В. Н. Четвериков, Плоские управляемые системы с запаздыванием, *Дифференц. уравнения*, 2005, том 41, номер 12, 1667–1674

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 12, с. 1667–1674

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929

ПЛОСКИЕ УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2005 г. **В. Н. Четвериков**

Понятие плоскостности введено в теорию управления в работе [1], в которой разработан метод динамической обратной связи для решения задач управления плоскими динамическими системами. Оказалось, что многие нелинейные управляемые системы из различных областей техники являются плоскими и задачи управления для них решаются этим методом (см. приведенную в [1] библиографию). Были также получены [2, 3] условия плоскостности и предложен метод вычисления плоского выхода, который в некоторых случаях оказывается эффективным.

В настоящей работе мы распространяем понятие плоскостности на случай систем с запаздыванием. При этом используем замечание Флисса [4] о том, что плоский выход в данном случае может зависеть не только от значений переменных "в прошлом", но и от значений переменных "в будущем" (поэтому множество $\mathcal{G}$, введенное ниже, состоит как из положительных, так и из отрицательных чисел). Мы показываем, как решаются задачи терминального управления и стабилизации для плоских систем с запаздыванием. Доказываем теорему 1 о связи автономных плоских систем с запаздыванием и плоских динамических систем. Используя эту теорему, находим плоский выход системы с запаздыванием, описывающей модель дизельного двигателя, рассмотренной в [5]. Показываем, как решается задача стабилизации для этой системы. Строим бесконечномерную геометрическую модель систем с запаздыванием в духе [6] и доказываем с ее помощью сформулированные теоремы.

Определение. Мы исследуем системы с управлением вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), x(t-a_1), u(t-a_1), \ldots, x(t-a_r), u(t-a_r)), \tag{1}$$

где f – гладкая векторная функция (под гладкостью здесь и далее понимаем бесконечную дифференцируемость), $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ – *состояние системы*, $u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ – *ее управление или вход*, $a_1, \ldots, a_r$ – действительные положительные постоянные. Уравнения вида (1) называются *дифференциально-разностными запаздывающего типа* (подробнее см. в [7]).

Для произвольных функции g от t и действительного числа a обозначим через g_a функцию $g_a(t) = g(t-a)$ (например, $x_{i,a}(t) = x_i(t-a)$), через $g^{(l)}$ производную порядка $l \geq 0$ по t, а через $\mathcal{G}$ множество чисел вида $i_1a_1 + \ldots + i_ra_r$, где $i_1, \ldots, i_r$ – произвольные целые. Множество $\mathcal{G}$ представляет собой подгруппу аддитивной группы $\mathbb{R}$, порожденную элементами $a_1, \ldots, a_r$.

Система (1) называется *плоской*, если существуют функции $h_1, \ldots,\ h_\rho$, зависящие от конечного набора функций вида $t, x_{i,a}$ и $u_{j,a}^{(l)}$, $a \in \mathcal{G}$, и удовлетворяющие следующим двум условиям. Во-первых, функции x и u выражаются через конечный набор функций вида t, $h_{s,a}^{(l)}$, где $a \in \mathcal{G}$ и производная по t берется с учетом (1). Во-вторых, любой конечный набор функций вида t, $h_{s,a}^{(l)}$, $a \in \mathcal{G}$, с учетом (1) функционально независим. Набор $(h_1, \ldots, h_\rho)$, удовлетворяющий указанным условиям, называется *плоским выходом* системы (1) (аналог плоских координат в геометрии). Если система (1) не имеет запаздывающих переменных, то $\mathcal{G} = \{0\}$, и мы получаем известное [1] определение плоской динамической системы с управлением.

Рассмотрим систему уравнений, получающуюся из системы (1) заменой $x(t-a_i)$ и $u(t-a_i)$ для $i = 1, \ldots, r$ на $x(t)$ и $u(t)$ соответственно, т.е. динамическую систему с управлением

$$\dot{x} = f(t, x, u, \ldots, x, u). \tag{2}$$

Для функции h, зависящей от t и конечного набора переменных $x_{i,a}$, $u_{j,a}^{(l)}$, $a \in \mathcal{G}$, через $\check{h}$ обозначим функцию, получающуюся из h заменой $x_{i,a}$, $u_{j,a}^{(l)}$ для любого $a \in \mathcal{G}$ на x_i, $u_j^{(l)}$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть система (1) автономная или ее правая часть периодическая по t и любое число $a_1, \ldots, a_r$ является ее периодом. Если, кроме того, система (1) плоская с плоским выходом $(h_1, \ldots, h_\rho)$, то система (2) также плоская и $(\check{h}_1, \ldots, \check{h}_\rho)$ – ее плоский выход.*

Пример. В работе [5] система, описывающая модель дизельного двигателя, сведена к системе

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_3) - kx_1 + kx_{1,a} + f_2(x_2) - \frac{1}{\tau\lambda(x_2)}x_3 - \frac{1}{k_2}u_1 - \frac{1}{\lambda(x_2)}u_2, \quad \dot{x}_2 = u_1, \quad \dot{x}_3 = u_2, \quad (3)$$

где $a > 0$, k, k_2, τ – заданные постоянные, $f_1(x_1, x_3)$, $f_2(x_2)$, $\lambda(x_2)$ – заданные функции. Используя методы исследования на плоскостность динамических систем (см. [2]), выясняем, что соответствующая система (2) является плоской. Замечаем, что если последняя система имеет плоский выход с функцией $h_1 = x_1$, то система (3) также плоская с тем же плоским выходом. Такой выход существует: достаточно положить $h_2 = k_2x_3 + \int \lambda(x_2)\,dx_2$. То, что система (3) плоская с плоским выходом (h_1, h_2), можно получить и непосредственной выкладкой. Действительно, функции x_1, x_2, x_3 выражаются через h_1, h_2, $\dot{h}_1$, $\dot{h}_2$, а $u_1 = \dot{x}_2$, $u_2 = \dot{x}_3$.

