

УДК 519.63

## О СИЛЬНОЙ МОНОТОННОСТИ СХЕМЫ “КАБАРЕ”<sup>1)</sup>

© 2012 г. В. В. Остапенко

(630090 Новосибирск, ул. Лаврентьева, 15, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,  
Новосибирский государственный университет)

e-mail: [ostapenkow@ngs.ru](mailto:ostapenkow@ngs.ru)

Поступила в редакцию 02.09.2011 г.

Проведен анализ сильной монотонности схемы “КАБАРЕ” с однократной коррекцией потоковых переменных, применяемой для решения линейного уравнения переноса. Показано, что эта схема является сильно монотонной (обладает NED-свойством) при числах Куранта  $r \in (0, 0.5]$ , при которых она является монотонной. Приведены тестовые расчеты, иллюстрирующие данное свойство схемы КАБАРЕ. Библ. 17. Фиг. 4.

**Ключевые слова:** разностная схема КАБАРЕ, сильная монотонность, коррекция потоковых переменных.

### ВВЕДЕНИЕ

Для численного решения уравнений одномерной газовой динамики (см. [1], [2]) была предложена балансно-характеристическая разностная схема (см. [3]), которая на классическом тесте Blast Wave (см. [4]) показала существенные преимущества по сравнению с известными монотонными схемами повышенной точности. Предложенная схема имеет второй порядок аппроксимации на гладких решениях, является консервативной, явной, условно устойчивой в линейном приближении при числах Куранта  $r \in (0, 1]$ . Основные достоинства этой схемы связаны с тем, что при аппроксимации линейного уравнения переноса, без учета нелинейной коррекции потоков, она эквивалентна трехслойной по времени схеме КАБАРЕ (см. [5]), которая является точной при двух различных числах Куранта  $r = 0.5$  и  $r = 1$ . В настоящее время схема КАБАРЕ эффективно применяется для моделирования пространственно-двумерных газодинамических (см. [6]) и гидравлических (см. [7]) течений.

Было показано (см. [8]), что предложенная в [3] схема с однократной коррекцией потоков в линейном приближении является монотонной (см. [9]) при числах Куранта  $r \in (0, 0.5]$  и немонотонной при числах Куранта  $r \in (0.5, 1)$ . В связи с этим в [8] была предложена двойная коррекция потоков, обеспечивающая монотонность схемы КАБАРЕ при всех числах Куранта  $r \in (0, 1]$ , при которых она является устойчивой. Однако из монотонности разностной схемы в общем случае не следует ее сильная монотонность (см. [10], [11]) (NED-свойство (см. [12])), предполагающая, что схема при переходе с одного временного слоя на другой не увеличивает число локальных экстремумов в разностном решении.

В настоящей работе проведен анализ сильной монотонности схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей линейное уравнение переноса при числах Куранта  $r \in (0, 0.5]$ . Показано, что (в отличие от многих других схем) из монотонности схемы КАБАРЕ с однократной коррекцией потоков следует ее сильная монотонность. Приведены тестовые расчеты, иллюстрирующие данное свойство схемы КАБАРЕ.

### 1. СХЕМА КАБАРЕ, АППРОКСИМИРУЮЩАЯ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения переноса

$$v_t + av_x = 0, \quad a = \text{const} > 0, \quad v(0, x) = v_0(x), \quad (1.1)$$

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 09-01-00569) и проекта фундаментальных исследований Президиума РАН № 4.7.

которую аппроксимируем разностной схемой КАБАРЕ с однократной коррекцией потоковых переменных (см. [3]). В этой схеме используются потоковые  $u_j^n = u(t^n, x_j)$  и консервативные  $U_{j+1/2}^{n+1/2} = u(t^{n+1/2}, x_{j+1/2})$  переменные, заданные соответственно в целых,

$$t^n = n\tau, \quad x_j = jh, \quad h, \tau = \text{const}, \quad (1.2)$$

и полуцелых,

$$t^{n+1/2} = (n + 1/2)\tau, \quad x_{j+1/2} = (j + 1/2)h, \quad (1.3)$$

узлах разностной сетки. Пусть  $u_j^0, U_{j+1/2}^0$  – некоторая сеточная аппроксимация начальной функции  $v_0(x)$ . Для реализации схемы КАБАРЕ необходимо предварительно по разностным уравнениям

$$\frac{U_{j+1/2}^{1/2} - U_{j+1/2}^0}{\tau/2} + a \frac{u_{j+1}^0 - u_j^0}{h} = 0 \quad (1.4)$$

вычислить значения консервативных переменных на начальном временном полушаге. После этого схема при всех  $n \geq 0$  реализуется в два этапа.

На первом этапе (временном полушаге) с учетом того, что  $a > 0$ , по известным величинам  $u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}$  находятся предварительные значения потоков на  $(n + 1)$ -м временном слое:

$$u_j^{-n+1} = 2U_{j-1/2}^{n+1/2} - u_j^n, \quad (1.5)$$

которые, исходя из принципа максимума, корректируются по формулам

$$u_j^{n+1} = F(u_j^n, u_j^{-n+1}, U_{j-1/2}^{n+1/2}), \quad (1.6)$$

$$F(v, u, U) = \begin{cases} u, & m \leq u \leq M, \\ m, & u < m, \\ M, & u > M, \end{cases} \quad (1.7)$$

$$m = \min(v, U), \quad M = \max(v, U). \quad (1.8)$$

На втором этапе (временном полушаге) по дивергентной схеме

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+3/2} - U_{j+1/2}^{n+1/2}}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} = 0 \quad (1.9)$$

определяются консервативные переменные на временном слое  $n + 3/2$ . Разностная схема (1.4)–(1.9) является условно устойчивой при числе Куранта

$$r = a\tau/h \leq 1 \Leftrightarrow \tau \leq h/a \quad (1.10)$$

и в областях, в которых предварительные потоки (1.5) не корректируются, имеет второй порядок аппроксимации и является точной (см. [5]) при  $r = 0.5$  и  $r = 1$ .

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОНОТОННОСТИ И СИЛЬНОЙ МОНОТОННОСТИ СХЕМЫ КАБАРЕ

Поскольку точное решение  $v(t, x) = v_0(x - at)$  задачи (1.1) сохраняет все особенности начальной функции  $v_0(x)$ , в частности, ее монотонность, С.К. Годунов предложил явную двухслойную по времени разностную схему, аппроксимирующую эту задачу, называть монотонной, если она сохраняет монотонность сеточных начальных данных при переходе от одного временного слоя к другому (см. [9]). Для схемы КАБАРЕ, заданной на разнесенной по пространству и по времени разностной сетке (1.2), (1.3), это понятие монотонности было модифицировано следующим образом (см. [8]).

**Определение 1.** Разностная схема КАБАРЕ является монотонной:

а) на начальном временном полушаге (1.4), если она каждую монотонную начальную функцию  $\{u_j^0, U_{j+1/2}^0\}$  переводит в монотонную сеточную функцию  $\{u_j^1, U_{j+1/2}^{1/2}\}$ ;

б) на основном временном шаге (1.5)–(1.9), если она каждую монотонную по  $j$  сеточную функцию  $\{u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$ , где  $n \geq 0$ , переводит в монотонные по  $j$  сеточные функции  $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  и  $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+3/2}\}$ .

Как показано в [8], необходимым и достаточным условием монотонности устойчивой при (1.10) схемы КАБАРЕ на начальном временном полушаге (1.4) является выполнение для монотонных начальных данных  $\{u_j^0, U_{j+1/2}^0\}$  соотношения

$$U_{j+1/2}^0 = \frac{u_j^0 + u_{j+1}^0}{2} \quad \forall j, \quad (2.1)$$

а критерием ее монотонности на основном временном шаге (1.5)–(1.9) является выполнение для числа Куранта  $r$  неравенства

$$r = a\tau/h \leq 0.5 \Leftrightarrow \tau \leq h/(2a). \quad (2.2)$$

В [10], [11] для линейных разностных схем было введено понятие сильной монотонности, усиливающее свойство классической монотонности и предполагающее, что схема при переходе с одного временного слоя на другой не увеличивает число обобщенных локальных экстремумов в разностном решении. Аналогом этого свойства для нелинейных разностных схем, использующих различные минимаксные процедуры коррекции потоков, является NED-свойство (number of extremum diminishing property (см. [12])). В [10], [11] для явных двухслойных по времени линейных разностных схем были получены критерии их сильной монотонности, усиливающие критерий классической монотонности из [9].

