



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. С. Савенков, Почти регулярные разбиения графа, *Зап. научн. сем. ПОМИ*,
2014, том 427, 105–113

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

18 февраля 2025 г., 21:20:06



К. С. Савенков

ПОЧТИ РЕГУЛЯРНЫЕ РАЗБИЕНИЯ ГРАФА

§1. ВВЕДЕНИЕ

Объект, который будет нас интересовать в этой статье – это граф G на n вершинах, степени всех вершин которого не меньше $\frac{k-1}{k}n$. Сильное предположение про такие графы выдвинул Сеймур: он предположил, что граф, обладающий таким условием, имеет $(k-1)$ -ую степень гамильтонова цикла. Существенное продвижение в доказательстве этого предположения было сделано в 1998 году группой математиков (Szemerédi, Sárközy и Komlós [1]). Они доказали гипотезу в предположении того, что n достаточно велико. Недостаток этого результата в том, что порог n_0 , начиная с которого утверждение доказано, чрезвычайно велик.

Нас будет больше интересовать не степень гамильтонова цикла в графе G , а его разбиение на клики размера k . Из гипотезы Сеймура легко следует, что граф G можно разбить на $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ клик размера k и одну клику размера $n - \lfloor \frac{n}{k} \rfloor k$. Для этого достаточно выбирать группы вершин соответствующего размера подряд из цикла. Мы будем стремиться к подобному результату: будем пытаться разбить граф G на клики так, чтобы как можно больше клик имели размер именно k .

Будем использовать стандартные обозначения:

$d_G(v)$ обозначает степень вершины v в графе G ;

$e(G)$, $v(G)$ обозначают количество ребер и вершин соответственно в графе G ;

$e_G(A, B)$ обозначает количество ребер в графе G между множествами вершин A и B ;

$G(M)$ обозначает индуцированный подграф графа G на множестве вершин M .

Основным результатом работы является следующая теорема:

Теорема. Пусть G – граф на n вершинах, $k \leq 8$ – натуральное число, и $d_G(v) \geq \frac{k-1}{k}n$ для любой вершины v графа G . Тогда вершины графа G можно разбить на несколько клик размера не более k , при

Ключевые слова: клика, разбиение.

этом для любого натурального $k_0 < k$ клика размера k_0 будет присутствовать в разбиении не более одного раза.

Перейдем к дополнительному графу G' . Ограничение на минимальную степень графа G превратится в условие о том, что все степени вершин графа G' не превосходят $n - 1 - \frac{k-1}{k}n = \frac{n}{k} - 1$. Если раньше мы хотели разбивать вершины графа G на клики, то теперь будем разбивать вершины графа G' на независимые множества. Подобную ситуацию изучал Эрдеш. Он выдвинул предположение о том, что если степени всех вершин графа G меньше d , то вершины графа G можно разбить на d независимых множеств, размеры которых отличаются не более чем на 1. Гипотеза была доказана Hajnal и Szemerédi в 1970 году [2]. Попробуем применить этот результат.

Предположим, $n = kc + r$, где $0 < r < k$. Тогда в графе G' степени всех вершин не превосходят $c-1$, то есть строго меньше c . Значит, вершины графа G' можно разбить на c независимых множеств, размеры которых отличаются не более чем на 1. Вычислим размеры независимых множеств. Несложно понять, что в случае $c > r$ это будет k и $k+1$, а в случае $c \leq r$ и вовсе все независимые множества будут иметь размер строго больше k . Доказанная в этой статье теорема позволяет избежать независимые множества размера больше k полностью.

Добиться того, чтобы размеры клик не превосходили k , можно, если сказать, что все вершины графа G' имеют степень меньше $c+1$. Действительно, тогда граф разобьется на $k-r$ клик размера $k-1$, а остальные клики будут иметь размер k . Однако, $k-r$ может быть существенно больше единицы.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Определение. (a, b, c) -разбиением графа G будем называть тройку попарно непересекающихся множеств $A, B, C \subset V(G)$ таких, что $A \cup B \cup C = V(G)$, $|A| = a$, $|B| = b$, $|C| = c$, при этом на множествах вершин A, B, C граф G образует клики.

Лемма 1. Пусть G — граф, (A_1, A_2, B) — его (a, a, b) -разбиение, $a < b \leq 2(b-a+1)^2$. Через G' обозначим граф на тех же вершинах, что и граф G , со следующим набором ребер. Ребра графа G' между $A_1 \cup A_2$ и B соответствуют антиребрам G , между A_1 и A_2 ребер в

графе G' нет. Пусть $e(G') \leq 2a - 1$. Тогда для некоторого натурального k такого, что $a + k \leq b$ и $a - k \geq 0$, существует $(a + k, a - k, b)$ -разбиение графа G .

