ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2004, т. 246, с. 20–42

УДК 512.7

# Эквивалентность МакКея для симплектических разрешений фактор-особенностей

©2004 г. Р. В. Безрукавников[1], Д. Б. Каледин[2]

Поступило в феврале 2004 г.

Мы рассматриваем произвольное крепантное разрешение $X$ фактора $V/G$ симплектического векторного пространства $V$ по конечной группе $G \subset \mathrm{Sp}(V)$ и доказываем, что производная категория когерентных пучков на $X$ эквивалентна производной категории $G$-эквивариантных когерентных пучков на $V$.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathsf{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики 0, $V$ — конечномерное векторное пространство над $\mathsf{K}$, снабженное невырожденной кососимметрической формой $\omega \in \Lambda^2(V^*)$, а $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(V)$ — конечная подгруппа. Предположим, что дано разрешение особенностей фактор-многообразия $\pi\colon X \to V/\Gamma$ такое, что симплектическая форма продолжается с гладкой части $V/\Gamma$ до невырожденной замкнутой 2-формы $\Omega \in H^0(\Omega^2_X)$. Цель настоящей работы — доказать следующий результат.

**Теорема 1.1.** *Существует эквивалентность $\mathcal{O}_V^\Gamma$-линейных триангулированных категорий $D^b(\mathrm{Coh}(X)) \cong D^b(\mathrm{Coh}^\Gamma(V))$.*

Гипотеза такого типа впервые была сформулирована М. Ридом [22]; более общее утверждение было недавно высказано в качестве гипотезы А. Бондалом и Д. Орловым [5, § 5].

В случае $\dim V = 2$ подобная эквивалентность хорошо известна [14, 7]; наше общее доказательство опирается на эти результаты. Недавно утверждение, подобное нашему, было доказано Т. Бриджландом, А. Кингом и М. Ридом [3] для крепантных разрешений горенштейновых факторов векторных пространств размерности 3. Подход, использованный в [3], весьма элегантен, но работает, к сожалению, только в размерности 3. Наша работа — это попытка обобщить на высшие размерности если не подход, то хотя бы сам результат. Наш метод работает только для симплектических фактор-особенностей, а не для любых горенштейновых. Заметим, однако, что наше дополнительное условие на разрешение не ограничительно — на самом деле всякое крепантное разрешение $X$ симплектической фактор-особенности снабжено невырожденной симплектической формой (см. [11]).

Доказательство использует редукцию в простую характеристику и квантование симплектического многообразия $X_{\mathsf{k}}$ над полем $\mathsf{k}$ характеристики $p > 0$. Наш метод основан на результатах [2].

Ключевой ингредиент доказательства — квантование $X_{\mathsf{k}}$, глобальные сечения которого совпадают со стандартным квантованием $H^0(\mathcal{O}_X) = H^0(V, \mathcal{O}_V)^\Gamma$. Мы имеем в виду под этим такую деформацию структурного пучка $\mathcal{O}_X$ в пучок некоммутативных $\mathsf{k}[[h]]$-алгебр $\mathcal{O}_h(X)$, что алгебра глобальных сечений $H^0(X, \mathcal{O}_h)$ отождествляется с подалгеброй $\mathcal{W}^\Gamma \subset \mathcal{W}$ $\Gamma$-инвариантных векторов в (пополненной) алгебре Вейля $\mathcal{W}$ векторного пространства $V$.

[1]Northwestern University, Evanston IL 60208, USA.
E-mail: bezrukav@math.northwestern.edu

[2]Отдел алгебры, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: kaledin@mccme.ru

Оказывается, что над общей точкой $\operatorname{Spec} \mathsf{k}[[h]]$ квантованная алгебра $\mathcal{O}_h$ представляет собой алгебру Адзумая на $X^{(1)}$ — фробениус-скручивании $X$; также она дает алгебру Адзумая на $X^{(1)}_{\mathsf{k}}$. Категория модулей над последней есть категория когерентных пучков на каком-то джербе над $X^{(1)}$.

Затем замечаем, что описанная выше алгебра Адзумая на $X^{(1)}$ *аффинна в производном смысле*, т.е. производный функтор от функтора глобальных сечений дает эквивалентность между производной категорией пучков модулей и производной категорией модулей над ее глобальными сечениями; причем алгебра глобальных сечений отождествляется с $\mathsf{W}^\Gamma$, где $\mathsf{W}$ — редукция алгебры Вейля в точке $h = 1$.