Опираясь на [10], дадим следующие определения.

**Определение 2.** Сеточная функция

$$\{f_i\} = \{u_j, U_{j+1/2}\}, \quad i = 2j \in \mathbf{Z}, \quad (2.3)$$

имеет на отрезке  $[m, n]$  обобщенный локальный экстремум, если

$$f_i = f_{i+1} \quad \forall i = \overline{m, n-1}, \quad (f_m - f_{m-1})(f_n - f_{n+1}) > 0. \quad (2.4)$$

При  $f_m > f_{m-1}, f_n > f_{n+1}$  ( $f_m < f_{m-1}, f_n < f_{n+1}$ ) этот экстремум является обобщенным локальным максимумом (минимумом).

Из этого определения следует, что обобщенный локальный экстремум на отрезке  $[m, n]$  при  $n > m$  представляет собой объединение  $(n - m + 1)$ -го нестрогого локального экстремума, а при  $n = m$  – строгий локальный экстремум. С учетом обозначения (2.3) обобщенные локальные экстремумы для функции  $\{u_j, U_{j+1/2}\}$  могут быть четырех типов, в зависимости от того, четными или нечетными числами являются границы отрезка  $[m, n]$ . Так, например, функция  $\{u_j, U_{j+1/2}\}$  имеет следующие четыре типа обобщенных локальных максимумов:

$$U_{k-1/2} < u_k = U_{k+1/2} = \dots = U_{l-1/2} = u_l > U_{l+1/2}, \quad (2.5)$$

$$U_{k-1/2} < u_k = U_{k+1/2} = \dots = u_l = U_{l+1/2} > u_{l+1}, \quad (2.6)$$

$$u_{k-1} < U_{k-1/2} = u_k = \dots = U_{l-1/2} = u_l > U_{l+1/2}, \quad (2.7)$$

$$u_k < U_{k+1/2} = u_{k+1} = \dots = u_l = U_{l+1/2} > u_{l+1}, \quad (2.8)$$

где первый и последний при  $k = l$  представляют собой строгие локальные максимумы. Обобщенные локальные минимумы получатся, если в формулах (2.5)–(2.8) поменять местами знаки неравенств  $<$  и  $>$ .

**Определение 3.** Разностная схема КАБАРЕ является сильно монотонной:

а) на начальном временном полушаге (1.4), если она каждую начальную функцию  $\{u_j^0, U_{j+1/2}^0\}$ , имеющую конечное число  $N$  обобщенных локальных экстремумов ( $N \geq 0$ ), переводит в сеточную функцию  $\{u_j^0, U_{j+1/2}^{1/2}\}$ , имеющую не более чем  $N$  обобщенных локальных экстремумов;

б) на основном временном шаге (1.5)–(1.9), если она каждую сеточную функцию  $\{u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$ , имеющую по переменной  $j$  конечное число  $N$  обобщенных локальных экстремумов ( $N \geq 0$ ), пе-

редовит в сеточные функции  $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  и  $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+3/2}\}$ , каждая из которых имеет по  $j$  не более чем  $N$  обобщенных локальных экстремумов.

В следующих разделах изучим свойство сильной монотонности схемы КАБАРЕ (1.4)–(1.9) в смысле определений 2 и 3.

### 3. СИЛЬНАЯ МОНОТОННОСТЬ СХЕМЫ КАБАРЕ НА НАЧАЛЬНОМ ВРЕМЕННОМ ПОЛУШАГЕ

Изучим сначала сильную монотонность схемы КАБАРЕ на начальном временном полушаге (1.4).

**Теорема 1.** *Для того чтобы устойчивая схема КАБАРЕ была сильно монотонной на начальном временном полушаге (1.4), необходимо и достаточно, чтобы сеточные начальные данные  $\{u_j^0, U_{j+1/2}^0\}$  удовлетворяли условию (2.1).*

**Доказательство.** Поскольку при  $N = 0$  начальная функция  $\{u_j^0, U_{j+1/2}^0\}$  не имеет обобщенных локальных экстремумов, т.е. является монотонной, то из сильной монотонности схемы КАБАРЕ в смысле определения 3а следует ее монотонность по определению 1а. Поэтому необходимость соотношения (2.1) для выполнения условия данной теоремы следует из того, что, в силу теоремы 1 из [8], эти соотношения представляют собой критерий монотонности схемы КАБАРЕ на начальном временном полушаге.

Для доказательства достаточности предположим, что начальные данные  $\{u_j^0, U_{j+1/2}^0\}$  удовлетворяют соотношению (2.1). Тогда

$$m_{j+1/2}^0 < U_{j+1/2}^0 < M_{j+1/2}^0 \quad \forall j, \quad (3.1)$$

$$m_{j+1/2}^0 = \min(u_j^0, u_{j+1}^0), \quad M_{j+1/2}^0 = \max(u_j^0, u_{j+1}^0) \quad (3.2)$$

при  $u_j^0 \neq u_{j+1}^0$  и

$$u_j^0 = U_{j+1/2}^0 = u_{j+1}^0 \quad (3.3)$$

при  $u_j^0 = u_{j+1}^0$ . Поскольку из уравнения (1.4) с учетом (2.1) следует, что

$$U_{j+1/2}^{1/2} = U_{j+1/2}^0 - b(u_{j+1}^0 - u_j^0) = \frac{u_{j+1}^0 + u_j^0}{2} - b(u_{j+1}^0 - u_j^0) = \alpha u_j^0 + \beta u_{j+1}^0, \quad (3.4)$$

где, с учетом условия устойчивости (1.10), имеем

$$b = \frac{a\tau}{2h} = \frac{r}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} + b \geq 0, \quad \beta = \frac{1}{2} - b \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1, \quad (3.5)$$

то сеточная функция  $\{u_j^0, U_{j+1/2}^{1/2}\}$  удовлетворяет неравенствам

$$m_{j+1/2}^0 \leq U_{j+1/2}^{1/2} \leq M_{j+1/2}^0 \quad \forall j. \quad (3.6)$$

Из неравенств (3.1) и (3.6) с учетом (3.2) получим два следствия:

$$u_{k-1}^0 < U_{k-1/2}^0 < u_k^0, \quad \text{если} \quad (U_{k-1/2}^{1/2} < u_k^0 \text{ или } u_{k-1}^0 < U_{k-1/2}^{1/2}), \quad (3.7)$$

$$u_l^0 > U_{l+1/2}^0 > u_{l+1}^0, \quad \text{если} \quad (u_l^0 > U_{l+1/2}^{1/2} \text{ или } U_{l+1/2}^{1/2} > u_{l+1}^0). \quad (3.8)$$

Это означает (учитывая (3.3)), что если функция  $\{u_j^0, U_{j+1/2}^{1/2}\}$  имеет обобщенный локальный максимум одного из четырех типов (2.5)–(2.8), то начальная функция  $\{u_j^0, U_{j+1/2}^0\}$  имеет обобщенный максимум типа (2.5) на отрезке, совпадающем или лежащем внутри отрезка обобщенного максимума функции  $\{u_j^0, U_{j+1/2}^{1/2}\}$ . Таким образом, начальная функция  $\{u_j^0, U_{j+1/2}^0\}$  имеет обобщенных локальных максимумов (а значит и минимумов) не меньше, чем функция  $\{u_j^0, U_{j+1/2}^{1/2}\}$ , и, следовательно, при переходе  $\{u_j^0, U_{j+1/2}^0\} \rightarrow \{u_j^0, U_{j+1/2}^{1/2}\}$  количество обобщенных локальных экстремумов не возрастает. Теорема доказана.