Доказательство. От противного. Пусть такого разбиения нет. Для $y \in B$ будем через $D_{G'}(y)$ обозначать пару чисел (a_1, a_2) , где $a_i = d_{G'(A_i \cup B)}(y)$. В обозначении пар будем использовать регулярные выражения. Например, говоря, что $D_{G'}(y) = (*, \geq 1)$, будем иметь в виду, что $D_{G'}(y) = (a_1, a_2)$, где a_1 — любое, а $a_2 \geq 1$.

Часть 1.

Не умаляя общности, считаем, что $e_{G'}(B, A_1) \leq e_{G'}(B, A_2)$. Тогда $e_{G'}(B, A_1) \leq a - 1$, а значит, существует вершина $v \in A_1$ такая, что $d_{G'}(v) = 0$ и вершина $u \in B$ такая, что $D_{G'}(u) = (0, *)$ (на самом деле существует даже хотя бы $b - a + 1$ таких вершин). Пусть существует такая вершина $x \in A_2$, что $d_{G'}(x) = 0$. Тогда тройка

$$(A_1 \cup \{u\}, \quad A_2 \setminus \{x\}, \quad (B \cup \{x\}) \setminus \{u\})$$

является $(a + 1, a - 1, b)$ -разбиением, противоречие. Если же существует такая вершина $x \in B$, что $D_{G'}(x) = (*, 0)$, то противоречие дает тройка

$$(A_2 \cup \{x\}, \quad A_1 \setminus \{v\}, \quad (B \cup \{v\}) \setminus \{x\}),$$

являющаяся также $(a + 1, a - 1, b)$ -разбиением. Значит, для каждой вершины $x \in B$ справедливо утверждение $D_{G'}(x) = (*, \geq 1)$, а тогда $e_{G'}(B, A_2) \geq b$, из чего следует $e_{G'}(B, A_1) \leq 2a - 1 - b$. Поэтому количество вершин $v \in A_1$ таких, что $d_{G'}(v) = 0$, хотя бы

$$a - (2a - b - 1) = b - a + 1,$$

а количество таких вершин $x \in B$, что $d_{G'}(x) = (0, *)$, хотя бы

$$b - (2a - b - 1) = 2b - 2a + 1.$$

Результаты части 1 можно сформулировать так:

- 1) $e_{G'}(B, A_2) \geq b$, $e_{G'}(B, A_1) \leq 2a - 1 - b$;
- 2) в A_2 нет таких вершин v , что $d_{G'}(v) = 0$, в B нет таких вершин x , что $D_{G'}(x) = (*, 0)$;
- 3) в A_1 существует хотя бы $b - a + 1$ таких вершин v , что $d_{G'}(v) = 0$, в B существует хотя бы $2b - 2a + 1$ таких вершин x , что $D_{G'}(x) = (0, *)$.

Часть 2.

Обозначим через H множество таких вершин $x \in B$, что $d_{G'}(x) = (\geq 1, *)$. Сразу стоит отметить, что H непусто. Пусть это

не так. Рассмотрим такую вершину $x \in A_2$, что $d_{G'}(x)$ минимально. Если $d_{G'}(x) \geq 2$, то степени всех вершин из A_2 в графе G' не меньше двух, а тогда $e_{G'}(A_2, B) \geq 2|A_2| = 2a > 2a - 1$, противоречие. Тогда $d_{G'}(x) \leq 1$. Пусть вершина y – единственный сосед вершины x в графе G' , если он есть, и произвольная вершина части B , если соседа нет. Покажем, что следующая тройка будет $(a + 1, a - 1, b)$ -разбиением:

$$(A_1 \cup \{y\}, \quad A_2 \setminus \{x\}, \quad (B \setminus \{y\}) \cup \{x\}).$$

Действительно, за счет того, что y – единственная возможная смежная с x вершина, множество $(B \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ является независимым множеством в графе G' (соответственно, кликой в графе G), а множество $A_1 \cup \{y\}$ является независимым множеством в графе G' , поскольку из предположения о том, что множество H пусто, следует, что $D_{G'}(y) = (0, *)$, то есть вершина y не смежна ни с одной вершиной из A_1 . Таким образом получили противоречие, а значит, множество H непусто.

