^k, \quad g(z) = \sum_{|k| \geq 0} c_k z^k, \quad f(z) = \sum_{|k| \geq 0} a_k z^k$$

действует из X в Y , где X, Y — квазинормированные подпространства $H(D^n)$, то сопряженный к нему оператор $(T_g)^*$ действует из Y^* в X^* по тому же правилу:

$$(T_g)^* \tilde{f} = \tilde{h}, \quad \tilde{h} \in X^*, \quad \tilde{f} \in Y^*, \quad \tilde{h}(z) = \sum_{|k| \geq 0} c_k \tilde{a}_k z^k, \quad \tilde{f}(z) = \sum_{|k| \geq 0} \tilde{a}_k z^k$$

(X^* и Y^* — сопряженные пространства к классам X и Y соответственно). Следовательно, T_g — ограниченный оператор из $(B_\beta(D^n))^*$ в $H^{p'}(D^n)$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$. Поэтому по лемме 4 T_g действует ограниченно из $H_1^{1,1,1}(D^n)$ в $H^{p'}(D^n)$. Остается, используя теорему о замкнутом графике, провести рассуждения, аналогичные проведенным выше при доказательстве необходимых условий (1) и (3), и учесть при этом, что из оценок (5) и леммы 2 следует

$$\begin{aligned} \|f_r(z)\|_{H_1^{1,1,1}} &= \left\| \mathfrak{D}^\beta \frac{1}{(1-rw)} \right\|_{H_1^{1,1,1}(D^n)} = \prod_{k=1}^n \left\| \mathfrak{D}^\beta \frac{1}{1-r_k w_k} \right\|_{H_1^{1,1,1}} \\ &\leq \left\| \frac{1}{(1-rw)^{\beta+1}} \right\|_{H_1^{1,1,1}(D^n)} \leq C(\beta) \int_{D^n} \frac{dm_{2n}(w)}{|1-rw|^{\beta+2}} \leq \frac{C_1}{(1-r)^\beta}, \quad \beta > 0. \end{aligned}$$

Установим, наконец, необходимость условия (4). Для доказательства воспользуемся описанием сопряженного пространства класса $H^{p,q,\alpha}(D^n)$:

$$(H^{p,q,\alpha}(D^n))^* = \{g \in H(D^n) : \mathfrak{D}^{A+1}g \in H^{p',q',(A+1)/q'}\}, \quad (6)$$

где $\alpha q - 1 = A$, $1 < q$, $p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$; $1/q + 1/q' = 1$, а X^* , как и выше, пространство, сопряженное к подпространству $X \subset H(D^n)$. При $n = 1$ равенство (6) приведено в [15], при $p = q$, $n \in \mathbb{N}$ — в [12]. Вышеприведенное равенство в полидиске нетрудно установить стандартным наращиванием общего числа переменных (см. [16]). Используя п. 1 леммы 4 при $\gamma = \alpha + \beta$ и применяя соображения двойственности, аналогичные приведенным выше, и лемму 5, выводим оценки

$$\begin{aligned} M_{p'}(\mathfrak{D}^{A+1}(\mathfrak{D}^\gamma g), r) &\leq C(1-r)^{\frac{\alpha q}{q'}} \|\mathfrak{D}^{\gamma+A+1}g_r\|_{H^{p',q',(A+1)/q'}} \\ &\leq C_1(1-r)^{\frac{\alpha q}{q'}} \int_{D^n} \mathfrak{D}(f_r(z)) dm_{2n}(z), \end{aligned}$$

где

$$f(z) = \sum_{k_1, \dots, k_n \geq 0} (k+1)^\gamma z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} = \mathfrak{D}^\gamma \left(\frac{1}{1-z} \right), \quad \gamma > 0.$$

Из лемм 1 и 2 имеем

$$\begin{aligned} \int_{D^n} |\mathfrak{D}f_r(z)| dm_{2n}(z) &\leq C_1 \prod_{k=1}^n \int_D \left| \mathfrak{D}^{\gamma+1} \frac{1}{(1-r_k z_k)} \right| dm_2(z) \\ &\leq C_2 \int_{D^n} \frac{1}{|1-rz|^{\gamma+2}} dm_{2n}(z) \leq C_3(1-r)^\gamma, \quad \gamma > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, получаем $M_{p'}(\mathfrak{D}^{\alpha q}(\mathfrak{D}^\gamma g), r)(1-r)^{\gamma+\alpha q/q'} < C$, что равносильно условию

$$\sup_{r \in I^n} M_{p'}(\mathfrak{D}^{\alpha+\beta}g, r)(1-r)^\beta < \infty,$$

где $\beta = \gamma + \alpha q - \alpha > \alpha q - \alpha$. Необходимость условия (4) установлена.