Из этой теоремы можно сделать вывод, что из монотонности схемы КАБАРЕ на начальном полушаге по времени (1.4) следует ее сильная монотонность на этом полушаге.

#### 4. СИЛЬНАЯ МОНОТОННОСТЬ СХЕМЫ КАБАРЕ НА ОСНОВНОМ ВРЕМЕННОМ ШАГЕ

Для схемы КАБАРЕ на основном временном шаге имеет место следующая

**Теорема 2.** *Для сильной монотонности схемы КАБАРЕ на основном временном шаге (1.5)–(1.9) необходимо и достаточно, чтобы соответствующее ей число Куранта  $r$  удовлетворяло неравенству (2.2).*

**Доказательство.** Поскольку при  $N = 0$  функция  $\{u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$ , входящая в условие определения 3б, не имеет обобщенных локальных экстремумов по переменной  $j$ , т.е. является монотонной, то из сильной монотонности схемы КАБАРЕ в смысле определения 3б следует ее монотонность по определению 1б. Поэтому утверждение данной теоремы при  $N = 0$ , а также необходимость ограничения (2.2) для выполнения ее условия, следуют из того, что, в силу теоремы 2 из [8], это ограничение представляет собой критерий монотонности схемы КАБАРЕ на основном временном шаге при однократной коррекции потоковых переменных.

Перейдем к доказательству достаточности в случае, когда функция  $\{u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  имеет конечное число  $N \geq 1$  обобщенных локальных экстремумов.

**Лемма 1.** *При переходе по формулам (1.5)–(1.8) от функции  $\{u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  (имеющей по  $j$  конечное число  $N \geq 1$  обобщенных локальных экстремумов) к функции  $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  число обобщенных локальных экстремумов по  $j$  не возрастает.*

**Доказательство.** Коррекция потоков (1.6)–(1.8) приводит к ограничениям

$$m_{j-1/4}^{n+1/4} \leq u_j^{n+1} \leq M_{j-1/4}^{n+1/4} \quad \forall j, \tag{4.1}$$

$$m_{j-1/4}^{n+1/4} = \min(U_{j-1/2}^{n+1/2}, u_j^n), \quad M_{j-1/4}^{n+1/4} = \max(U_{j-1/2}^{n+1/2}, u_j^n) \quad \forall j \tag{4.2}$$

на значения функций  $u_j^{n+1}$ , развернутая форма записи которых имеет вид:

$$U_{j-1/2}^{n+1/2} \leq u_j^{n+1} \leq u_j^n, \quad \text{если} \quad U_{j-1/2}^{n+1/2} \leq u_j^n; \tag{4.3}$$

$$U_{j-1/2}^{n+1/2} \geq u_j^{n+1} \geq u_j^n, \quad \text{если} \quad U_{j-1/2}^{n+1/2} \geq u_j^n. \tag{4.4}$$

Из этих неравенств получим, что

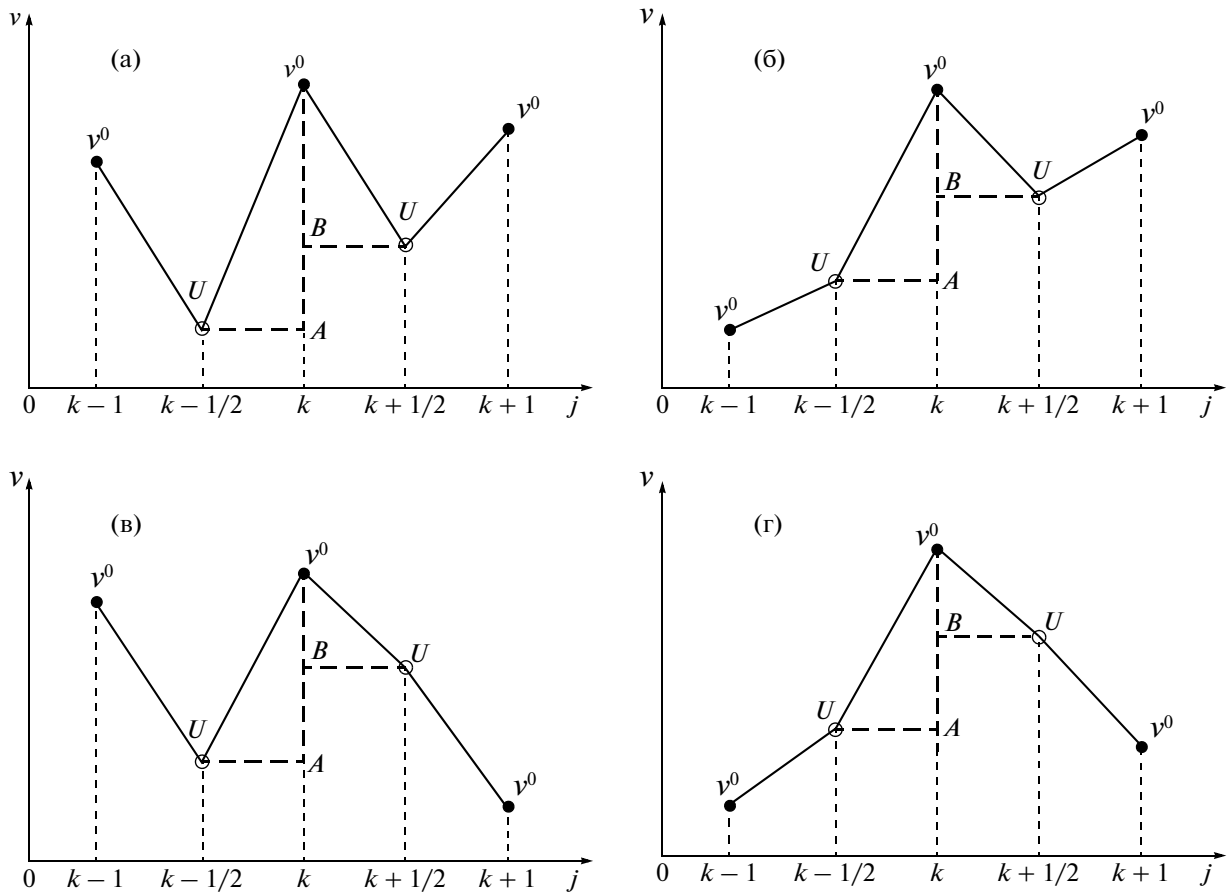
$$U_{j-1/2}^{n+1/2} \leq u_j^{n+1} \leq U_{j+1/2}^{n+1/2}, \quad \text{если} \quad U_{j-1/2}^{n+1/2} \leq u_j^n \leq U_{j+1/2}^{n+1/2}; \tag{4.5}$$

$$U_{j-1/2}^{n+1/2} \geq u_j^{n+1} \geq U_{j+1/2}^{n+1/2}, \quad \text{если} \quad U_{j-1/2}^{n+1/2} \geq u_j^n \geq U_{j+1/2}^{n+1/2}, \tag{4.6}$$

т.е. если функция  $\{u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  монотонна на отрезке  $[j - 1/2, j + 1/2]$ , то функция  $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  также монотонна на этом отрезке с тем же знаком монотонности. Отсюда следует утверждение леммы в случае, если функция  $\{u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  не имеет строгих локальных экстремумов в целых узлах  $j$ , в которых заданы значения  $u_j^n$  потоковой переменной.