Решение задачи терминального управления. Зависимость состояния $x(t)$ от времени при $t > t_н$ однозначно определяется зависимостью от времени управления $u(t)$ при $t \geq t_н - a_u$ и состояния $x(t)$ при $t \in [t_н - a_x, t_н]$, где a_u и a_x – максимальные среди тех чисел a_i, $i = \overline{1, r}$, которые входят в правую часть системы (1) в виде $u(t - a_i)$ и $x(t - a_i)$ соответственно. Этот факт следует из теоремы существования и единственности решений (см. [7]) для системы, которая получается из системы (1) подстановкой заданной функции $u(t)$.

Предположим, заданы функции $x_н(t)$ и $u_н(t)$ при $t \in [t_н - a_0, t_н]$ и конечное состояния $x_к$ системы в конечный момент времени $t_к$. *Задача терминального управления* заключается в поиске такой зависимости управления $u(t)$ от времени $t \in (t_н, t_к]$, для которой соответствующая зависимость состояния $x(t)$ с *начальными условиями* $x(t) = x_н(t)$ и $u(t) = u_н(t)$ при $t \in [t_н - a_0, t_н]$ удовлетворяет также *конечному условию* $x(t_к) = x_к$.

Замечание. Возможны другие варианты формулировки задачи терминального управления. Например, конечное условие может задаваться на отрезке, а не в точке. Кроме того, если решения системы определяются функцией состояний $x(t)$, начальные условия можно задавать только на $x(t)$. Любая задача теории управления плоской системой может решаться путем переформулировки ее на языке плоского выхода, решении этой новой задачи, а затем переход к переменным x, u.

Из плоскостности системы следует возможность выразить переменные $x_1, \ldots, x_n$ и $u_1, \ldots, u_m$ через t, $h_{s,a}^{(l)}$. Пусть b_1 – минимальное среди тех чисел a, которые входят в эти выражения в виде $h_{s,a}^{(l)}$ для некоторых l, s. Заметим, что функции $h_{1,b_1}, \ldots, h_{\rho,b_1}$ также образуют плоский выход системы. В дальнейшем будем использовать именно этот плоский выход, который по-прежнему будем обозначать через $(h_1, \ldots, h_\rho)$, полагая $b_1 = 0$. Учитывая выражения x и u через t, $h_{s,a}^{(l)}$, $a \geq 0$, переписываем начальные условия в виде

$$x(t, h_{s,a}^{(l)}) = x_н(t), \quad u(t, h_{s,a}^{(l)}) = u_н(t), \quad t \in (t_н - a_0, t_н]. \quad (4)$$

Будем понимать условия (4) как систему уравнений относительно $h_1(t), \ldots, h_\rho(t)$ при $t \leq t_н$.

В следующей теореме под решением общего положения понимаем решение, в окрестности которого имеют постоянный ранг конечное число матриц производных, рассматриваемых в процессе получения системы (5) (см. доказательство теоремы 2). Определение окрестности решения будет дано ниже.

Теорема 2. *Пусть система (1) плоская с плоским выходом $(h_1, \ldots, h_\rho)$, а функции $x_н(t)$ и $u_н(t)$ удовлетворяют уравнениям системы (1) при тех t, для которых определены обе* *части соответствующего уравнения. Тогда существуют такие числа* $b_2,\ldots,b_\varkappa$ *из* $\mathcal{G}$, *что* $b_1=0<b_2<\ldots<b_\varkappa<b_{\varkappa+1}=a_0$, *и для каждого* $k=\varkappa,\ldots,1$ *в окрестности решения общего положения те уравнения системы (4), которые представляют собой условие на функции* $h_1(t),\ldots,h_\rho(t)$ *на полуинтервале* $(t_0-b_{k+1},t_0-b_k]$, *эквивалентны уравнениям вида*

$$h_{s_\alpha}^{(l_{k,\alpha})}=F_{k,\alpha}(t,\bar h_k,\tilde h_a),\quad \alpha=\overline{1,\rho_k}, \tag{5}$$

где $\rho_{k-1}\le\rho_k\le\rho$, $l_{k-1,\alpha}\ge l_{k,\alpha}$, $\bar h_k$ *– конечный набор переменных вида* $h_{s_\alpha}^{(l)}$, $\alpha=\overline{1,\rho_k}$, $0\le l<l_{k,\alpha}$, *и* $h_s^{(l)}$, $s\ne s_1,\ldots,s_{\rho_k}$, $l\ge 0$, $\tilde h_a$ *– конечный набор переменных вида* $h_{s,a}^{(l)}$, *а индекс* a *принимает конечное число положительных значений* $\mathcal{G}$.

Теорема 2 обосновывает теоретически следующий метод решения задачи терминального управления плоской системой в случае, когда $t_{\text{н}}-b_1<t_{\text{к}}-b_\varkappa$. На первом этапе решения последовательно на полуинтервалах $(t_{\text{н}}-a_0,t_{\text{н}}-b_\varkappa]$, $(t_{\text{н}}-b_\varkappa,t_{\text{н}}-b_{\varkappa-1}]$, $\ldots$, $(t_{\text{н}}-b_2,t_{\text{н}}]$ ищем функции $h_1(t)$, $\ldots$, $h_\rho(t)$, удовлетворяющие начальным условиям. На каждом полуинтервале мы решаем систему (5) с начальными условиями, которые произвольны для первой системы ($k=\varkappa$) и определяются решениями предыдущих для последующих систем ($k<\varkappa$).