Займемся доказательством достаточности условий (1)–(4) в теоремах 1, 2.

Заметим, что если

$$f(z) = \sum_{|k| \geq 0} a_k z^k, \quad g(z) = \sum_{|k| \geq 0} c_k z^k,$$

то

$$h(z) = \sum_{|k| \geq 0} c_k a_k z^k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f(r\bar{t})g(rt\xi) dm_n(t), \quad z = r^2\xi, \quad z \in D^n.$$

Достаточность условия (2) следует из цепочки соотношений

$$\mathfrak{D}^\beta h(rz) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} \mathfrak{D}^\beta g_r(\bar{t})f(tz) dm_n(t);$$

$$\begin{aligned} |\mathfrak{D}^\beta h(rz)|(1-r)^\beta &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \left(\int_{T^n} |f(tz)|^p dm_n(t) \right)^{1/p} \\ &\quad \times \left(\int_{T^n} |\mathfrak{D}^\beta g_r(\bar{t})|^{p'} dm_n(t) \right)^{1/p'} (1-r)^\beta \leq C \|f\|_{H^p(D^n)}. \end{aligned}$$

Для доказательства достаточности условия (1) воспользуемся равенством, установленным в работе [8] при $\gamma = m \in \mathbb{N}$. В общем случае доказательство проходит аналогичным образом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f_\rho(rt) g_\xi(r\bar{t}) dm_n(t) \\ &= \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^n r_1^{-2\gamma} \dots r_n^{-2\gamma} \int_0^{r_1} \dots \int_0^{r_n} \int_{T^n} f_\rho(R\bar{t}) D^\gamma g_\xi(Rt) (1-R)^{\gamma-1} dm_n(\xi), \quad (7) \end{aligned}$$

$\gamma > 0$, $f_\rho(z) = f(\rho z)$, $\rho \in I^n$. Учитывая (7), получаем

$$\begin{aligned} h(\rho\xi r^2) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f_\rho(r\bar{t}) g_\xi(rt) dm_n(t), \quad r \in I^n, \rho \in I^n, \xi \in T^n, \\ |Dh_\rho(r^2\xi)| &\leq C(r, \beta, p) \int_0^{r_1} \dots \int_0^{r_n} \int_{T^n} |D(D^{\beta+1/p-2} g_\xi)(w)| \\ &\quad \times |f_\rho(\bar{w})| (1-|w|)^{\beta+1/p-3} dm_{2n}(w), \quad \beta > 1, 0 < p \leq 1. \quad (8) \end{aligned}$$

Далее, подбираем параметры ρ_j и r_j так, что $1 - \rho_j \leq 1 - r_j$; $j = 1, \dots, n$. Тогда из (8) вытекает оценка

$$\begin{aligned} |Dh_\rho(r^2\xi)|(1-\rho) &\leq C_3(r, \beta, p) \int_0^{r_1} \dots \int_0^{r_n} M_1(f, |w|) \\ &\quad \times (1-|w|)^{1/p-3} |w| d|w_1| \dots d|w_n| (1-\rho) \\ &\leq C_3(r, \beta, p) \int_0^{r_1} \dots \int_0^{r_n} M_1(f, |w|) (1-|w_1|)^{1/p-2} \dots (1-|w_n|)^{1/p-2} \\ &\quad \times |w_1| \dots |w_n| d|w_1| \dots d|w_n| \leq C_4(r, \beta, p) \|f\|_{H^p(D^n)}. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались леммой 4. Остается в полученном неравенстве перейти к супремуму и к пределу при $r_j \rightarrow 1$, $j = 1, \dots, n$, $\|h\|_{Bl(D^n)} \leq c \|f\|_{H^p(D^n)}$, $0 < p < 1$. Для доказательства утверждений теорем осталось установить достаточность условий (3) и (4). Учитывая равенства

$$Dh(r^2z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f(rt) (Dg_r(\bar{t}z)) dm_n(t), \quad r \in I^n, z \in D^n, |z_j| > r, j = 1, \dots, n;$$