Предположим, что функция  $\{u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  имеет строгие локальные экстремумы на некотором конечном множестве  $I_0 = \{j_1, j_2, \dots, j_M\}$  целых узлов, где  $M \leq N$ . Поскольку схема КАБАРЕ является явной (в силу чего вычисление значений  $u_j^{n+1}$  во всех узлах  $j$  происходит независимо друг от друга), то вводя вспомогательную сеточную функцию

$$V_j^0 = \begin{cases} u_j^n, & j \in I_0, \\ u_j^{n+1}, & j \in J_0, \end{cases} \quad J_0 = \mathbf{Z} \setminus I_0, \tag{4.7}$$



Фиг. 1.

с учетом (4.5) и (4.6) получим, что при переходе  $\{u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}\} \rightarrow \{v_j^0, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  количество обобщенных локальных экстремумов по  $j$  не возрастает. Покажем, что количество этих экстремумов не возрастает также при переходе  $\{v_j^0, U_{j+1/2}^{n+1/2}\} \rightarrow \{v_j^1, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$ , где функция

$$v_j^1 = \begin{cases} u_j^n, & j \in I_1, \\ u_j^{n+1}, & j \in J_1, \end{cases} \quad I_1 = I_0 \setminus \{j_1\}, \quad J_1 = J_0 \cup \{j_1\} \tag{4.8}$$

отличается от функции  $v_j^0$  только тем, что в ней потоковая переменная  $u$  переведена в узле  $j_1$  с  $n$ -го на  $(n + 1)$ -й временной слой.

Не нарушая общности, будем считать, что функция  $\{u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$ , а значит и функция  $\{v_j^0, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$ , имеют в узле  $k = j_1$  строгий локальный максимум, т.е.

$$U_{k-1/2}^{n+1/2} < v_k^0 > U_{k+1/2}^{n+1/2}. \tag{4.9}$$

Тогда возможны четыре различных случая поведения функции  $\{v_j^0, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  в окрестности узла  $k$ :

$$v_{k-1}^0 > U_{k-1/2}^{n+1/2} < v_k^0 > U_{k+1/2}^{n+1/2} < v_{k+1}^0 \tag{4.10}$$

– в соседних полуцелых узлах  $k - 1/2$  и  $k + 1/2$  функция имеет строгие локальные минимумы (фиг. 1а);

$$v_{k-1}^0 \leq U_{k-1/2}^{n+1/2} < v_k^0 > U_{k+1/2}^{n+1/2} < v_{k+1}^0 \tag{4.11}$$

– на отрезке  $[k - 1, k]$  функция монотонно возрастает, а в узле  $k + 1/2$  имеет строгий локальный минимум (фиг. 1б);

$$v_{k-1}^0 > U_{k-1/2}^{n+1/2} < v_k^0 > U_{k+1/2}^{n+1/2} \geq v_{k+1}^0 \tag{4.12}$$

– в узле  $k - 1/2$  функция имеет строгий локальный минимум, а на отрезке  $[k, k + 1]$  монотонно убывает (фиг. 1в);

$$v_{k-1}^0 \leq U_{k-1/2}^{n+1/2} < v_k^0 > U_{k+1/2}^{n+1/2} \geq v_{k+1}^0 \tag{4.13}$$

– на отрезке  $[k - 1, k]$  функция монотонно возрастает, а на отрезке  $[k, k + 1]$  – монотонно убывает (фиг. 1г).

Из условий (4.3) и (4.9) следует, что значение  $v_k^1$  функции (4.8) удовлетворяет неравенствам

$$U_{k-1/2}^{n+1/2} \leq v_k^1 \leq v_k^0. \tag{4.14}$$

Предполагая, что для значений функции  $U_{j+1/2}^{n+1/2}$  в узлах  $k - 1/2$  и  $k + 1/2$  выполнены неравенства

$$U_{k-1/2}^{n+1/2} \leq U_{k+1/2}^{n+1/2}, \tag{4.15}$$

изобразим на фиг. 1 интервал (4.14) допустимых значений  $v_k^1$  вертикальным пунктирным отрезком  $[Av^0]$ .

Если значение  $v_k^1$  удовлетворяет неравенствам

$$U_{k+1/2}^{n+1/2} < v_k^1 \leq v_k^0, \tag{4.16}$$

означающим, что точка  $v_k^1$  лежит на отрезке  $[Av^0]$  выше точки  $B$ , то (как следует из фиг. 1) при переходе  $\{v_j^0, U_{j+1/2}^{n+1/2}\} \rightarrow \{v_j^1, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  количество и положение локальных экстремумов на отрезке  $[k - 1, k + 1]$  не меняется. Если значение  $v_k^1$  удовлетворяет неравенствам

$$U_{k-1/2}^{n+1/2} \leq v_k^1 \leq U_{k+1/2}^{n+1/2}, \tag{4.17}$$

означающим, что точка  $v_k^1$  лежит на отрезке  $[AB]$  фиг. 1, то при переходе  $\{v_j^0, U_{j+1/2}^{n+1/2}\} \rightarrow \{v_j^1, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  количество локальных экстремумов на отрезке  $[k - 1, k + 1]$  уменьшается на два в случаях (4.10) и (4.11), показанных на фиг. 1а и 1б, и остается неизменным в случаях (4.12) и (4.13), показанных на фиг. 1в и 1г. Отсюда следует, что при выполнении неравенства (4.15) количество обобщенных локальных экстремумов на отрезке  $[k - 1, k + 1]$  при переходе  $\{v_j^0, U_{j+1/2}^{n+1/2}\} \rightarrow \{v_j^1, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  не возрастает.

Аналогичным образом показывается, что количество этих экстремумов не возрастает при выполнении противоположного к (4.15) неравенства

$$U_{k-1/2}^{n+1/2} \geq U_{k+1/2}^{n+1/2}. \tag{4.18}$$

Таким образом, в обоих подслучаях (4.15) и (4.18) всех четырех случаев (4.10)–(4.13) функция  $\{v_j^1, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  имеет на отрезке  $[k - 1, k + 1]$  обобщенных локальных экстремумов не больше, чем функция  $\{v_j^0, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$ . Поскольку  $v_j^0 = v_j^1$  при всех  $j \neq j_1$ , то переход от функции  $\{v_j^0, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  к функции  $\{v_j^1, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  не приводит к увеличению числа обобщенных локальных экстремумов при всех  $j \in \mathbf{Z}$ .

Аналогичным образом последовательно при всех  $s = \overline{1, M - 1}$  доказывается невозрастание числа обобщенных локальных экстремумов при переходах  $\{v_j^s, U_{j+1/2}^{n+1/2}\} \rightarrow \{v_j^{s+1}, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$ , где

$$v_j^s = \begin{cases} u_j^n, & j \in I_s, \\ u_j^{n+1}, & j \in J_s, \end{cases} \quad I_s = I_{s-1} \setminus \{j_s\}, \quad J_s = J_{s-1} \cup \{j_s\}, \quad s = \overline{2, M}. \tag{4.19}$$

В результате утверждение леммы следует из того, что

$$I_M = \emptyset \Rightarrow v_j^M = u_j^{n+1} \quad \forall j \in \mathbf{Z} \Rightarrow \{v_j^M, U_{j+1/2}^{n+1/2}\} = \{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}. \tag{4.20}$$

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству невозрастания числа обобщенных локальных экстремумов при переходе  $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1/2}\} \rightarrow \{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+3/2}\}$ , где функция  $U_{j+1/2}^{n+3/2}$  из разностного уравнения (1.9) с учетом (1.10) определяется по формуле

$$U_{j+1/2}^{n+3/2} = U_{j+1/2}^{n+1/2} - r(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}). \quad (4.21)$$

**Лемма 2.** Если функция  $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  монотонна на отрезке  $[j, j+1]$ , то тогда функция  $U_{j+1/2}^{n+3/2}$ , вычисляемая по формуле (4.21), удовлетворяет условиям

$$U_{j+1/2}^{n+3/2} \leq u_{j+1}^{n+1}, \quad \text{если} \quad u_j^{n+1} \leq U_{j+1/2}^{n+1/2} \leq u_{j+1}^{n+1}, \quad (4.22)$$

$$U_{j+1/2}^{n+3/2} \geq u_{j+1}^{n+1}, \quad \text{если} \quad u_j^{n+1} \geq U_{j+1/2}^{n+1/2} \geq u_{j+1}^{n+1}. \quad (4.23)$$

**Доказательство.** Для доказательства формулы (4.22) предположим, что

$$u_j^{n+1} \leq U_{j+1/2}^{n+1/2} \leq u_{j+1}^{n+1}. \quad (4.24)$$

Тогда с учетом (4.21) ограничение  $U_{j+1/2}^{n+3/2} \leq u_{j+1}^{n+1}$  следует из неравенств

$$U_{j+1/2}^{n+1/2} + ru_j^{n+1} \leq (1+r)U_{j+1/2}^{n+1/2} \leq (1+r)u_{j+1}^{n+1}. \quad (4.25)$$

Формула (4.23) доказывается аналогично. Лемма доказана.