На втором этапе решения учитываются конечные условия, которые переписываются в виде

$$x(t_{\text{к}},h_s^{(l)}(t_{\text{к}}-a))=x_{\text{к}}, \tag{6}$$

где a принимает значения $b_1,\ldots,b_\varkappa$. Для решения этой системы выбираем переменные $h_{s_\alpha}^{(l_\alpha)}(t_{\text{к}}-b_{k_\alpha})$, $\alpha=\overline{1,n}$, так, чтобы была невырожденной матрица $(\partial x_\beta/\partial(h_{s_\alpha}^{(l_\alpha)}(t_{\text{к}}-b_{k_\alpha})))$, $\alpha,\beta=\overline{1,n}$. Задаем произвольным образом оставшиеся переменные вида $h_s^{(l)}(t_{\text{к}}-b_k)$, входящие в систему (6). Тогда значения $h_{s_\alpha}^{(l_\alpha)}(t_{\text{к}}-b_{k_\alpha}),\alpha=1,\ldots,n$, однозначно находятся из системы (6). После этого задача поиска $h_s(t)$ при $t>t_{\text{н}}-b_\varkappa$, $s=\overline{1,\rho}$, сводится к обычной задаче интерполяции: найти функцию $h_s(t)$ в интервале $(t_{\text{н}}-b_1,t_{\text{к}}-b_1)$, если известны некоторые ее значения и некоторые ее производные в точках $t_{\text{н}}-b_1,t_{\text{к}}-b_\varkappa,\ldots,t_{\text{к}}-b_1$. Решая задачу интерполяции, находим $h_1(t),\ldots,h_\rho(t)$. Так как система (1) плоская, то функции $u_1(t),\ldots,u_m(t)$ выражаются через конечный набор функций $t,h_s^{(l)}(t-a)$, $a\in\mathcal{G}$. Тем самым мы получаем решение поставленной задачи терминального управления.

Заметим, что если по условию задачи решение должно быть заданного класса гладкости, то каждый раз, когда мы задаем какие-либо функции произвольным образом, их следует выбирать как гладкое продолжение заданных в этот момент значений.

Решение задачи стабилизации. Пусть $(x_*(t),u_*(t))$ – некоторое решение системы (1), a_0 – фиксированный положительный элемент $\mathcal{G}$. Для функции y, определенной в полуинтервале $(t-a_0,t]$, обозначим через y_t функцию $y_t(\theta)=y(t+\theta)$, $\theta\in(-a_0,0]$. *Задача стабилизации* заключается в поиске такого функционала $u=B(t,x)$, зависящего от t и отображающего n-векторную функцию $x(\theta)$ в m-векторную функцию $u(\theta)$, $\theta\in(-a_0,0]$, что $x=x_*(t)$ есть устойчивое решение системы функционально-дифференциальных уравнений

$$\dot x(t)=f(t,x(t),B(t,x_t),x(t-a_1),B(t-a_1,x_{t-a_1}),\ldots). \tag{7}$$

Покажем, как строится функционал $B(t,x)$ в случае плоской системы (1). Рассмотрим выражения переменных $x_1,\ldots,x_n$ и $u_1,\ldots,u_m$ через t, $h_{s,a}^{(l)}$, где $a=b_1,\ldots,b_\varkappa$, $b_1<\ldots<b_\varkappa$, а $(h_1,\ldots,h_\rho)$ – такой плоский выход системы, что $b_1=0$ (см. выбор h_i в предыдущем пункте). Обозначим через μ максимальное число l, входящее в эти формулы. Пусть $h_*(t)$ – значение плоского выхода на заданном решении $(x_*(t),u_*(t))$ системы (1). Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$e_s^{(\mu)}=\sum_{j=0}^{\mu-1}\gamma_{s,j}e_s^{(j)},\quad s=\overline{1,\rho},$$

где постоянные коэффициенты $\gamma_{s,j}$ подобраны так, чтобы система была асимптотически устойчивой. Тогда функции $h_{s,b_k} = h_{*,s}(t-b_k)$ образуют асимптотически устойчивое решение системы

$$h^{(\mu)}_{s,b_k} = h^{(\mu)}_{*,s}(t-b_k) + \sum_{j=0}^{\mu-1} \gamma_{s,j}(h^{(j)}_{s,b_k} - h^{(j)}_{*,s}(t-b_k)), \tag{8}$$

где $s = \overline{1,\rho}$, $k = \overline{1,\varkappa}$, а переменные h_{s,b_k} считаются никак несвязанными между собой.

Заметим, что переменные состояния $x_1, \ldots, x_n$ не зависят от $h^{(\mu)}_{s,b_k}$, иначе левая часть системы (1) зависела бы от $h^{(\mu+1)}_{s,b_k}$, а правая нет. Выберем функции ξ_α, $\alpha = \overline{1, \mu\rho\varkappa - n}$, переменных t, $h^{(l)}_{s,b_k}$, $l = \overline{0,\mu-1}$, $s = \overline{1,\rho}$, $k = \overline{1,\varkappa}$, так, чтобы была невырожденной матрица Якоби $\partial(\xi_\alpha, x_i)/\partial h^{(l)}_{s,b_k}$. Тогда от переменных t, $h^{(l)}_{s,b_k}$ мы можем переходить к переменным t, x, ξ. Производная $\dot{\xi}_\alpha$ в силу системы (8) функции ξ_α зависит от t, $h^{(l)}_{s,b_k}$, а значит, переходя к переменным t, x, ξ, получаем систему уравнений