$Dg_r(z) = Dg(rz)$ и (7), выводим

$$\begin{aligned} |Dh(r^2z)| &\leq C(\alpha, \beta, p, r) \int_0^r \dots \int_0^r |f(\bar{w})| |D^{\beta+\alpha+1/p-2}(Dg_z)(w)| \\ &\quad \times (1-|w|)^{\beta+\alpha+1/p-3} dm_{2n}(w), \quad \beta > 1, 0 < p \leq 1, 0 < \alpha < \infty. \end{aligned}$$

Умножим обе части полученного неравенства на $\prod_{j=1}^n (1-|z_j|)$. Из очевидных оценок $1 - |z_j| < 1 - r < 1 - |w_j|$, $j = 1, \dots, n$, следует, что

$$\begin{aligned} |Dh(r^2z)|(1-|z|) &\leq C(\alpha, \beta, p, r) \sup_{\rho \in I^n} (M_\infty(D(D^{\beta+\alpha+1/p-2}g), \rho)(1-\rho)^\beta) \\ &\quad \times \int_{D^n} |f(w)| (1-|w|)^{\alpha+1/p-2} dm_{2n}(w). \end{aligned}$$

Остается воспользоваться леммой 3 и перейти к пределу при $r \rightarrow 1$: $\|h\|_{Bl(D^n)} \leq c\|f\|_{H^{p,q,\alpha}(D^n)}$. При $\max(p, q) \leq 1$ утверждение теоремы 2 установлено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичными рассуждениями легко установить следующий результат:

$$\{(c_k)_{k \in \mathbb{Z}_+^n}\} \in M_T(F_\alpha^{p,q}(D^n), Bl(D^n)), \quad 0 < \max(p, q) \leq 1,$$

тогда и только тогда, когда

$$\sup_{r \in I^n} M_\infty(D(D^{\beta+\alpha+1/p-2}g), r)(1-r)^\beta < \infty,$$

где $\beta > 1$ — некоторое число. Отметим также, что применяемыми в данной работе методами нами получены многие утверждения работы [7] о коэффициентных мультипликаторах, действующих между классами $H^{p,q,\alpha}$ в D^n (см. [17]). Достаточность условия (4) вытекает из следующих оценок:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{D}^\nu h(r^2\xi)|(1-r)^\nu &\leq \left(\int_{T^n} |\mathfrak{D}^{\nu-\alpha q-\gamma} f(r\xi)|^p dm_n(\xi) \right)^{1/p} \\ &\quad \times \left(\int_{T^n} |\mathfrak{D}^{\alpha q+\gamma} g(r\xi)|^{p'} dm_n(\xi) \right)^{1/p'} (1-r)^\nu \\ &\leq C_4 M_p(\mathfrak{D}^{\nu-\alpha q-\gamma} f, r)(1-r)^{\nu-\alpha q/q'-\gamma} M_{p'}(\mathfrak{D}^{\alpha q+\gamma} g, r)(1-r)^{\alpha q/q'+\gamma}. \end{aligned}$$

Остается положить $\nu = \alpha q + \gamma$, $\gamma = \beta + \alpha - \alpha q$ и использовать оценку леммы 5 $M_{p'}(f, r)(1-r)^\alpha \leq C\|f\|_{H^{p,q,\alpha}}$, $r \in I^n$.

Теоремы 1 и 2 доказаны полностью.

Установим еще одно утверждение о коэффициентных мультипликаторах пространств Блоха в поликруге.

Теорема 3. Пусть $g \in H(D^n)$, $g(z) = \sum_{|k| \geq 0} c_k z^k$. Тогда

1) $\{(c_k)_{k \in \mathbb{Z}_+^n}\} \in M_T(H^\infty, Bl)$ в том и только том случае, если

$$\sup_{r \in I^n} M_1(DD^\beta f, r)(1-r)^{\beta+1} < \infty, \tag{9}$$

где β — некоторое положительное число.