**Лемма 3.** Если функция  $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  монотонна на отрезке  $[j-1/2, j+1]$ , то тогда функция  $U_{j+1/2}^{n+3/2}$ , вычисляемая по формулам (1.5)–(1.9), при ограничении (2.2) на число Куранта  $r$  удовлетворяет условиям

$$u_j^{n+1} \leq U_{j+1/2}^{n+3/2}, \quad \text{если} \quad U_{j-1/2}^{n+1/2} \leq u_j^{n+1} \leq U_{j+1/2}^{n+1/2} \leq u_{j+1}^{n+1}, \quad (4.26)$$

$$u_j^{n+1} \geq U_{j+1/2}^{n+3/2}, \quad \text{если} \quad U_{j-1/2}^{n+1/2} \geq u_j^{n+1} \geq U_{j+1/2}^{n+1/2} \geq u_{j+1}^{n+1}. \quad (4.27)$$

**Доказательство.** Предполагая, что выполнены неравенства

$$U_{j-1/2}^{n+1/2} \leq u_j^{n+1} \leq U_{j+1/2}^{n+1/2} \leq u_{j+1}^{n+1}, \quad (4.28)$$

из формул ограничения потоков (1.5)–(1.8) получим

$$U_{j+1/2}^{n+1/2} \leq u_{j+1}^{n+1} \leq 2U_{j+1/2}^{n+1/2} - u_j^n \Rightarrow U_{j-1/2}^{n+1/2} \leq u_j^{n+1} \leq u_j^n \leq U_{j+1/2}^{n+1/2}. \quad (4.29)$$

С учетом формул (2.2), (4.21) и (4.29) ограничение  $u_j^{n+1} \leq U_{j+1/2}^{n+3/2}$  следует из неравенств

$$\begin{aligned} U_{j+1/2}^{n+3/2} - u_j^{n+1} &= U_{j+1/2}^{n+1/2} - ru_{j+1}^{n+1} - (1-r)u_j^{n+1} \geq \\ &\geq U_{j+1/2}^{n+1/2} - r(2U_{j+1/2}^{n+1/2} - u_j^n) - (1-r)u_j^{n+1} \geq (1-2r)(U_{j+1/2}^{n+1/2} - u_j^{n+1}) \geq 0. \end{aligned}$$

Формула (4.26) доказана. Формула (4.27) доказывается аналогично. Лемма доказана.

Из лемм 2 и 3 следует, что если функция  $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  монотонна на отрезке  $[j-1/2, j+1]$ , то функция  $\{u_j^{n+1}, U_{j+3/2}^{n+1/2}\}$  монотонна на отрезке  $[j, j+1]$  с тем же знаком монотонности. При этом требование монотонности функции  $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  на отрезке  $[j-1/2, j+1]$ , входящее в условие леммы 3, нельзя ослабить, заменив на монотонность этой функции на отрезке  $[j, j+1]$ , как при формулировке леммы 2. Действительно, если функция  $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  удовлетворяет неравенствам (4.24), но не удовлетворяет неравенствам (4.28), т.е.

$$U_{j-1/2}^{n+1/2} > u_j^{n+1} \leq U_{j+1/2}^{n+1/2} \leq u_{j+1}^{n+1}, \quad (4.30)$$

то в силу ограничений (1.6)–(1.8) имеем

$$U_{j-1/2}^{n+1/2} > u_j^{n+1} \geq u_j^n \leq U_{j+1/2}^{n+1/2} \leq u_{j+1}^{n+1}. \quad (4.31)$$

Предположим, что поток  $u_j^{n+1}$  в узле  $j+1$  вычисляется по формуле

$$u_{j+1}^{n+1} = 2U_{j+1/2}^{n+1/2} - u_j^n \leq u_{j+1}^n, \quad (4.32)$$

и функция  $\{u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  с учетом (4.31) имеет в узле  $j$  строгий локальный минимум, удовлетворяющий неравенству

$$u_j^n < \frac{(1-r)u_j^{n+1} - (1-2r)U_{j+1/2}^{n+1/2}}{r}. \quad (4.33)$$

Тогда из формул

$$\begin{aligned} U_{j+1/2}^{n+3/2} - u_j^{n+1} &= U_{j+1/2}^{n+1/2} - ru_{j+1}^{n+1} - (1-r)u_j^{n+1} = \\ &= U_{j+1/2}^{n+1/2} - r(2U_{j+1/2}^{n+1/2} - u_j^n) - (1-r)u_j^{n+1} = (1-2r)U_{j+1/2}^{n+1/2} + ru_j^n - (1-r)u_j^{n+1} < 0 \end{aligned}$$

получим, что функция  $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+3/2}\}$  имеет в узле  $j + 1/2$  строгий локальный минимум и монотонной на отрезке  $[j, j + 1]$  не является.

**Лемма 4.** Если функция  $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  имеет в узле  $j + 1/2$  строгий локальный экстремум, то тогда функция  $U_{j+1/2}^{n+3/2}$ , вычисляемая по формуле (4.21), с учетом условия устойчивости (1.10) удовлетворяет условиям

$$U_{j+1/2}^{n+3/2} < \max(u_j^{n+1}, u_{j+1}^{n+1}), \quad \text{если} \quad U_{j+1/2}^{n+1/2} < \min(u_j^{n+1}, u_{j+1}^{n+1}); \quad (4.34)$$

$$U_{j+1/2}^{n+3/2} > \min(u_j^{n+1}, u_{j+1}^{n+1}), \quad \text{если} \quad U_{j+1/2}^{n+1/2} > \max(u_j^{n+1}, u_{j+1}^{n+1}). \quad (4.35)$$

**Доказательство.** Для доказательства формулы (4.34) предположим сначала, что

$$U_{j+1/2}^{n+1/2} < u_{j+1}^{n+1} \leq u_j^{n+1}. \quad (4.36)$$

Тогда ограничение  $U_{j+1/2}^{n+3/2} < u_j^{n+1}$  с учетом условия устойчивости (1.10) и формулы (4.21) следует из неравенств

$$U_{j+1/2}^{n+1/2} - ru_{j+1}^{n+1} < (1-r)u_{j+1}^{n+1} \leq (1-r)u_j^{n+1}. \quad (4.37)$$

Предположим теперь, что

$$U_{j+1/2}^{n+1/2} < u_j^{n+1} \leq u_{j+1}^{n+1}. \quad (4.36')$$

Тогда ограничение  $U_{j+1/2}^{n+3/2} < u_{j+1}^{n+1}$  с учетом формулы (4.21) следует из неравенств

$$U_{j+1/2}^{n+1/2} + ru_j^{n+1} < (1+r)u_j^{n+1} \leq (1+r)u_{j+1}^{n+1}. \quad (4.37')$$

Формула (4.34) доказана. Формула (4.35) доказывается аналогично. Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что если функция  $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  имеет в узле  $j + 1/2$  строгий локальный экстремум, то функция  $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+3/2}\}$  не может иметь в этом узле строгий локальный экстремум противоположного знака.