$$\dot{\xi} = B(t, x, \xi). \tag{9}$$

Кроме того, выразим переменные управления через t, $h^{(l)}_{s,a}$. В этих выражениях переменные $h^{(\mu)}_{s,b_k}$ заменим выражениями (8), а затем переменные $h^{(l)}_{s,b_k}$, $l < \mu$, – переменными ξ_α, x_i. В результате получим

$$u = U(t, x, \xi). \tag{10}$$

Значение функционала $B(t_0, x_{t_0})$ на заданной функции $x(t)$, $t \in [t_0 - a_0, t_0]$, построим следующим образом. Обозначим через $\xi = \xi_*(t)$ векторную функцию, соответствующую решению $h_{s,b_k} = h_{*,s}(t-b_k)$. Решаем систему (9) на отрезке $[t_0 - a_0, t_0]$, полагая $\xi(t_0 - a_0)$ равным $\xi_*(t_{\text{н}} - a_0)$ при $t_0 = t_{\text{н}}$ и равным ранее полученному значению ξ в точке $t_0 - a_0$ при $t_0 > t_{\text{н}}$. Найденное решение $\xi(t)$, $t \in [t_0 - a_0, t_0]$, вместе с $x(t)$ подставляем в (10) и полагаем $B(t_0, x_{t_0}) = u$.

Теорема 3. *Система (7), где функционал $B(t,x)$ строится указанным способом, имеет асимптотически устойчивое решение $x = x_*(t)$.*

Пример. Для найденного плоского выхода системы (3) имеем $\mu = 2$, $\varkappa = 1$. Полагаем $\xi = \dot{h}_2$, $\gamma_{s,1} = -2$, $\gamma_{s,0} = -1$ для $s = 1, 2$ и получаем

$$u_1 = \frac{k_2 g_1 - \xi g_2}{k_2 g_3 - \lambda g_2}, \quad u_2 = \frac{\xi g_3 - \lambda g_1}{k_2 g_3 - \lambda g_2},$$
$$\dot{\xi} = -2\xi - k_2 x_3 - \int \lambda(x_2)\, dx_2, \tag{11}$$

где

$$g_1 = (k - 2 - f'_{1,x_1}) g_4 - k g_{4,a} - x_1 - \left(2\xi + k_2 x_3 + \int \lambda(x_2)\, dx_2\right) \Big/ (k_2 \lambda),$$

$$g_2 = f'_{1,x_3} - \frac{1}{\tau\lambda}, \quad g_3 = \frac{\xi\lambda'}{k_2\lambda^2} + f'_2 + \frac{x_3\lambda'}{\tau\lambda^2}, \quad g_4 = f_1 - kx_1 + kx_{1,a} + f_2 - \frac{x_3}{\tau\lambda} - \frac{\xi}{k_2\lambda}.$$

Интегрируя систему (11), функционал B можно представить в интегральной форме.

Геометрическая модель систем с запаздыванием. С системой (1) свяжем бесконечномерное пространство $\mathbb{R}^\infty$ с координатами

$$t, \quad x_{i,a}, \quad u^{(l)}_{j,a}, \quad i = \overline{1,n}, \quad s = \overline{1,m}, \quad l = 0, 1, \ldots, \quad a \in \mathcal{G}, \tag{12}$$

где координаты $x_{i,a}$ и $u^{(0)}_{j,a}$ соответствуют функциям $x_i(t-a)$ и $u_i(t-a)$, а координаты $u^{(l)}_{j,a}$ – производным $d^l u_j(t-a)/dt^l$, $l > 0$. Область в $\mathbb{R}^\infty$, где определена система (1), обозначим через $\mathcal{E}^\infty$.

Каждое решение $s(t) = (X(t), U(t))$ системы (1) задает кривую в области $\mathcal{E}^\infty$:

$$x_{i,a} = X_i(t-a), \quad u_{j,a}^{(l)} = \frac{\partial^l U_j(t-a)}{\partial t^l} \quad \forall i, j, l, a,$$

которая называется *графиком* этого решения в $\mathcal{E}^\infty$. Под *окрестностью решения* $s(t)$ понимаем окрестность его графика. В частности, такой окрестностью является подмножество точек с координатами (12), удовлетворяющими системе неравенств

$$|x_{i,a} - X_i(t-a)| < \varepsilon, \quad |u_{j,a}^{(l)} - U_j^{(l)}(t-a)| < \varepsilon,$$

где $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, l и $a \in \mathcal{G}$ принимают конечное число значений, а ε – положительное действительное число.

На множестве $\mathcal{E}^\infty$ вводится структура бесконечномерного гладкого многообразия. Это означает определение на $\mathcal{E}^\infty$ обычных гладких понятий: гладких функций, векторных полей, дифференциальных форм и т.д. А именно *гладкой функцией на* $\mathcal{E}^\infty$ называется функция, гладким образом зависящая от конечного (но произвольного) набора переменных (12). Алгебра гладких функций на $\mathcal{E}^\infty$ обозначается через $\mathcal{F}(\mathcal{E})$. Любое дифференцирование этой алгебры называется *векторным полем на* $\mathcal{E}^\infty$ и представляет собой сумму (в общем случае бесконечную) вида

$$g_0 \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{a \in \mathcal{G}} g_{i,a} \frac{\partial}{\partial x_{i,a}} + \sum_{s=1}^{m} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{a \in \mathcal{G}} g_{s,a}^l \frac{\partial}{\partial u_{s,a}^{(l)}},$$

где g_0, $g_{i,a}$, $g_{s,a}^l$ – некоторые гладкие функции на $\mathcal{E}^\infty$. Множество векторных полей на $\mathcal{E}^\infty$ является модулем над алгеброй $\mathcal{F}(\mathcal{E})$.