2) $\{(c_k)_{k \in \mathbb{Z}_+^n}\} \in M_T(B, B)$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_{r \in I^n} M_1(\mathfrak{D}^\beta f, r)(1-r)^\beta < \infty \tag{10}$$

для некоторого $\beta > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Используя результаты работы [7] и лемму 2, легко показать, что пространства $M_T(B, B)$ и $M_T(H^\infty, Bl)$ при $n = 1$ совпадают с соответствующими пространствами, описание которых дано в работе [7].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. 1. Докажем сначала необходимость условия (9). Заметим сначала, что

$$\sup_{|z| < 1} |f_w(z)| \leq \sup_{|z| \leq 1} |f_w(z)| = |f_w(z_0)|,$$

где $z_0 \in T$, $f \in H(D)$, $w \in D$. Следовательно,

$$\sup_{\substack{|z_j| < 1 \\ j=1, \dots, n}} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{|1 - w_k z_k|^{\beta+1}} \right) \leq \prod_{k=1}^n \frac{1}{|1 - w_k z_k^0|^{\beta+1}}, \quad w_k \in D, \quad z_k^0 \in T, \quad k = 1, \dots, n.$$

Поэтому, применив теорему о замкнутом графике, выводим

$$|DD^\beta g_w(z)|(1-|z|) \leq c \left\| \frac{1}{(1-wz)^{\beta+1}} \right\|_{H^\infty(D^n)} \leq c \prod_{k=1}^n \frac{1}{|1-w_k z_k^0|^{\beta+1}},$$

где $\beta > 0$, $z_k^0 \in T$, $w_k \in D$, $k = 1, \dots, n$. Проинтегрируем обе части неравенства по T^n :

$$\int_{T^n} |DD^\beta g_w(z)| dm_n(\xi)(1-|z|) \leq c \int_{T^n} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{|1-w_k z_k^0|^{\beta+1}} \right) dm_n(\xi),$$

$w_k = \xi_k r_k$, $k = 1, \dots, n$. Далее,

$$M_1(DD^\beta g, |w||z|)(1-|z|) \leq \frac{C}{(1-|w|)^\beta}.$$

Остается положить $|z_k| = |w_k|$, $k = 1, \dots, n$, $w_k = \xi_k r_k$. Тогда

$$\sup_{r \in I^n} M_1(DD^\beta g, r)(1-r)^{\beta+1} < +\infty, \quad \beta > 0.$$

Докажем, что это условие является также достаточным.

Из равенства

$$h_R(r^2 \xi) = \int_{T^n} g_R(rt) f_\xi(r\bar{t}) dm_n(t), \quad r \in I, R \in I^n, \xi \in T^n,$$

используя соотношение (7), выводим

$$\begin{aligned} |Dh_R(r^2 \xi)| &= \left| \int_{T^n} f_\xi(r\bar{t}) Dg_R(rt) dm_n(t) \right| \\ &\leq C(r) \int_0^r \cdots \int_0^r \int_{T^n} |D^\beta(Dg_R)(w)|(1-|w|)^{\beta-1} |f_\xi(\bar{w})| dm_{2n}(w) \\ &\leq C(r) \|f\|_\infty \int_0^r \cdots \int_0^r \int_{T^n} |D^\beta Dg_R(w)|(1-|w|)^{\beta-1} \\ &\quad \times (1-R|w|)^{\beta+1} (1-R|w|)^{-\beta-1} dm_{2n}(w) \\ &\leq C(r) \|f\|_\infty \sup_{|w_i| < r} (M_1(D^\beta Dg_R, |w|))(1-R|w|)^{\beta+1} \\ &\quad \times \int_0^r \cdots \int_0^r \prod_{k=1}^n (1-R_k|w_k|)^{-\beta-1} (1-|w_k|)^{\beta-1} d|w_k| \\ &\leq C(r) C_1 \prod_{k=1}^n (1-R_k)^{-1}, \quad \beta > 0, \end{aligned}$$

где последнее неравенство следует из оценок (5) и соотношений

$$\begin{aligned} \sup_{|w_j| < r} M_1(D^\beta Dg, R|w|)(1-R|w|)^{\beta+1} &\leq \sup_{R_j|w_j| < rR_j} M_1(D^\beta Dg, R|w|)(1-R|w|)^{\beta+1} \\ &\leq \sup_{R_j|w_j| < 1} M_1(D^\beta Dg, R|w|)(1-R|w|)^{\beta+1} < C_2. \end{aligned}$$

Остается перейти к пределу при $r \rightarrow 1$:

$$|Dh(R\xi)|(1 - R_1) \dots (1 - R_n) < C_3, \quad R \in I^n, \quad \xi \in T^n, \\ \sup_{z=R\xi \in D^n} |Dh(R\xi)|(1 - R_1) \dots (1 - R_n) < C_3.$$

Поэтому $h \in Bl(D^n)$.