Более того, для больших $p$ имеем эквивалентность Мориты между $\mathsf{W}^\Gamma$ и $\mathsf{W}\#\Gamma$ — скрученным произведением $\mathsf{W}$ и $\Gamma$. Таким образом получаем эквивалентность между $D^b(\mathcal{W}\#\Gamma\text{-mod}^{\mathsf{fg}})$ и производной категорией модулей над алгеброй Адзумая на $X^{(1)}$. Алгебра $\mathsf{W}$ — алгебра Адзумая на $V^{(1)}$; тем самым последняя эквивалентность отличается от требуемой на, грубо говоря, подкрутку на какой-то джерб. Затем, используя норменное отображение на группах Брауера, переходим от пучков на джербе к когерентным пучкам на соответствующем многообразии.

Так строится эквивалентность над полем $\mathsf{k}$ большой положительной характеристики; над полем характеристики нуль требуемое утверждение выводится с помощью стандартной процедуры.

Из теоремы 1.1 следует более-менее непосредственно, что любое крепантное разрешение $X$ фактор-особенности $V/\Gamma$ есть пространство модулей $\Gamma$-эквивариантных артиновых пучков на $V$, удовлетворяющих какому-либо условию типа стабильности (то, что сейчас принято называть *$G$-созвездиями*). Это важная тема, которая заслуживает дальнейшего изучения; однако указать условие типа стабильности точно — нетривиальная задача, которую мы предпочли отложить до будущей отдельной статьи. Среди прочего, в случае $X = \operatorname{Hilb}^n(\mathbb{A}^2)$ — схемы Гильберта $n$ точек на аффинной плоскости эти рассуждения должны давать прямое невычислительное доказательство так называемой $n$!-гипотезы, доказанной недавно М. Хайманом [8]. Заметим также, что, как только известно, что $X$ — пространство модулей $G$-созвездий, теорему 1.1 можно доказать методом [3]; это, однако, довольно бессмысленно, поскольку для того, чтобы придать произвольному разрешению $X$ модулярный смысл, уже нужно использовать теорему 1.1. Следует отметить, что [3, Corollary 1.3] в этом смысле весьма обманчиво, потому что на самом деле предполагает, что разрешение есть $G$-схема Гильберта (хотя это вообще не упомянуто в формулировке и видно только из обозначений, которые введены где-то на предыдущей странице).

Легко видеть, что категория $\Gamma$-эквивариантных когерентных пучков на $V$ эквивалентна категории конечно порожденных модулей над некоторой некоммутативной алгеброй. Недавно Б. Келлер [15] ввел определение так называемых групп *гомологий Хохшильда* абелевой категории. Гомологии Хохшильда категории конечно порожденных модулей над алгеброй равны гомологиям Хохшильда алгебры; в частности, группа гомологий $HH_k$ тривиальная при $k < 0$. С другой стороны, группа гомологий Хохшильда $HH_k$ категории когерентных пучков на гладком алгебраическом многообразии $X$ над полем характеристики 0 изоморфна сумме $H^{p-k}(X, \Omega^p_X)$. Но определение Келлера инвариантно по отношению к функторам, которые индуцируют эквивалентность производных категорий. Поэтому из теоремы 1.1 следует, что $H^p(X, \Omega^q_X) = 0$ для $p > q$. В симплектическом случае это сводится к более привычному $H^p(X, \Omega^q_X) = 0$, $p + q > \dim X$, и это было доказано в [12] (причем мы используем этот факт в доказательстве теоремы 1.1). В общем случае, однако, требуемое обращение в нуль весьма сильно и выглядит очень странно. Из-за этого возникают сомнения в том, что теорема 1.1 верна для крепантных разрешений общих горенштейновых фактор-особенностей $V/\Gamma$.

**1.1. Обозначения.** Пара $\langle V, \omega\rangle$ — симплектическое векторное пространство, $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(V)$ — конечная подгруппа, $\pi\colon X \to V/\Gamma$ — фиксированное разрешение особенностей такое, что $\omega$ продолжается до симплектической формы на всем $X$, $\eta\colon V \to V/\Gamma$ — естественная проекция. Групповая алгебра группы $\Gamma$ с коэффициентами в кольце $R$ обозначается через $R[\Gamma]$. Для произвольной $\mathsf{k}$-алгебры $A$, снабженной действием $\Gamma$, определяем *скрученное произведение* $A\#\Gamma$ как алгебру, которая совпадает с $A[\Gamma]$ как векторное пространство, а умножение в ней определяется тождеством

$$(a_1 \cdot \gamma_1)(a_2 \cdot \gamma_2) = a_1 a_2^{\gamma_1} \cdot \gamma_1\gamma_2, \qquad a_1, a_2 \in A, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma.$$