Дифференциальной 1-формой на $\mathcal{E}^\infty$ называется 1-форма, зависящая от конечного набора переменных (12), т.е. сумма

$$g_0 dt + \sum_{i=1}^{n} \sum_{a \in \mathcal{G}} g_{i,a} dx_{i,a} + \sum_{s=1}^{m} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{a \in \mathcal{G}} g_{s,a}^l du_{s,a}^{(l)},$$

где только конечное число функций $g_0, g_{i,a}, g_{s,a}^l \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$ отлично от нулевой функции. Алгебра $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ и модули векторных полей и дифференциальных 1-форм на $\mathcal{E}^\infty$ связаны обычными алгебраическими операциями. В частности, производную Ли функции g (1-формы ω) вдоль векторного поля X будем обозначать через Xg (соответственно через $X\omega$).

Для любого $b \in \mathcal{G}$ рассмотрим отображение $\delta_b : \mathcal{E}^\infty \to \mathcal{E}^\infty$, переводящее точку с координатами (12) в точку с координатами $\tilde{t} = t - b$, $\tilde{x}_{i,a} = x_{i,a+b}$, $\tilde{u}_{s,a}^{(l)} = u_{s,a+b}^{(l)}$. Это отображение *гладкое* в том смысле, что любая гладкая функция g на $\mathcal{E}^\infty$ отображается в гладкую функцию $\delta_b^*(g) = g \circ \delta_b$. Представляя правые части уравнений системы (1) как функции f_i на $\mathcal{E}^\infty$, рассмотрим векторное поле

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{a \in \mathcal{G}} \delta_a^*(f_i) \frac{\partial}{\partial x_{i,a}} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{a \in \mathcal{G}} u_{j,a}^{(l+1)} \frac{\partial}{\partial u_{j,a}^{(l)}},$$

которое называется *полной производной по* t *на* $\mathcal{E}^\infty$. Производная по t с учетом (1) совпадает с производной Ли вдоль D.

Графики решений в $\mathcal{E}^\infty$ совпадают с фазовыми кривыми поля D, инвариантными относительно любого отображения δ_a, $a \in \mathcal{G}$ (см. [6, гл. 6, утверждение 6.10]). Поэтому бесконечномерное многообразие $\mathcal{E}^\infty$, определенное на нем поле D и отображения δ_a, $a \in \mathcal{G}$, однозначно определяют систему (1) и ее решения. Многообразие $\mathcal{E}^\infty$ вместе с полем D и отображениями δ_a, $a \in \mathcal{G}$, называется *диффеотопом* (или *бесконечным продолжением*) системы (1).

Геометрическая интерпретация плоскостности. Пусть $\varphi \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$. Формы на $\mathcal{E}^\infty$ вида $d_\mathcal{C}\varphi = d\varphi - D\varphi\, dt$ называются *формами Картана на* множестве $\mathcal{E}^\infty$, а $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ – модуль $\mathcal{C}^1\Lambda(\mathcal{E})$, порожденный формами $d_\mathcal{C}\varphi$, $\varphi \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$, – *модулем Картана на* $\mathcal{E}^\infty$. Дифференциально-разностный оператор вида

$$\Delta = \sum_{l\ge 0}\sum_{a\in\mathcal{G}} g_{l,a} D^l \circ \delta_a^*,$$

где только конечное число функций $g_{l,a} \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$ отлично от нулевой функции, называется $\mathcal{C}$*-дифференциальным оператором* на $\mathcal{E}^\infty$. Множество таких операторов будем обозначать через $\mathcal{C}\,\mathrm{Diff}(\mathcal{E})$. Это множество замкнуто относительно операций сложения и композиции, а умножение на константу можно понимать как простейший $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор. Поэтому $\mathcal{C}\,\mathrm{Diff}(\mathcal{E})$ образует $\mathbb{R}$-алгебру относительно указанных операций.

Операторы δ_a^* и D коммутируют между собой, а также с отображением $d_\mathcal{C}$. Поэтому $\mathcal{C}$-дифференциальные операторы отображают множество $\mathcal{C}^1\Lambda(\mathcal{E})$ в себя. Это позволяет ввести на $\mathcal{C}^1\Lambda(\mathcal{E})$ модульную структуру над $\mathcal{C}\,\mathrm{Diff}(\mathcal{E})$, а именно: результат умножения формы $\omega \in \mathcal{C}^1\Lambda(\mathcal{E})$ на оператор $\Delta \in \mathcal{C}\,\mathrm{Diff}(\mathcal{E})$ есть $\Delta(\omega)$.

Матрица, состоящая из $\mathcal{C}$-дифференциальных операторов, определяет естественным образом оператор на множестве столбцов дифференциальных форм из $\mathcal{C}^1\Lambda(\mathcal{E})$. Такой оператор мы называем *матричным* $\mathcal{C}$*-дифференциальным оператором.*

Теорема 4. *Система (1) плоская с плоским выходом* $(h_1,\ldots,h_\rho)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{C}^1\Lambda(\mathcal{E})$ *– свободный* $\mathcal{C}\,\mathrm{Diff}(\mathcal{E})$*-модуль с базисом* $d_\mathcal{C}h_1,\ldots,d_\mathcal{C}h_\rho$.

