L. V. Aparina, On uniformity and proximity analogues of the Lindelöf property, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1982, Volume 37, Issue 4, 141–142

О РАВНОМЕРНОСТНОМ И БЛИЗОСТНОМ АНАЛОГАХ ЛИНДЕЛЁФОВОСТИ

Л. В. Апарина

В работе дано обобщение идеи нормального вложения множества A в топологическое пространство для категорий Top, Unif, Prox [1]. Вводится новый класс Φ_μ-линделёфовых пространств близости, который включает хьюиттовски Ф-полные (в частности, вещественно-полные) пространства близости [2] [1]). В категории Top этот подход позволяет единым образом охарактеризовать вещественно-компактные и линделёфовы пространства.

Введем необходимые обозначения и определения: (X, p) — пространство близости (отделимое); $\Pi(X)$ — совокупность всех близостно непрерывных вещественных функций на X; $\Pi^*(X)$ — совокупность всех ограниченных функций из $\Pi(X)$; Φ — частичная векторная решетка функций из $\Pi(X)$, содержащая $\Pi^*(X)$ [2]; в дальнейшем для краткости называем Φ допустимым семейством функций; γX — смирновская бикомпактификация (X, p); ΦX — хьюиттовское Ф-расширение (X, p) [2] (максимальное подпространство в γX, на которое продолжается любая функция $f \in \Phi$ с сохранением близостной непрерывности).

Определение 1. Пусть $\{S_\alpha\}$ — семейство непустых подмножеств в Y, f — вещественная функция на Y. Назовем f *неограниченной на системе* $\{S_\alpha\}$, если для каждого числа $M > 0$ существует S_α из этой системы такое, что $f(y) > M$ $\forall\, y \in S_\alpha$.

Очевидно, при этом f неограничена на Y. Далее, (X, p) всюду предполагается небикомпактным.

Определение 2. Пусть T — бикомпакт в $\gamma X \setminus X$, Φ — допустимое семейство функций на X. Назовем $G \subset \gamma X$ *ΦG_δ-окрестностью* T, если G типа G_δ в γX (т. е. $G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, G_n открыты в γX) и существует функция $f \in \Phi$, неограниченная на системе $\{G_n \cap X\}$, $G \supset T$.

Определение 3. Назовем бикомпакт $T \subset \gamma X \setminus X$ *ΦG_δ-отделимым* от X, если существует ΦG_δ-окрестность множества T, не пересекающаяся с X.

Определение 4. Пусть μ — некоторая совокупность бикомпактных подмножеств в $\gamma X \setminus X$. Назовем X *ΦG_δ-замкнутым в γX относительно* μ, если каждое $T \in \mu$ ΦG_δ-отделимо от X.

Определение 5. Пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие (X, p) в γX (U_α открыты в γX). Назовем $\{U_\alpha\}$ *μ-допустимым покрытием* (X, p) в γX, если его остаток $\gamma X \setminus \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ содержится в некотором $T \in \mu$.

Теорема 1. *Следующие условия равносильны*:

1. (X, p) *ΦG_δ-замкнуто в γX относительно* μ.

2. *Из всякого μ-допустимого открытого покрытия множества X (U_α открыты в γX) выделяется счетное подпокрытие $\{U_n\}$ такое, что его остаток $\gamma X \setminus \bigcup\limits_n U_n$ ΦG_δ-отделим от X.*

3. *Для каждого $T \in \mu$ существует функция $g \in \Pi^*(X)$ такая, что $\bar{g}(t) = 0$ $\forall t \in T$, $g(x) > 0$ на X, $\dfrac{1}{g} \in \Phi$ ($\bar{g}$ — непрерывное продолжение g на γX).*

Определение 6. Пространство (X, p), удовлетворяющее какому-либо из равносильных условий 1—3, назовем *$\Phi\mu$-линделёфовым*.

Если μ — совокупность всех одноточечных подмножеств в $\gamma X \setminus X$, то условие 2 (в связи с теоремой 1 в [5]) доставляет новую характеризацию хьюиттовски Ф-полных пространств близости и, в частности, хьюиттовски полных равномерных пространств [5].