2. Покажем, что условие $\sup_{r \in I^n} M_1(\mathfrak{D}^\beta g, r)(1 - r)^\beta < \infty$, $\beta > 0$, достаточно.

Действительно, пусть $f \in B$. Тогда $|\mathfrak{D}^\alpha f(z)|(1 - |z|)^\alpha < \infty$ для некоторого $\alpha > 0$. Далее,

$$\mathfrak{D}^\beta h(r^2\xi) = \int_{T^n} f(rt\xi) \mathfrak{D}^\beta g(rt\xi) dm_n(t).$$

Отсюда

$$\mathfrak{D}^{\alpha+\beta} h(r^2\xi)(1 - r)^{\alpha+\beta} \leq CM_\infty(\mathfrak{D}^\alpha, f, r)(1 - r)^\alpha M_1(\mathfrak{D}^\beta g, r)(1 - r)^\beta < C_1.$$

Следовательно, $h \in B(D^n)$. Установим необходимость условия (10). По теореме о замкнутом графике имеем

$$|\mathfrak{D}^\beta \mathfrak{D}^S g_w(r\xi)|(1 - r)^S \leq C \left\| \mathfrak{D}^\beta \left(\frac{1}{1 - wz} \right) \right\|_{B_\gamma},$$

где γ, S, β — некоторые положительные числа, $w \in D^n$. Используя неравенство $|1 - w_k z_k|^{-\gamma} \leq (1 - |z_k|)^{-\gamma}$, $\gamma > 0$, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве первой части теоремы 3, и применяя лемму 2, имеем

$$\left\| \mathfrak{D}^\beta \left(\frac{1}{1 - wz} \right) \right\|_{B_\gamma} \leq \prod_{k=1}^n \sup_{z_k \in D} \left| \mathfrak{D}^\gamma \mathfrak{D}^\beta \frac{1}{(1' - w_k z_k)} \right| (1 - |z_k|)^\gamma \\ \leq C \prod_{k=1}^n \sup_{z_k \in D} \left| D^{\gamma+\beta} \frac{1}{(1 - w_k z_k)} \right| (1 - |z_k|)^\gamma \\ \leq C \prod_{k=1}^n \sup_{z_k \in D} \left(\frac{1}{|1 - w_k z_k|^{\beta+1}} \right) \leq C_1 \prod_{k=1}^n \sup_{z_k \in D} \left(\frac{1}{|1 - w_k z_k|^{\beta+1}} \right) \\ \leq C \prod_{k=1}^n \frac{1}{|1 - w_k z_k^0|^{\beta+1}}, \quad z_k^0 \in T, \quad k = 1, \dots, n, \quad \beta > 0.$$

Для получения нужного условия остается проинтегрировать обе части неравенства по T^n и положить $r_k = |w_k|$, $k = 1, \dots, n$. Теорема 3 доказана полностью.

§ 2. О коэффициентных мультипликаторах из $H^p(D^n)$ в $H^q(D^n)$

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 4. Пусть

$$g \in H(D^n), \quad g(z) = \sum_{|k| \geq 0} C_k z^k, \quad 0 < p < q \leq \infty, \quad 0 < p < 1.$$

Тогда следующие условия равносильны:

- 1) $\{(c_k)_{k \in Z_+^n}\} \in M_T(H^p(D^n), H^q(D^n))$;

2) $\sup_{r \in I^n} M_q(D^\beta g, r)(1-r)^{(\beta+1)-1/p} < \infty$, β — некоторое число, $\beta > 1/p - 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $n = 1$ этот результат установлен в работе [9]. Рассуждения существенным образом опираются на теоремы Харди — Литтлвуда о действии дробной производной в пространствах аналитических функций, суммируемых по площади. При $q > 1$ наше доказательство использует соображения двойственности, что, на наш взгляд, упрощает вышеупомянутое доказательство и позволяет перенести его в поликруг D^n . При $q \leq 1$ мы применяем подход, предложенный в работе [8].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Доказательство необходимости условия

$$\sup_{r \in I^n} M_q(D^\beta g, r)(1-r)^{\beta+1-1/p} < \infty, \quad \beta > 1/p - 1,$$