Доказательство. Заметим, что если F есть функция от $t,\varphi_1,\ldots,\varphi_s$, то

$$d_\mathcal{C}F = \frac{\partial F}{\partial\varphi_1}d_\mathcal{C}\varphi_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial\varphi_s}d_\mathcal{C}\varphi_s. \tag{13}$$

Кроме того, операторы D, δ_a^* коммутируют с отображением $d_\mathcal{C}$. Поэтому если x_i и u_j есть функции от t, $\delta_a^*(h_s^{(l)})$ для некоторых a, l, s, то формы $d_\mathcal{C}x_i$, $d_\mathcal{C}u_j$ представляются в виде $\mathcal{C}\,\mathrm{Diff}(\mathcal{E})$-линейных комбинаций форм $d_\mathcal{C}h_1,\ldots,d_\mathcal{C}h_\rho$. А так как формы $d_\mathcal{C}x_i, d_\mathcal{C}u_j$ порождают $\mathcal{C}\,\mathrm{Diff}(\mathcal{E})$-модуль $\mathcal{C}^1\Lambda(\mathcal{E})$, то это же верно для любых форм из $\mathcal{C}^1\Lambda(\mathcal{E})$.

Если формы $d_\mathcal{C}h_1,\ldots,d_\mathcal{C}h_\rho$ линейно зависимы над $\mathcal{C}\,\mathrm{Diff}(\mathcal{E})$, то

$$0 = \sum_{l\ge 0,\ a\in\mathcal{G}} g_{s,l,a}(D^l \circ \delta_a^*)(d_\mathcal{C}h_s),$$

где конечное число функций $g_{s,l,a} \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$ отлично от нуля. Пусть в рассматриваемой точке многообразия $\mathcal{E}^\infty$ функция g_{s_0,l_0,a_0} не равна нулю. Тогда в окрестности этой точки форма $d_\mathcal{C}(D^{l_0}\circ\delta_{a_0}^*)(h_{s_0})$ представляется в виде конечной $\mathcal{F}(\mathcal{E})$-линейной комбинации остальных форм вида $d_\mathcal{C}(D^l\circ\delta_a^*)(h_s)$. Из формулы (13) следует, что функция $(D^{l_0}\circ\delta_{a_0}^*)(h_{s_0})$ выражается через функции вида t, $(D^l\circ\delta_a^*)(h_s)$. А это противоречит тому, что $(h_1,\ldots,h_\rho)$ – плоский выход. Обратное утверждение доказывается аналогично.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим подмногообразие $\mathcal{E}_0^\infty$ диффеотопа $\mathcal{E}^\infty$ системы (1), заданное системой равенств

$$x_{i,a} - x_{i,0} = 0, \quad u_{j,a}^{(l)} - u_{j,0}^{(l)} = 0, \tag{14}$$

где индексы i, j, l, a принимают все возможные значения (см. (12)), но $a \ne 0$. Если правая часть f системы (1) периодична по t и любое число $a_1,\ldots,a_r$ является ее периодом, то и любое $a \in \mathcal{G}$ является ее периодом. В этом и в автономном случае производные левых частей равенств (14) вдоль D равны нулю на $\mathcal{E}_0^\infty$. Поэтому поле D на $\mathcal{E}^\infty$ касается подмногообразия $\mathcal{E}_0^\infty$. А значит, любой $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор на $\mathcal{E}^\infty$ допускает ограничение на $\mathcal{E}_0^\infty$. С другой стороны, на $\mathcal{E}_0^\infty$ вводится система координат $(t, x_{i,0}, u_{j,0}^{(l)})$, которая естественным образом отождествляется с системой координат на диффеотопе $\breve{\mathcal{E}}^\infty$ системы (2). При этом отождествлении ограничение D на $\mathcal{E}_0^\infty$ совпадает с полной производной по t на $\breve{\mathcal{E}}^\infty$. Таким образом, пара $(\mathcal{E}_0^\infty, D|_{\mathcal{E}_0^\infty})$ понимается как диффеотоп системы (2).

Пусть $\bar{h} = (h_1, \ldots, h_\rho)$ – плоский выход системы (1). Из теоремы 4 следует существование таких матричных $\mathcal{C}$-дифференциальных операторов Δ_x и Δ_u, что $d_\mathcal{C}x = \Delta_x(d_\mathcal{C}\bar{h})$, $d_\mathcal{C}u = \Delta_u(d_\mathcal{C}\bar{h})$. Ограничивая на $\breve{\mathcal{E}}^\infty$ левые и правые части полученных равенств, находим аналогичные выражения для 1-форм $d_\mathcal{C}x$, $d_\mathcal{C}u$ на $\breve{\mathcal{E}}^\infty$: $d_\mathcal{C}x = \Delta_x|_{\mathcal{E}_0^\infty}(d_\mathcal{C}\breve{h})$, $d_\mathcal{C}u = \Delta_u|_{\mathcal{E}_0^\infty}(d_\mathcal{C}\breve{h})$, где $\breve{h} = (\breve{h}_1, \ldots, \breve{h}_\rho)$ – ограничение на $\breve{\mathcal{E}}^\infty$ функций $\bar{h} = (h_1, \ldots, h_\rho)$. Таким образом, формы $d_\mathcal{C}\breve{h}_1, \ldots, d_\mathcal{C}\breve{h}_\rho$ порождают $\mathcal{C}\,\mathrm{Diff}(\breve{\mathcal{E}})$-модуль $\mathcal{C}^1\Lambda(\breve{\mathcal{E}})$.