Обозначим через F множество вершин всех компонент связности графа $G'(B \cup A_2)$, содержащих хотя бы одну вершину из H . Очевидно, этих компонент не более $|H|$. Через D обозначим множество $(B \cup A_2) \setminus F$. Отметим, что в графе G' есть:

- хотя бы $|H|$ ребер между H и A_1 ;
- хотя бы $|F| - |H|$ ребер внутри F , поскольку граф $G'(F)$ имеет $|F|$ вершин и не более $|H|$ компонент связности;
- $e_{G'}(D)$ ребер внутри D .

Поскольку количество ребер в графе G' не превосходит $2a - 1$, получаем неравенство:

$$|H| + |F| - |H| + e_{G'}(D) \leq e(G') \leq 2a - 1.$$

Сокращая $|H|$, а также добавляя и вычитая $|D|$, получаем неравенство

$$|F| + |D| + e_{G'}(D) - |D| \leq 2a - 1.$$

Пользуясь тем, что $F \cup D = A_2 \cup B$, получаем неравенство

$$|D| - e_{G'}(D) \geq 1 - 2a + |F| + |D| = 1 - 2a + b + a = b - a + 1.$$

Это значит, что в графе $G'(D)$ хотя бы $b - a + 1$ компонента связности, являющаяся деревом (у любой компоненты связности K с хотя

бы одним циклом $v(K) - e(K) \leq 0$). Важным следствием этого факта является то, что компонент связности графа $G'(D)$, являющихся деревом, хотя бы две, поскольку $b - a + 1 \geq 2$. Это и будет основным результатом части 2.

Часть 3.

Будем пытаться исследовать компоненты связности без циклов графа $G'(D)$. Говорим, что компонента связности C имеет тип (x, y) , если она содержит x вершин в A_2 (их множество мы обозначим за C_A и будем называть A -частью) и y вершин в B (их множество мы обозначим за C_B и будем называть B -частью). Рассмотрим компоненту C с минимальной B -частью. Пусть она имеет тип (x, y) .

1. *Покажем, что $y > x$.* Пусть это не так. Пусть $y \leq x$. Тогда существует вершина $v \in C_A$: $d_C(v) = 1$, поскольку если степени всех вершин в части C_A не меньше двух, то

$$e_{G'}(C) \geq 2|C_A| = 2x > x + y - 1 = |C| - 1,$$

противоречие. Пусть u — единственная смежная с v вершина. Покажем, что такая тройка является $(a + 1, a - 1, b)$ -разбиением:

$$(A_1 \cup \{u\}, \quad A_2 \setminus \{v\}, \quad (B \setminus \{u\}) \cup \{v\}).$$

Поскольку $u \notin H$, множество $A_1 \cup \{u\}$ является кликой в графе G . Вершина u является единственным соседом вершины v в графе G' , поэтому множество $(B \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ — клика в графе G .

2. *Покажем, что $y - x > b - a$.* Пусть это не так. Покажем, что существует такое множество $B_0 \subset B \setminus (H \cup C_B)$, что $|B_0| = b - a$. Разберем два случая.

Случай 1: пусть $y \geq b - a$. Значит, для любой другой компоненты связности без циклов графа $G'(D)$ её B -часть тоже не меньше $b - a$. Тогда множество B_0 можно набрать из второй компоненты связности без циклов графа $G'(D)$, которая существует по части 2.

Случай 2: пусть $y < b - a$. В силу вывода 3 части 1, мы имеем $|B \setminus H| \geq 2b - 2a + 1$. Поскольку $|C_B| < b - a$, справедливо

$$|B \setminus (H \cup C_B)| > b - a + 1.$$

Тогда выбрать $b - a$ вершин из этого множества легко.

Итак, множество B_0 выбрано. Тогда рассмотрим такую тройку:

$$((A_2 \cup C_B) \setminus C_A, \quad (B \cup C_A) \setminus (B_0 \cup C_B), \quad A_1 \cup B_0).$$

Покажем, что эта тройка является $(a + (y - x), a - (y - x), b)$ -разбиением. Поскольку $C = C_A \cup C_B$ является компонентой связности графа G' , множество $(A_2 \cup C_B) \setminus C_A$ является независимым множеством графа G' , а тогда и кликой графа G . То же самое можно сказать про множество $(B \cup C_A) \setminus C_B$, а тогда и про содержащееся в нем множество $(B \cup C_A) \setminus (B_0 \cup C_B)$. Множество B_0 является подмножеством $B \setminus H$, поэтому множество $A_1 \cup B_0$ является кликой графа G . Поскольку $y - x \leq b - a$, получается $a + (y - x) \leq a + (b - a) = b$. Условие $a - (y - x) \geq 0$ получается автоматически, так как размер явно построенного множества неотрицателен. Это разбиение дает противоречие.