легко получить, используя теорему о замкнутом графике и повторяя рассуждения соответствующих импликаций предыдущих теорем. Докажем теперь, что это же условие будет достаточным. Пусть $0 < p < 1$, $0 < p < q \leq 1$. Тогда, используя равенство (7), имеем

$$\begin{aligned} |h(\rho^2 rt)| &= \left| \int_{T^n} g_r(t\xi\rho) f(\bar{\xi}\rho) dm_n(\xi) \right| \\ &\leq C(\rho, \beta) \int_{D^n} |D^\beta g_{rt}(\bar{w})| (1-|w|)^{\beta-1} |f(w)| dm_{2n}(w), \quad \beta > 1/p - 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Устремляя $\rho \rightarrow 1$ и возводя обе части неравенства в степень q , получим

$$|h(rt)|^q \leq C_1(\beta) \left(\int_{D^n} |D^\beta g_{rt}(\bar{w})| |f(w)| (1-|w|)^{\beta-1} dm_{2n}(w) \right)^q.$$

Следующая оценка установлена в работе [8] методами, изложенными в [12]:

$$\begin{aligned} &\left(\int_{D^n} |D^\beta g_{rt}(\bar{w})| |f(w)|^q (1-|w|)^{\beta-1} dm_{2n}(w) \right)^q \\ &\leq c(q) \int_{D^n} |D^\beta g_{rt}(\bar{w})|^q |f(w)|^q (1-|w|)^{(\beta+1)q-2} dm_{2n}(w), \quad \beta > 1/q - 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\int_{T^n} |h(rt)|^q dm_n(t) \\ &\leq C_2(q, \beta) \int_{T^n} \int_{D^n} |D^\beta g_{rt}(\bar{w})|^q |f(w)|^q (1-|w|)^{(\beta+1)q-2} dm_{2n}(w) dm_n(t). \end{aligned}$$

Применяя теорему Фубини и учитывая условие 2 теоремы, получаем

$$\int_{T^n} |h(rt)|^q dm_n(t) \leq C_2(q, \beta) \int_{D^n} |f(w)|^q (1-|w|)^{q/p-2} dm_{2n}(w), \quad 0 < p < q \leq 1.$$

Докажем теперь, что справедливо неравенство

$$\int_{D^n} |f(w)|^q (1-|w|)^{q/p-2} dm_{2n}(w) \leq C(q) \|f\|_{H^p(D^n)}, \quad 0 < p < q \leq 1. \quad (12)$$

Воспользуемся индукцией по n . При $n = 1$ неравенство (12) — следствие теоремы вложения Карлесона (см. [13]). Далее, учитывая следствие 2.7 работы [14] и тот факт, что для $k = n - 1$ оценка (12) верна, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \int_D \cdots \int_D |f(w_1, \dots, w_n)|^q ((1 - |w_1|)(1 - |w_2|) \dots (1 - |w_n|))^{q/p-2} dm_{2n}(w) \\ & \leq C_1 \int_D \left(\sup_{R_1, \dots, R_{n-1} \in (0,1)} |f(w_1, \dots, w_n)|^p dm_1(\xi_1) \dots dm_1(\xi_{n-1}) \right)^{q/p} \\ & \quad \times (\xi_{n-1})^{q/p} (1 - |w_n|)^{q/p-2} dm_2(w_n) \leq C_2 \|f\|_{H^p(D^n)}, \quad 0 < p < q \leq 1. \end{aligned}$$

В случае $0 < p < q \leq 1$ теорема доказана.