Если (X, p) $\Phi\mu$-линделёфово относительно совокупности μ всех бикомпактных подмножеств в $\gamma X \setminus X$, то будем называть (X, p) *Ф-линделёфовым*. Соответственно

[1]) Переход к двойственному понятию позволяет ввести близостный и равномерностный аналоги пространств счетного и точечно-счетного типа [3], [4].

определяется Ф-линделёфовость равномерного пространства $(X, \mathfrak{A})$ с естественной близостью. В случае $\Phi = P(X)$ назовем $(X, \mathfrak{A})$ *линделёфовым* [1]).

Далее применяем теорему 1 к вполне регулярным топологическим пространствам (X, τ). Обозначения $C(X)$, $C^*(X)$, βX — обычные.

Введем в (X, τ) слабую равномерность, порожденную $C(X)$, и соответствующую близость p. Тогда $\Pi(X) = C(X)$, $\gamma X = \beta X$. Пусть $\Phi = C(X)$ и μ — некоторое семейство бикомпактов в $\beta X \setminus X = \gamma X \setminus X$.

Определение 7. Пусть X — подмножество вполне регулярного топологического пространства (Y, τ_1), $X \neq Y$, μ — некоторое семейство непустых замкнутых подмножеств в Y, входящих в $Y \setminus X$. Назовем X *G_δ-замкнутым в Y относительно* μ, если для каждого $T \in \mu$ существует G типа G_δ в Y такое, что $T \subset G \subset Y \setminus X$.

G_δ-замкнутость (X, τ) в βX относительно μ равносильна ΦG_δ-замкнутости (X, p) в $\gamma X = \beta X$ относительно μ для $\Phi = C(X)$.

Теорема 2. *Следующие условия равносильны:*

1. (X, τ) *G_δ-замкнуто в βX относительно* μ.

2. *Из всякого μ-допустимого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ множества X (U_α открыты в βX) выделяется счетное подпокрытие.*

3. *Для любого $T \in \mu$ существует $g \in C^*(X)$ такое, что $\bar{g}(t) = 0$ $\forall t \in T$, $g(x) > 0$ на X ($\bar{g}$ — продолжение g на βX, $\bar{g} \in C(\beta X)$).*

Если μ — совокупность всех одноточечных подмножеств в $\beta X \setminus X$, то G_δ-замкнутость X в βX относительно μ равносильна вещественной компактности (X, τ) [6]. Утверждение 2 теоремы 2 дает новую характеристику таких пространств.

В случае, когда μ — совокупность всех бикомпактных подмножеств в $\beta X \setminus X$, равносильность 1 и 2 есть известный критерий Ю. М. Смирнова линделёфовости (X, τ) [1], а условие 3 (в связи с 2) дает новую характеристику линделёфовости (X, τ).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. М. Смирнов. О нормально расположенных множествах нормальных пространств.— Матем. сб., 1951, **29** (71):1, с. 173—176.
[2] Л. В. Апарина. Хьюиттовские расширения близостных и равномерных пространств.— СМЖ, 1974, **15**:4, с. 707—729.
[3] M. Henriksen, J. R. Isbell. Some properties of compactifications.— Duke Math. J., 1958, **25**, p. 83—106.
[4] А. В. Архангельский. Бикомпактные множества и топология пространств.— Труды ММО, 1965, **13**, с. 3—55.
[5] Л. В. Апарина. О некоторых характеризациях хьюиттовски Ф-полных пространств близости.— УМН, 1980, **35**:6 (216), с. 149—150.
[6] S. Mrówka. Some properties of Q-spaces.— Bull. Acad. Polon. Sci., cl. III 1957, **51**, p. 947—950.

Волгоградский государственный педагогический институт

Поступило в Правление общества 10 января 1982 г.

[1]) $P(X)$ — совокупность всех равномерно непрерывных вещественных функций на $(X, \mathfrak{A})$.