Предположим, эти формы линейно зависимы над $\mathcal{C}\,\mathrm{Diff}(\breve{\mathcal{E}})$, т.е. существует такой ненулевой матричный $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор Δ на $\breve{\mathcal{E}}^\infty$, что $\Delta(d_\mathcal{C}\breve{h}) = 0$. Продолжим каким-либо образом Δ на $\mathcal{E}^\infty$ и обозначим через $\tilde{\Delta}$ соответствующее продолжение. Векторная дифференциальная форма $\tilde{\Delta}(d_\mathcal{C}\bar{h})$ равна нулю на $\breve{\mathcal{E}}^\infty$. Разложив каждую ее компоненту по базису

$$d_\mathcal{C}(x_{i,a} - x_{i,0}), \quad d_\mathcal{C}(u_{j,a}^{(l)} - u_{j,0}^{(l)}), \quad d_\mathcal{C}x_{i,0}, \quad d_\mathcal{C}u_{j,0}^{(l)}$$

$\mathcal{F}(\mathcal{E})$-модуля $\mathcal{C}^1\Lambda(\mathcal{E})$, получим

$$\tilde{\Delta}(d_\mathcal{C}\bar{h}) = \sum_{i,a} \varphi_{i,a} d_\mathcal{C}(x_{i,a} - x_{i,0}) + \sum_{j,l,a} \varphi_{j,l,a} d_\mathcal{C}(u_{j,a}^{(l)} - u_{j,0}^{(l)}) + \sum_i \psi_i d_\mathcal{C}x_{i,0} + \sum_{j,l} \psi_{j,l} d_\mathcal{C}u_{j,0}^{(l)}.$$

Так как форма $\tilde{\Delta}(d_\mathcal{C}\bar{h})$ и формы вида $d_\mathcal{C}(x_{i,a} - x_{i,0})$, $d_\mathcal{C}(u_{j,a}^{(l)} - u_{j,0}^{(l)})$ равны нулю на $\breve{\mathcal{E}}^\infty$, а формы вида $d_\mathcal{C}x_{i,0}$, $d_\mathcal{C}u_{j,0}^{(l)}$ линейно независимы на $\breve{\mathcal{E}}^\infty$, то векторные функции ψ_i, $\psi_{j,l}$ тождественно равны нулю на $\breve{\mathcal{E}}^\infty$ для любых i, j, l. Поскольку формы $d_\mathcal{C}h_1, \ldots, d_\mathcal{C}h_\rho$ образуют базис $\mathcal{C}\,\mathrm{Diff}(\mathcal{E})$-модуля $\mathcal{C}^1\Lambda(\mathcal{E})$, для любого i, j, l существуют такие матричные $\mathcal{C}$-дифференциальные операторы Δ_i, $\Delta_{j,l}$ на $\mathcal{E}^\infty$, что $d_\mathcal{C}x_{i,0} = \Delta_i(d_\mathcal{C}\bar{h})$ и $d_\mathcal{C}u_{j,0}^{(l)} = \Delta_{j,l}(d_\mathcal{C}\bar{h})$. Отсюда получаем равенство $\nabla(d_\mathcal{C}\bar{h}) = 0$, где

$$\nabla = \tilde{\Delta} - \sum_{i,a} \varphi_{i,a}(\delta_a^* - \mathrm{id}) \circ \Delta_i + \sum_{j,l,a} \varphi_{j,l,a}(\delta_a^* - \mathrm{id}) \circ \Delta_{j,l} + \sum_i \psi_i \Delta_i + \sum_{j,l} \psi_{j,l} \Delta_{j,l},$$

а id – тождественный оператор. Из линейной независимости форм $d_\mathcal{C}h_1, \ldots, d_\mathcal{C}h_\rho$ над $\mathcal{C}\,\mathrm{Diff}(\mathcal{E})$ следует равенство $\nabla = 0$. Но ограничение $\mathcal{C}$-дифференциального оператора ∇ на $\breve{\mathcal{E}}^\infty$ есть Δ и не равно нулю. Это противоречие доказывает линейную независимость форм $d_\mathcal{C}\breve{h}_1, \ldots, d_\mathcal{C}\breve{h}_\rho$. По теореме 4 $(\breve{h}_1, \ldots, \breve{h}_\rho)$ – плоский выход системы (2).

Доказательство теоремы 2. Последовательно для $k = 1, \ldots, \varkappa$ найдем $b_2, \ldots, b_\varkappa$ и из уравнений (4) выделим те, которые содержат $h_{s,a}^{(l)}$ только с $a \geq b_{k+1}$, т.е. уравнения на значения функций $h_s(t)$ при $t \leq t_0 - b_{k+1}$. Множество таких уравнений обозначим через $\mathcal{A}_k$. Оставшиеся уравнения преобразуем к виду (5) и множество этих уравнений обозначим через $\mathcal{B}_k$.