Пусть теперь $0 < p < 1 < q < \infty$. Используя двойственность пространств $H^q(D^n)$, $H^{q'}(D^n)$, $1/q' + 1/q = 1$, имеем

$$\left(\int_{T^n} |h(r^2 \xi)|^q dm_n(\xi) \right)^{1/q} = \left| \int_{T^n} \psi(r \xi) h(r \bar{\xi}) dm_n(\xi) \right|,$$

где $\psi \in H^{q'}(D^n)$, $\|\psi\|_{H^{q'}(D^n)} = 1$. Далее, применяя теорему Фубини, неравенство Гёльдера, условие 2 теоремы и лемму 4, окончательно получаем

$$\begin{aligned} & \left(\int_{T^n} |h(r^3 \xi)|^q dm_n(\xi) \right)^{1/q} \leq C \int_{T^n} |\psi(r \xi)| |h(r^2 \bar{\xi})| dm_n(\xi) \\ & \leq \frac{C(\beta, n)}{(r_1 \dots r_n)^{2\beta}} \int_{T^n} \int_{D^n} |D^\beta g(R \tilde{\xi} \tilde{\xi})| |f(R \tilde{\xi})| dm_n(\tilde{\xi}) (1 - R)^{\beta-1} R dR |\psi(r \xi)| dm_n(\xi) \\ & \leq \frac{C(\beta, n)}{(r_1 \dots r_n)^{2\beta}} \int_{T^n} \int_{I^n} |f(R \tilde{\xi})| \left(\int_{T^n} |D^\beta g(Rt)|^q dm_n(t) \right)^{1/q} \\ & \quad \times \left(\int_T |\psi(rt)^{q'}| dm_n(t) \right)^{1/q'} (1 - R)^{\beta-1} dm_n(\tilde{\xi}) R dR \\ & \leq \frac{C(\beta, n)}{(r_1 \dots r_n)^{2\beta}} \int_{D^n} |f(w)| (1 - |w|)^{1/p-2} dm_{2n}(w) \leq \frac{C(\beta, n)}{(r_1, \dots, r_n)^{2\beta}} \|f\|_{H^p(D^n)}. \end{aligned}$$

Остается перейти к пределу при $r_j \rightarrow 1$, $j = 1, \dots, n$. При $q = \infty$ из (11) вытекает, что

$$\|h\|_{H^\infty(D^n)} \leq c(\beta) \int_{D^n} |f(w)| (1 - |w|)^{1/p-2} dm_{2n}(w) \leq C(\beta) \|f\|_{H^p}.$$

Теорема 4 доказана.

Пусть, далее,

$$H_\beta^p(D^n) = \{f \in H(D^n) : \|D^\beta f\|_{H^p} < \infty, 0 < \beta < \infty\}.$$

Незначительно модифицируя доказательство, легко доказать несколько более общий результат.

Теорема 5. Пусть $g(z) \in H(D^n)$, $g(z) = \sum_{|k| \geq 0} c_k z^k$. Тогда равносильны следующие условия:

- 1) $\{(c_k)_{k \in Z_+^n}\} \in M_T(H_\beta^p(D^n), H_\alpha^q(D^n))$, $0 < p < 1 < q \leq \infty$, $0 < \alpha, \beta < \infty$;
- 2) $M_q(D^\gamma D^\alpha D^{-\beta} g, R)(1-R)^{\gamma+1-1/p} < \infty$, γ — некоторое число, $\gamma > 1/p - 1$.

В заключение отметим, что из теорем 1–5, используя результаты работы [18], можно получить различные достаточные условия о действии мультипликаторов из классов H_α^p в поликруге в пространствах $l^2(D^n)$ и $l^1(D^n)$, где

$$l^p(D^n) = \left\{ a_k = (a_{k_1, \dots, k_n}), k_j \in Z^+, j = 1, \dots, n; \sum_{|k| \geq 0} |a_{k_1, \dots, k_n}|^p < \infty \right\},$$

при $1 \leq p < \infty$, а также утверждения о действии дробной производной между классами Блоха и $H^{p,q,\alpha}(D^n)$, $H^p(D^n)$, между классами Харди $H^p(D^n)$ и Харди — Соболева $H_\alpha^p(D^n)$. Приведем два следствия такого рода. С учетом теоремы 5 и результата работы [18] получаем

Следствие 1. Если $\lambda_k = c_k a_k$, $k \in Z_+^n$,

$$\sum_{k_1=0}^{N_1} \dots \sum_{k_n=0}^{N_n} k_1^2 \dots k_n^2 |a_{k_1 \dots k_n}|^2 = O(N_1^2 \dots N_n^2), \quad g(z) = \sum_{|k| \geq 0} c_k z^k$$