**Лемма 5.** Если число Куранта  $r$  удовлетворяет ограничению (2.2), то при переходе по формуле (4.21) от функции  $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  (имеющей по  $j$  конечное число  $N \geq 1$  обобщенных локальных экстремумов) к функции  $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+3/2}\}$  число обобщенных локальных экстремумов по  $j$  не возрастает.

**Доказательство.** Из лемм 2 и 3 следует, что функция  $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+3/2}\}$  монотонна на отрезке  $[j, j + 1]$  при всех  $j \in J_0^*$ , где  $J_0^*$  – множество целых чисел  $j$  таких, что функция  $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  монотонна на отрезке  $[j - 1/2, j + 1]$ . Вводя вспомогательную функцию

$$V_{j+1/2}^0 = \begin{cases} U_{j+1/2}^{n+1/2}, & j \in I_0^*, \\ U_{j+1/2}^{n+3/2}, & j \in J_0^*, \end{cases} \quad I_0^* = \mathbf{Z} \setminus J_0^*, \quad (4.38)$$

с учетом явной реализации схемы КАБАРЕ получим, что при переходе  $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1/2}\} \rightarrow \{u_j^{n+1}, V_{j+1/2}^0\}$  количество обобщенных локальных экстремумов по  $j$  не возрастает. Поскольку функция  $\{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}$  имеет по  $j$  конечное число обобщенных локальных экстремумов, то множество

$I_0^* = \{j_1^*, j_2^*, \dots, j_L^*\}$  является конечным. Покажем, что количество обобщенных локальных экстремумов не возрастает при переходе  $\{u_j^{n+1}, V_{j+1/2}^0\} \rightarrow \{u_j^{n+1}, V_{j+1/2}^1\}$ , где функция

$$V_{j+1/2}^1 = \begin{cases} U_{j+1/2}^{n+1/2}, & j \in I_1^*, \\ U_{j+1/2}^{n+3/2}, & j \in J_1^*, \end{cases} \quad I_1^* = I_0^* \setminus \{j_1^*\}, \quad J_1^* = J_0^* \cup \{j_1^*\}, \quad (4.39)$$

отличается от функции  $V_{j+1/2}^0$  только тем, что в ней консервативная переменная  $U$  переведена в узле  $j_1^* + 1/2$  с временного слоя  $n + 1/2$  на временной слой  $n + 3/2$ .

Так же, как и при доказательстве леммы 1, несложно показать, что при переходе  $\{u_j^{n+1}, V_{j+1/2}^0\} \rightarrow \{u_j^{n+1}, V_{j+1/2}^1\}$  количество обобщенных локальных экстремумов может измениться только на отрезке  $[k - 1/2, k + 3/2]$  и оно не может возрасти, если функция  $\{u_j^{n+1}, V_{j+1/2}^0\}$  имеет внутри этого отрезка два или три таких экстремума. Поэтому достаточно рассмотреть функции  $\{u_j^{n+1}, V_{j+1/2}^0\}$ , имеющие на отрезке  $[k - 1/2, k + 3/2]$  один обобщенный локальный экстремум. С точностью до перемены местами знаков “больше” и “меньше” возможны три различных случая таких функций:

$$V_{k-1/2}^0 < u_k^{n+1} \geq V_{k+1/2}^0 \geq u_{k+1}^{n+1} \geq V_{k+3/2}^0, \quad (4.40)$$

$$V_{k-1/2}^0 \leq u_k^{n+1} \leq V_{k+1/2}^0 \geq u_{k+1}^{n+1} \geq V_{k+3/2}^0, \quad (4.41)$$

$$V_{k-1/2}^0 \leq u_k^{n+1} \leq V_{k+1/2}^0 \leq u_{k+1}^{n+1} > V_{k+3/2}^0, \quad (4.42)$$

где в каждой из формул (4.40)–(4.42) один из знаков  $\leq$  и  $\geq$  должен быть строгим.

Поскольку функция (4.40) удовлетворяет на отрезке  $[k, k + 1]$  условию леммы 2, в силу чего

$$V_{k+1/2}^1 = U_{k+1/2}^{n+3/2} \geq u_{k+1}^{n+1}, \quad (4.43)$$

функция (4.41) удовлетворяет на этом отрезке условию леммы 4, в силу чего

$$V_{k+1/2}^1 \geq \min(u_k^{n+1}, u_{k+1}^{n+1}), \quad (4.44)$$

и функция (4.42) удовлетворяет на отрезке  $[k, k + 1]$  условию леммы 2, а на отрезке  $[k - 1/2, k + 1]$  – условию леммы 3, в силу чего

$$u_k^{n+1} \leq V_{k+1/2}^1 \leq u_{k+1}^{n+1}, \quad (4.45)$$

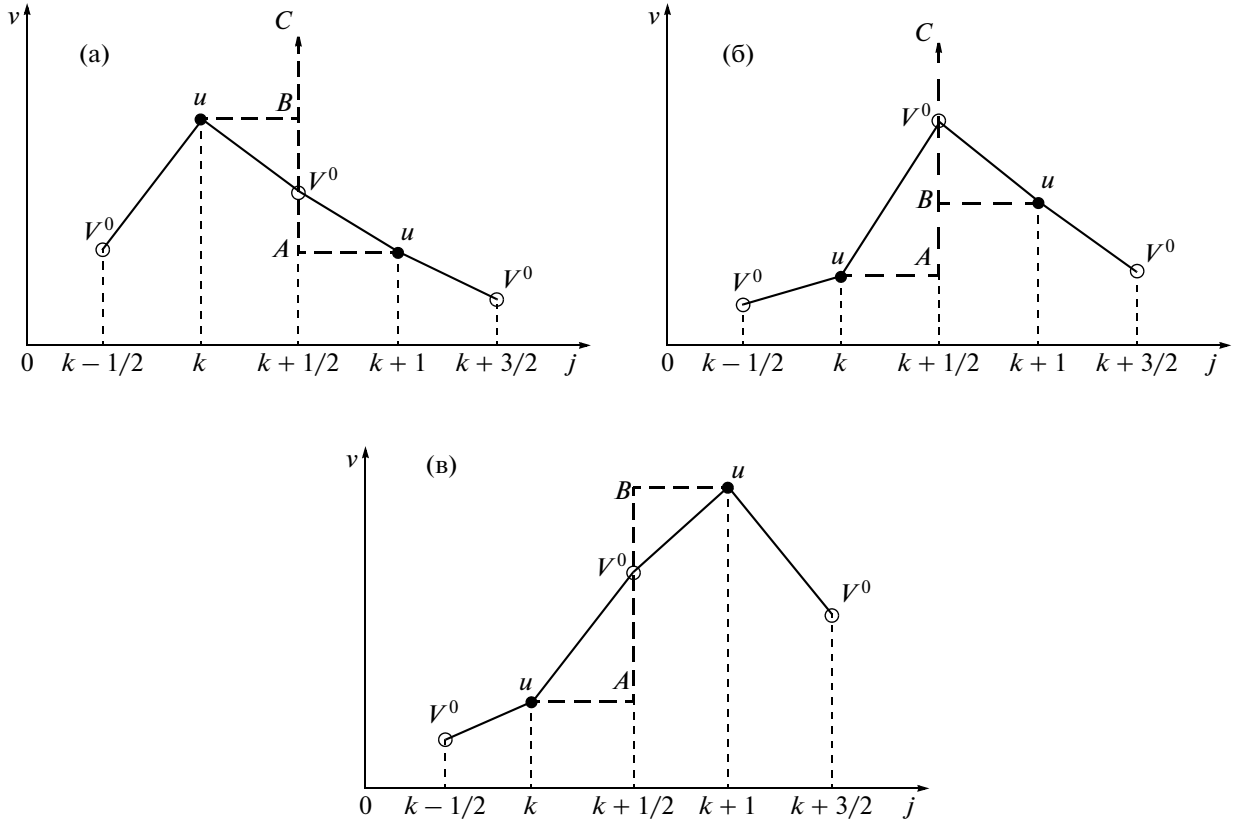
то во всех трех случаях (4.40)–(4.42) функция  $\{u_j^{n+1}, V_{j+1/2}^1\}$ , как и функция  $\{u_j^{n+1}, V_{j+1/2}^0\}$ , имеет на отрезке  $[k - 1/2, k + 3/2]$  единственный обобщенный локальный максимум. Для иллюстрации этого на фиг. 2 приведены графики функций  $\{u_j^{n+1}, V_{j+1/2}^0\}$ , у которых все неравенства в формулах (4.40)–(4.42) являются строгими. Вертикальными лучами  $ABC$  на фиг. 2а, 2б и отрезком  $[AB]$  на фиг. 2в показаны допустимые неравенствами (4.43)–(4.45) значения  $V_{k+1/2}^1$ .