Пусть $\mathcal{B}_0 = \emptyset$, $\rho_0 = 0$, а $\mathcal{A}_0$ – множество всех уравнений (4). Покажем, как получить множества $\mathcal{A}_k$ и $\mathcal{B}_k$, а также как привести уравнения из $\mathcal{B}_k$ к виду (5) в предположении, что для $k-1$ мы уже это сделали. Напомним, что уравнения из $\mathcal{A}_{k-1}$ содержат $h_{s,a}^{(l)}$ только с $a \geq b_k$. Положим сначала $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_{k-1}$ и $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{k-1}$. Приведем все уравнения $\mathcal{A}_k$ к виду $G_i = 0$, $i = \overline{1, n+m-\rho_{k-1}}$. Для каждого $s = \overline{1, \rho}$ рассмотрим все такие l, что хотя бы одно уравнение из $\mathcal{A}_k$ содержит $h_{s,b_k}^{(l)}$. Через l_s обозначим максимальный элемент этого множества. Рассмотрим матрицу, составленную из производных $\partial G_i / \partial h_{s,b_k}^{(l_s)}$, где $i = \overline{1, n+m-\rho_{k-1}}$, $s = \overline{1, \rho}$. Если для некоторого s уравнения $\mathcal{A}_k$ не содержат $h_{s,b_k}^{(l)}$ ни для какого l, то мы не рассматриваем это s и данная матрица не содержит соответствующий столбец. Выберем ненулевой минор максимального порядка рассматриваемой матрицы. Пусть этот минор лежит на пересечении строк с номерами $i = i_1, \ldots, i_{n_k}$ и столбцов с номерами $s = s_1, \ldots, s_{n_k}$. Тогда по теореме о неявной функции переменные $h^{(l_s)}_{s,b_k}$, $s = s_1, \ldots, s_{n_k}$, выражаются через остальные переменные, т.е. $t, h_{s_\alpha,b_k}, \ldots, h^{(l_s-1)}_{s_\alpha,b_k}$, $\alpha = \overline{1, n_k}$, $h^{(l)}_{s,b_k}$, $s \neq s_1, \ldots, s_{n_k}$, и $h^{(l)}_{s,a}$, где $a > b_k$. Действуя на эти уравнения гомоморфизмом $\delta^*_{-b_k}$, получаем уравнения вида (5). Добавим эти уравнения в $\mathcal{B}_k$ и удалим соответствующие уравнения из $\mathcal{A}_k$. Возможна ситуация, когда новое и старое уравнения из $\mathcal{B}_k$ в левой части содержат одну и ту же функцию h_s. Тогда уравнение с производной от этой функции меньшего порядка оставим в $\mathcal{B}_k$, а большего перенесем в $\mathcal{A}_k$.

Подставим в правые части уравнений из $\mathcal{B}_k$ вместо $h^{(l_{k,\alpha})}_{s_\alpha}$ полученное выражение $F_{k,\alpha}$, вместо $h^{(l_{k,\alpha}+1)}_{s_\alpha}$ выражение $D(F_{k,\alpha})$ и т.д. Аналогично в уравнения из $\mathcal{A}_k$ вместо $h^{(l_{k,\alpha})}_{s_\alpha,b_k}$ подставим выражение $\delta^*_{b_k}(F_{k,\alpha})$, вместо $h^{(l_{k,\alpha}+1)}_{s_\alpha,b_k}$ – выражение $D(\delta^*_{b_k}(F_{k,\alpha}))$ и т.д. Если после этого какие-либо уравнения из $\mathcal{A}_k$ содержат переменные $h^{(l)}_{s,b_k}$, то повторим наши рассуждения. Каждый раз мы или уменьшаем количество уравнений в $\mathcal{A}_k$, или уменьшаем порядок уравнений из $\mathcal{B}_k$. Поэтому указанную процедуру повторим конечное число раз.

Если уравнения в $\mathcal{A}_k$ не содержат переменные вида $h^{(l)}_{s,b_k}$, то обозначим через b_{k+1} минимальное a, которое входит в уравнения $\mathcal{A}_k$ в виде $h^{(l)}_{s,a}$ для некоторых l, s. Таким образом, множество $\mathcal{A}_k$ состоит из уравнений, содержащих $h^{(l)}_{s,a}$ только с $a \geq b_{k+1}$, и процесс построения $\mathcal{A}_k$ и $\mathcal{B}_k$ завершен.

На каждой k-й итерации уменьшается количество уравнений в $\mathcal{A}_k$ и увеличивается b_{k+1}. В конце концов на некотором k-м шаге или $\mathcal{A}_k$ окажется пустым, или $b_{k+1} \geq a_0$. Полагая $\varkappa = k$, получаем последнюю систему вида (5).

Доказательство теоремы 3. Пусть $x(t)$ – решение системы (7), а $\xi(t)$ – решение системы (9), получающееся в процессе построения $x(t)$. Тогда функции $x(t)$ и $\xi(t)$ образуют решение системы (1), (9), (10). Переходя от переменных x, ξ к переменным $h^{(l)}_{s,b_k}$, получаем решение системы (8). При $x = x_*(t)$ система (9) с начальным условием $\xi(t_\text{н} - a_0) = \xi_*(t_\text{н} - a_0)$ имеет решение $\xi_*(t)$, а $U(t, x_*(t), \xi_*(t)) = u(t, h^{(l)}_{*,s}(t - b_k)) = u_*(t)$, поэтому $x_*(t)$ – решение системы (7). Так как этому решению соответствует асимптотически устойчивое решение $h_{s,b_k} = h_{*,s}(t - b_k)$ системы (8), то $(x_*(t), \xi_*(t))$ – асимптотически устойчивое решение системы (1), (9), (10), а значит, $x_*(t)$ – асимптотически устойчивое решение системы (7).

Работа выполнена при частичной поддержке программы "Университеты России" (проект УР.03.01.141) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00840).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P.* // IEEE Trans. Automat. Contr. 1999. V. 44. № 5. P. 922–937.
2. *Chetverikov V.N.* // Forum Math. 2004. V. 16. P. 903–923.
3. *Chetverikov V.N.* // Acta Appl. Math. 2004. V. 83. № 1–2. P. 1–23.
4. *Fliess M., Mounier H.* // ESAIM: Control Optimisation Calculus Variations. 1998. V. 3. P. 301–314.
5. *Jankovic M.* // Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control. Orlando, Florida, USA, 2001. P. 117–122.
6. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Под ред. Виноградова А.М. и Красильщика И.С. М., 2005.
7. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию 31.05.2005 г.