и выполнено условие 2 теоремы 5 при $\alpha = 0$, $q = 1$, то

$$\{(\lambda_k)_{k \in Z_+^n}\} \in M_T(H_\beta^p, l^2), \quad 0 < p < 1.$$

Из теорем 1 и 4 вытекает

Следствие 2. 1. Пусть $0 < p, q \leq 1$, $0 < s \leq 1$, $\gamma = 1/s$, $\beta = \alpha + 1/p$. Тогда

$$\|G(z)\|_{Bl(D^n)} \leq C \|\mathfrak{D}^\beta G\|_{H^{p,q,\alpha}(D^n)(F_\alpha^{p,q})}, \quad \|G(z)\|_{Bl(D^n)} \leq C' \|\mathfrak{D}^\gamma G\|_{H^s}.$$

2. Пусть $0 < p < q < \infty$, $\alpha = 1/p - 1/q$. Тогда

$$\|G(z)\|_{H^q(D^n)} \leq C_1 \|\mathfrak{D}^\alpha G(z)\|_{H^p(D^n)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение 2 следствия 2 при $n = 1$ — хорошо известная теорема Харди — Литтлвуда о действии дробной производной в пространствах Харди (см. [12, 14]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Anderson J. M. Bloch function: the basic theory // Proc. Conf. «Operators and function theory». Univ. Lancaster, 1984. P. 4–6.
2. Anderson J. M., Clunie J., Pommerenke Ch. On Bloch functions and normal functions // J. Reine Angew. Math. 1974. Bd 270. S. 12–37.
3. Макаров Н. Г. Вероятностные методы в теории конформных отображений // Алгебра и анализ. 1989. V. 1, вып. 1. С. 3–59.
4. Шведенко С. В. Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре // Математический анализ. М: ВИНТИ, 1985. Т. 23. С. 3–123. (Итоги науки и техники).
5. Timoney R. M. Bloch functions in several complex variables // J. Bull. London Math. Soc. 1980. V. 12, N 4. P. 241–267.
6. Zhu K. Multipliers of BMO in the Bergman metric with application to Toeplitz operators // J. Funct. Anal. 1989. V. 87, N 12. P. 31–50.

7. Jevtic M., Pavlovic M. Coefficient multipliers on spaces of analytic functions // Acta Sci. Math. 1998. V. 64. P. 531–545.
8. Шамоян Р. Ф. О мультипликаторах из пространств типа Бергмана в пространства Харди в поликруге // Укр. мат. журн. 2000. № 10. С. 1392–1401.
9. Mateljevic M., Pavlovic M. Multipliers of H^p and BMOA // Pacif. J. Math. 1990. V. 146. P. 71–84.
10. Тригуб М. Мультипликаторы в пространствах Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0, 1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов // Мат. сб. 1997. Т. 188, № 4. С. 145–160.
11. Buckley S. M., Koskela P., Vicotic D. Fractional integration, differentiation, and weighted Bergman spaces // Proc. Camb. Soc. 1999. V. 126, N 2. P. 369–385.
12. Djrbashian A., Shamoian F. A. Topics in the theory of A_α^p spaces. Leipzig: Teubner texte zur Math., 1988. V. 105.
13. Duren P. L. Theory of H^p spaces. New York; London: Acad. Press, 1970.
14. Aleksandrov A. V. Essays on non locally convex Hardy classes // Lecture Notes in Math. 1981. V. 864. P. 1–90.
15. Ahern P., Jevtic M. Duality and multipliers for mixed norm spaces // Lecture Michigan Math. J. 1983. V. 30, N 1. P. 53–64.
16. Шамоян Р. Ф. Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 2. С. 197–215.
17. Шамоян Р. Ф. Непрерывные функционалы и мультипликаторы степенных рядов одного класса аналитических в поликруге функций // Изв. вузов. 2000. № 7. С. 67–69.
18. Oberlin D. M. Two multiplier theorems for $H^1(U^2)$ // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1979. V. 22, N 1. P. 43–47.

Статья поступила 16 ноября 2000 г.

Шамоян Рами Файзиевич

Брянский гос. педагогический университет, кафедра математического анализа

ул. Бежицкая, 16, Брянск 241036

sham@bgpi.bitmcsnit.bryansk.su