Если на фиг. 2а точка  $V_{k+1/2}^1$  лежит на луче  $ABC$  ниже точки  $B$ , т.е.

$$u_k^{n+1} > V_{k+1/2}^1 \geq u_{k+1}^{n+1}, \quad (4.46)$$

то функция  $\{u_j^{n+1}, V_{j+1/2}^1\}$ , как и функция  $\{u_j^{n+1}, V_{j+1/2}^0\}$ , имеет строгий локальный максимум в узле  $k$ . При  $u_k^{n+1} = V_{k+1/2}^1$  этот максимум становится обобщенным типа (2.6), а при  $u_k^{n+1} < V_{k+1/2}^1$ , т.е. когда точка  $V_{k+1/2}^1$  лежит на луче  $ABC$  выше точки  $B$ , он переходит в строгий максимум, расположенный в узле  $k + 1/2$ . Если на фиг. 2б точка  $V_{k+1/2}^1$  лежит на луче  $ABC$  выше точки  $B$ , т.е.  $V_{k+1/2}^1 > u_{k+1}^{n+1}$ , то функция  $\{u_j^{n+1}, V_{j+1/2}^1\}$ , как и функция  $\{u_j^{n+1}, V_{j+1/2}^0\}$ , имеет строгий локальный максимум в узле  $k + 1/2$ . При  $V_{k+1/2}^1 = u_{k+1}^{n+1}$  этот максимум становится обобщенным типа (2.7), а при

$$u_k^{n+1} \leq V_{k+1/2}^1 < u_{k+1}^{n+1}, \quad (4.47)$$



Фиг. 2.

т.е. когда точка  $V_{k+1/2}^1$  лежит на луче  $ABC$  ниже точки  $B$ , он переходит в строгий максимум, расположенный в узле  $k + 1$ . Если на фиг. 2в точка  $V_{k+1/2}^1$  лежит на отрезке  $[AB]$  ниже точки  $B$ , т.е.

$$u_k^{n+1} \leq V_{k+1/2}^1 < u_{k+1}^{n+1}, \tag{4.48}$$

то функция  $\{u_j^{n+1}, V_{j+1/2}^1\}$ , как и функция  $\{u_j^{n+1}, V_{j+1/2}^0\}$ , имеет строгий локальный максимум в узле  $k + 1$ . При  $V_{k+1/2}^1 = u_{k+1}^{n+1}$  этот максимум становится обобщенным типа (2.7).

Таким образом, показано, что при переходе  $\{u_j^{n+1}, V_{j+1/2}^0\} \rightarrow \{u_j^{n+1}, V_{j+1/2}^1\}$  количество обобщенных локальных экстремумов не возрастает. Аналогичным образом последовательно при всех  $s = \overline{1, L-1}$  доказывается невозрастание числа обобщенных локальных экстремумов при переходах  $\{u_j^{n+1}, V_{j+1/2}^s\} \rightarrow \{u_j^{n+1}, V_{j+1/2}^{s+1}\}$ , где

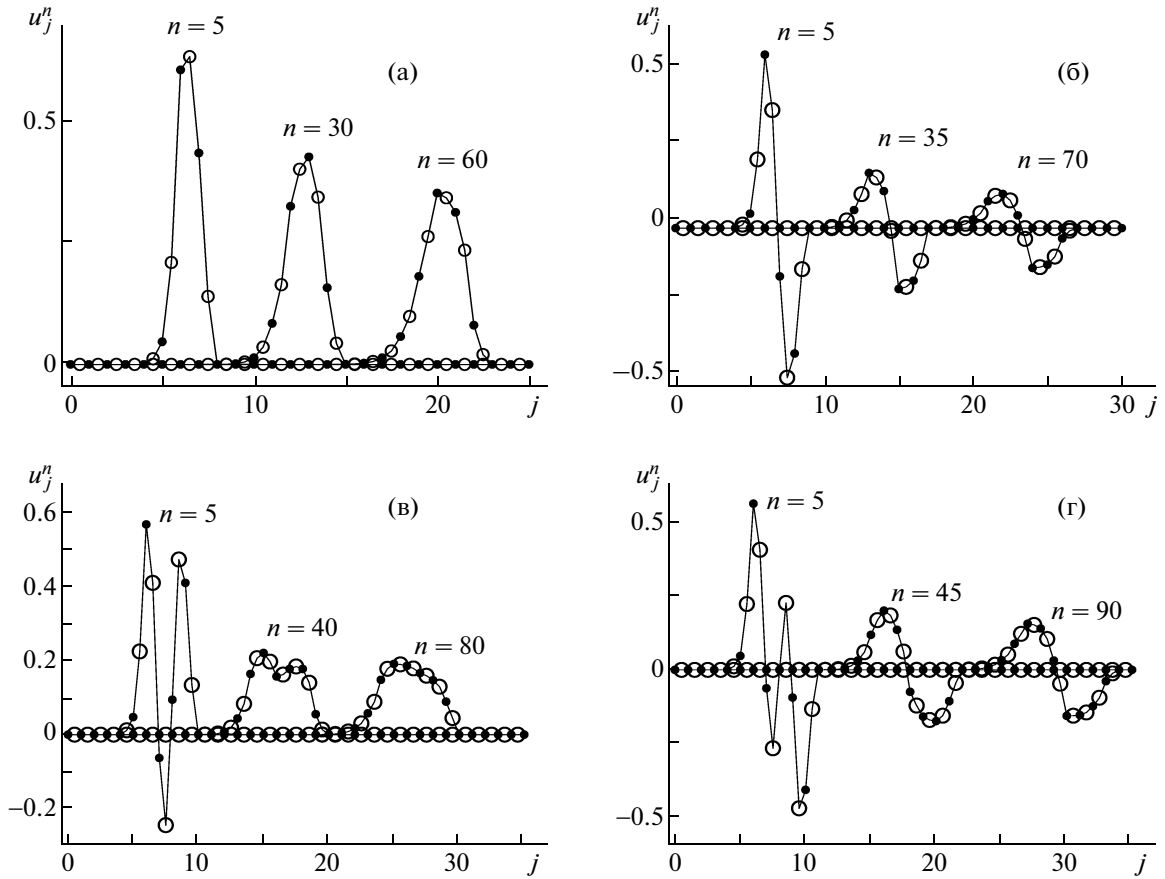
$$V_{j+1/2}^s = \begin{cases} U_{j+1/2}^{n+1/2}, & j \in I_s^*, \\ U_{j+1/2}^{n+3/2}, & j \in J_s^*, \end{cases} \quad I_s^* = I_{s-1}^* \setminus \{j_s^*\}, \quad J_s^* = J_{s-1}^* \cup \{j_s^*\}, \quad s = \overline{2, L}. \tag{4.49}$$