3. *Покажем, что даже $y - x > 2(b - a)$.* Пусть это не так. Выделим такое множество $B_0 \subset C_B$, что $|B_0| = x + b - a$.

Такое множество B_0 существует в силу уже доказанного неравенства $y - x > b - a$. Далее выделим такое множество $B_2 \subset B \setminus (C_B \cup H)$, что $|B_2| = b - a - |C_B \setminus B_0|$.

Заметим, что $0 \leq b - a - |C_B \setminus B_0| \leq b - a$. Первое неравенство получается из предположения о том, что $y - x \leq 2(b - a)$, а второе неравенство очевидно. Существование такого множества B_2 объясняется тем, что мы имеем $y > b - a$. Тогда B -часть любой компоненты связности без циклов графа $G'(D)$ имеет не менее $b - a$ вершин, а по части 2 существует еще хотя бы одна такая компонента, кроме C , из которой и можно набрать B_2 . Пусть

$$B_1 = B_2 \cup (C_B \setminus B_0).$$

Заметим, что по построению получилось $|B_1| = b - a$.

Итак, множества построены. Теперь рассмотрим тройку:

$$((A_2 \cup B_0) \setminus C_A, (B \cup C_A) \setminus (B_0 \cup B_1), A_1 \cup B_1).$$

Покажем, что эта тройка является $(a + (b - a), a - (b - a), b)$ -разбиением. Поскольку $C = C_A \cup C_B$ является компонентой связности графа G' , множество $(A_2 \cup C_B) \setminus C_A$ является независимым множеством графа G' , то есть, кликой графа G . Поскольку $B_0 \subset C_B$, множество $(A_2 \cup B_0) \setminus C_A$ является кликой в графе G (как подмножество клики $(A_2 \cup C_B) \setminus C_A$). Аналогично $(B \cup C_A) \setminus C_B$ является кликой в графе G , а поскольку $C_B \subset B_0 \cup B_1$, множество $(B \cup C_A) \setminus (B_0 \cup B_1)$ будет кликой в графе G как подмножество клики $(B \cup C_A) \setminus C_B$. Равенства

$$\begin{aligned} |(A_2 \cup B_0) \setminus C_A| &= a + (x + b - a) - x = b, \\ |A_1 \cup B_1| &= a + b - a = b \end{aligned}$$

видны исходя из размеров выбранных множеств. Условие

$$|(B \cup C_A) \setminus (B_0 \cup B_1)| = a - (b - a)$$

получается автоматически из соображений сохранения общего количества вершин. При этом $a - (b - a) \geq 0$, так как размер явно построенного множества неотрицателен. Значит, такое разбиение дает противоречие.

Из того, что $y - x > 2(b - a)$, легко следует, что $y \geq 2(b - a + 1)$. Таким образом, мы получили, что B -части компонент связности графа $G'(D)$, являющихся деревьями, имеют размер хотя бы $2(b - a + 1)$. Отметим, что таких компонент хотя бы $b - a + 1$ по части 2. Осталось вспомнить, что хотя бы одна вершина из части B лежит в H , так как H непусто. Итого,

$$|B| \geq 2(b - a + 1)^2 + 1.$$

Противоречие. \square

Доказательство теоремы. Разобьем вершины графа G на клики размера не более k так, чтобы суммарное число ребер в этих кликах было максимальным. Покажем, что данное разбиение удовлетворяет требованиям теоремы.

Лемма 2. Пусть A – клика разбиения. Тогда

$$e_G(A, V(G) \setminus A) \geq \frac{k-1}{k} |A| |V(G) \setminus A|.$$

Доказательство. Пусть $a \in A$ – произвольная вершина. Покажем, что количество ребер, исходящих из a в $V(G) \setminus A$, не меньше, чем $\frac{k-1}{k} |V(G) \setminus A|$. Действительно, для этого надо проверить неравенство

$$\frac{k-1}{k} n - (|A| - 1) \geq \frac{k-1}{k} (n - |A|), \quad (1)$$

которое эквивалентно следующему:

$$|A| - 1 \leq \frac{k-1}{k} |A|.$$

Последнее неравенство верно, так как $|A| \leq k$.

Просуммировав неравенство (1) по всем $a \in A$, получим, что

$$e_G(A, V(G) \setminus A) \geq \frac{k-1}{k} |A| |V(G) \setminus A|. \quad \square$$

Лемма 3. Пусть A_1 и A_2 – клики разбиения размеров $k_1 \leq k_2 < k$ соответственно. Тогда $e_G(A_1, A_2) < \frac{k-1}{k} k_1 k_2$.