В результате утверждение леммы следует из того, что

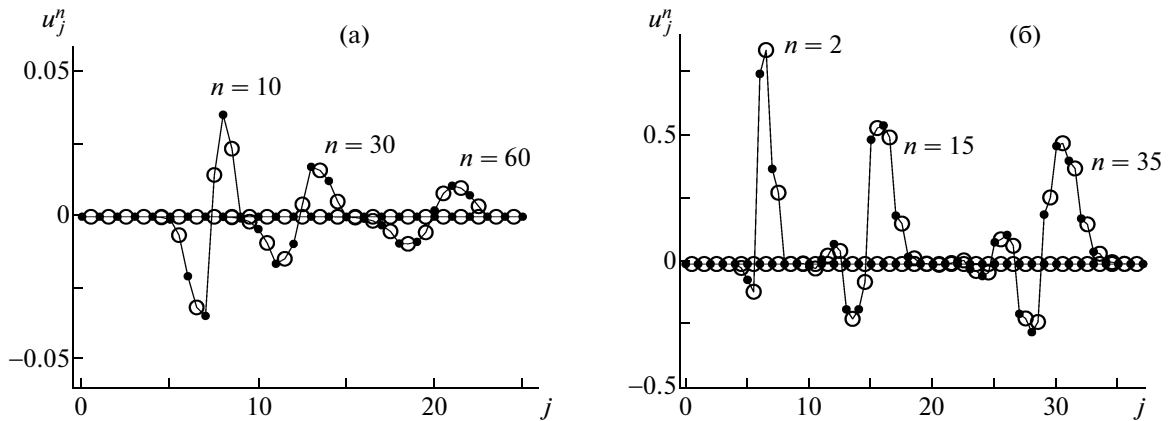
$$I_L^* = \emptyset \Rightarrow V_{j+1/2}^L = U_{j+1/2}^{n+3/2} \quad \forall j \in \mathbf{Z} \Rightarrow \{u_j^{n+1}, V_{j+1/2}^L\} = \{u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1/2}\}.$$

Лемма доказана. Теорема доказана.

Из этой теоремы очевидно, что из монотонности схемы КАБАРЕ на основном временном шаге (1.5)–(1.9) следует ее сильная монотонность на этом шаге. С учетом теоремы 1 это означает, что из монотонности схемы КАБАРЕ (1.4)–(1.9) следует ее сильная монотонность.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

### 5. РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕСТОВЫХ РАСЧЕТОВ

На фиг. 3 и 4 на три последовательных момента времени приведены результаты тестовых расчетов по схеме КАБАРЕ (1.4)–(1.9) задачи Коши для линейного уравнения переноса (1.1) с начальными данными, имеющими от одного до четырех строгих локальных экстремумов. Расчеты проводились на сетке с пространственным шагом  $h = 0.1$  при числах Куранта  $r = 0.25$  (фиг. 3, 4а) и  $r = 0.75$  (фиг. 4б). Точками показаны значения потоковых переменных  $u_j^n$ , а кружками – консер-

вативных переменных  $U_{j+1/2}^{n+1/2}$ . В порядке возрастания индекса  $j$  центры этих кружков соединены тонкой линией.

На фиг. 3а и 4 показаны расчеты с сеточными начальными данными

$$u_5^0 = 1, \quad u_j^0 = 0 \quad \forall j \neq 5, \quad (5.1)$$

имеющими один локальный экстремум в узле  $j = 5$ ; на фиг. 3б — с начальными данными

$$u_5^0 = 1, \quad u_6^0 = -1, \quad u_j^0 = 0 \quad \forall j \neq 5, 6, \quad (5.2)$$

имеющими два локальных экстремума в узлах  $j = 5, 6$ ; на фиг. 3в — с начальными данными

$$u_5^0 = 1, \quad u_6^0 = -1, \quad u_7^0 = 1, \quad u_j^0 = 0 \quad \forall j \neq 5, 6, 7, \quad (5.3)$$

имеющими три локальных экстремума в узлах  $j = 5, 6, 7$ ; и на фиг. 3г — с начальными данными

$$u_5^0 = 1, \quad u_6^0 = -1, \quad u_7^0 = 1, \quad u_8^0 = -1, \quad u_j^0 = 0 \quad \forall j \neq 5, 6, 7, 8, \quad (5.4)$$

имеющими четыре локальных экстремума в узлах  $j = 5, 6, 7, 8$ . Для фиг. 3 и 4б начальные данные для консервативных переменных  $U_{j+1/2}^0$  задаются по формуле (2.1), а для фиг. 4а — по формуле  $U_{j+1/2}^0 = 0 \quad \forall j$ . Как следует из фиг. 3, в разностном решении, полученном по сильно монотонной схеме КАБАРЕ (удовлетворяющей условиям теорем 1 и 2), количество локальных экстремумов с течением времени не возрастает. В решениях, полученных по схемам КАБАРЕ, не удовлетворяющим условиям теоремы 1 (фиг. 4а) или теоремы 2 (фиг. 4б) число локальных экстремумов на временных слоях  $n \geq 1$  больше, чем в начальный момент времени ( $n = 0$ ).

Из фиг. 3 также следует, что сильно монотонная схема КАБАРЕ с течением времени заметно уменьшает начальную амплитуду локальных экстремумов. Более того, как видно из фиг. 3в и 3г, внутренние локальные экстремумы с ростом номера временного слоя  $n$  полностью исчезают. Это связано с тем, что используемая в схеме КАБАРЕ коррекция (1.6)–(1.8) потоковых переменных (1.5) приводит к снижению до первого порядка аппроксимации в окрестностях локальных экстремумов точного решения. Этим недостатком обладают и многие другие схемы повышенной точности, в которых монотонность (см. [13]–[15]) (или TVD-свойство (см. [12], [16])) достигается за счет минимаксной коррекции потоковых переменных. Для преодоления этого недостатка в [17] была предложена специальная модификация TVD-схемы, связанная с введением ENO-свойства. Однако эта модификация приводит к увеличению пространственного шаблона исходной TVD-схемы, что с прикладной точки зрения является крайне нежелательным. Поэтому в дальнейшем планируется разработать ENO-модификацию схемы КАБАРЕ, при которой она будет иметь повышенную точность в областях локальных экстремумов, сохраняя исходную компактность пространственного шаблона.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов Ф.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М: Физматлит, 2001.
3. Головизнин В.М. Балансно-характеристический метод численного решения уравнений газовой динамики // Докл. РАН. 2005. Т. 403. № 4. С. 1–6.
4. Woodward P., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comput. Phys. 1984. V. 54. № 1. P. 115–173.
5. Головизнин В.М., Самарский А.А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Матем. моделирование. 1998. Т. 10. № 1. С. 86–100.
6. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. New efficient high-resolution method for nonlinear problems in aeroacoustics // AIAA Journal. 2007. V. 45. № 12. P. 2861–2871.
7. Karabasov S.A., Berloff P.S., Goloviznin V.M. Cabaret in the ocean gyres // Ocean Modelling. 2009. V. 30. № 2. P. 155–168.
8. Остапенко В.В. О монотонности балансно-характеристической схемы // Матем. моделирование. 2009. Т. 21. № 7. С. 29–42.
9. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
10. Остапенко В.В. О монотонности разностных схем // Сибирск. матем. ж. 1998. Т. 39. № 5. С. 1111–1126.

11. *Остапенко В.В.* О сильной монотонности трехточечных разностных схем // Сибирск. матем. ж. 1998. Т. 39. № 5. С. 1357–1367.
12. *Liu X., Tadmor E.* Third order nonoscillatory central scheme for hyperbolic conservation laws // Numer. Math. 1998. V. 79. P. 397–425.
13. *Boris J.P., Book D.L., Hain K.* Flux-corrected transport. II. Generalizations of the method // J. Comput. Phys. 1975. V 18. № 3. P. 248–283.
14. *Колган В.П.* Применение операторов сглаживания в разностных схемах высокого порядка точности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 18. № 5. С. 1340–1345.
15. *Leer B.* Toward the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. 1979. V. 32. № 1. P. 101–136.
16. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. 1983. V. 49. P. 357–393.
17. *Harten A., Osher S.* Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes // SIAM J. Numer. Analys. 1987. V. 24. № 2. P. 279–309.