Доказательство. От противного. Пусть между кликами A_1 и A_2 хотя бы $k_1 k_2 \frac{k-1}{k}$ ребер. Тогда антиребер между ними не более $\frac{k_1 k_2}{k} < k_1$. Значит, есть вершина $v \in A_1$, смежная со всеми вершинами из A_2 . Тогда заменим клики A_1 и A_2 на клики $(A_1 \setminus \{v\})$ и $(A_2 \cup \{v\})$, отчего количество ребер в кликах строго увеличится, противоречие. \square

Пусть есть $k_0 < k$ такое, что клика размера k_0 встречается дважды. Назовем эти клики A_1 и A_2 . Для каждой клики разбиения B , отличной от A_1 и A_2 , определим следующую величину:

$$\phi(B) = \frac{e_G(A_1 \cup A_2, B)}{2k_0|B|}.$$

Пусть B – произвольная клика разбиения, отличная от A_1 и A_2 , размер которой строго меньше, чем k . Применим лемму 3 к паре клик A_1 и B и к паре клик A_2 и B . Полученные неравенства сложим и получим, что $\phi(B) \leq \frac{k-1}{k}$.

Предположим, что $\phi(B)$ также не больше $\frac{k-1}{k}$ и для клик размера k . Тогда получим, что $e_G(A_1 \cup A_2, M) \leq \frac{k-1}{k} |A_1 \cup A_2| |M|$ для всех отличных от A_1 и A_2 клик M . Просуммировав по M , получим, что

$$e_G(A_1 \cup A_2, V(G) \setminus (A_1 \cup A_2)) \leq \frac{k-1}{k} |A_1 \cup A_2| |V(G) \setminus (A_1 \cup A_2)|.$$

Значит, для одного из $i \in \{1, 2\}$ будет верно, что

$$e_G(A_i, V(G) \setminus (A_1 \cup A_2)) \leq \frac{k-1}{k} |A_i| |V(G) \setminus (A_1 \cup A_2)|. \quad (2)$$

Однако, по лемме 2 справедливо неравенство

$$e_G(A_i, V(G) \setminus A_i) \geq \frac{k-1}{k} |A_i| |V(G) \setminus A_i|. \quad (3)$$

Вычтя из неравенства (3) неравенство (2), получаем

$$e_G(A_1, A_2) \geq \frac{k-1}{k} |A_1| |A_2|,$$

что противоречит лемме 3.

Итак, на данный момент в предположении существования двух клик A_1, A_2 размера $k_0 < k$ мы вывели существование такой клики B размера k , что $e_G(A_1 \cup A_2, B) > 2k k_0 \frac{k-1}{k}$.

Найденная ситуация (клики A_1 , A_2 и B) в точности соответствует лемме 1: $a = k_0 < b = k$. Условие $k \leq 2(b - a + 1)^2$ верно, поскольку $b - a \geq 1$, а $k \leq 8$ по условию. Осталось определить граф G' , как в лемме 1, и оценить количество его ребер:

$$e(G') = 2kk_0 - e_G(A_1 \cup A_2, B) < 2kk_0 - 2kk_0 \frac{k-1}{k} = 2k_0 = 2a.$$

Заменяя строгое неравенство на нестрогое, получаем в точности условие леммы 1. Тогда по лемме 1 существует $(a + c, a - c, b)$ -разбиение. Заменяя клики размеров a , a и b на клики размеров $a + c$, $a - c$ и b , мы можем строго увеличить число ребер внутри клик разбиения:

$$\frac{(a+c)(a+c-1)}{2} + \frac{(a-c)(a-c-1)}{2} = a^2 - a + c^2 > a^2 - a = 2 \frac{a(a-1)}{2}$$

противоречие. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Szemerédi, G. Sárközy, J. Komlós, *Proof of the Seymour conjecture for large graphs*. — Ann. Comb. **2**, no. 1 (1998), 43–60.
2. E. Szemerédi, A. Hajnal, *Proof of a conjecture of P. Erdős*. — Combinatorial theory and its applications, II (Proc. Colloq., Balatonfüred, 1969), pp. 601–623. North-Holland, Amsterdam, 1970.

Savenkov K. S. Almost regular partition of a graph.

Let $k \leq 8$ be a positive integer and G be a graph on n vertices such that each vertex degree of G is at least $\frac{k-1}{k}n$. It is proved in the paper that the vertex set of G can be partitioned into several cliques of size at most k , such that for each positive integer $k_0 < k$ there is at most one clique of size k_0 in this partition.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ostrich@flyingsteps.org

Поступило 7 ноября 2014 г.