Алгебра Вейля $\mathsf{W}_h$ определяется как

$$\mathsf{W}_h = \mathsf{k}[h]\langle V^*\rangle / \bigl(xy - yx = h\omega^{-1}(x,y)\bigr);$$

формальная алгебра Вейля $\mathcal{W}$ — $h$-адическое пополнение $\mathsf{W}_h$. Мы определяем в $V$ $\Gamma$-подсхемы $V_i \subset V$ как

$$V_i = \bigl\{v \in V \mid \operatorname{\mathsf{dim}} V^{\mathrm{Stab}_\Gamma(v)} \leq 2i + \operatorname{\mathsf{dim}} V^\Gamma\bigr\}$$

и полагаем $X_i = \pi^{-1}(V_i/\Gamma)$ (все это на самом деле будет использовано только для $i = 0, 1$). Для коммутативной алгебры $\mathcal{O}$ характеристики $p$ полагаем $\mathcal{O}^p = \{f^p \mid f \in \mathcal{O}\}$. Для схемы $X$ над полем характеристики $p$ через $X^{(1)}$ обозначается фробениус-скручивание $X$, а через $\mathsf{Fr}\colon X \to X^{(1)}$ отображение Фробениуса. В наших приложениях $X$ всегда будет приведено; в этом случае $X^{(1)} = \langle X, \mathcal{O}_X^p\rangle$. Более того, базовое поле будет совершенным, так что скручивание $X^{(1)}$ изоморфно $X$ как абстрактная схема; однако зачастую удобно различать их на уровне обозначений.

Если $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая на схеме $X$, то через $\mathrm{Coh}(X, \mathcal{A})$ мы будем обозначать категорию когерентных пучков $\mathcal{A}$-модулей.

**1.2. Благодарности.** Мы хотели бы поблагодарить Д. Аринкина, В. Вологодского, В. Гинзбурга, А. Кузнецова и М. Финкельберга за дружескую помощь в разных математических вопросах (в частности, замечание 2.8 нам указал Кузнецов). Второй автор хотел бы поблагодарить профессора М. Лена за полезные обсуждения. Наконец, мы должны признать интеллектуальный долг перед И. Мирковичем и Д. Румыниным. Настоящая статья, по крайней мере частично, возникла как попытка выделить адекватный геометрический контекст для их идей по геометрии и теории представлений в положительной характеристике.

Несколько лет назад первый автор сделал доклад на семинаре отдела алгебры Математического института им. В.А. Стеклова РАН, где рассказал о результатах Мирковича и Румынина и предложил с некоторым скептицизмом возможные их обобщения; в сущности настоящая статья есть реализация намеченной тогда программы. На докладе присутствовал А.Н. Тюрин, который немедленно поверил в наши смутные предположения и с энтузиазмом их поддержал. Настоящая работа подтверждает его правоту. К сожалению, рассказать Андрею Николаевичу о полученных результатах нам не пришлось.

## 2. ПОЧТИ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ОБЪЕКТЫ

Цель этого раздела — показать, что теорема 1.1 в значительной степени вытекает из совершенно общих гомологических аргументов.

**Определение 2.1.** Ненулевой объект $M$ абелевой категории называется *почти исключительным*, если $\mathrm{Ext}^i(M, M) = 0$ при $i > 0$, а алгебра $\mathrm{End}(M)$ имеет конечную гомологическую размерность.

**Предложение 2.2.** *Пусть $Y$ — гладкое неприводимое многообразие над полем $k$, имеющее тривиальный канонический класс; предположим, что существует собственный морфизм из $Y$ в аффинное $k$-многообразие $S$. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая на $Y$. Если $\mathcal{E} \in \in \mathrm{Coh}(X, \mathcal{A})$ — почти исключительный объект, то функтор $\mathcal{F} \mapsto \mathrm{RHom}^\bullet(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ из производной категории $D^b(\mathrm{Coh}(X, \mathcal{A}))$ в производную категорию $D^b(\mathrm{End}(\mathcal{E})^{\mathrm{op}}\text{-}\mathrm{mod}^{\mathsf{fg}})$ конечно порожденных $\mathrm{End}(\mathcal{E})$-модулей представляет собой эквивалентность категорий.*

Предложение 2.2, примененное к $\mathcal{A} = \mathcal{O}$, немедленно показывает, что для доказательства теоремы 1.1 достаточно доказать следующее.

**Теорема 2.3.** *Существует такое векторное расслоение $\mathcal{E}$ на $X$, что*

(i) *$\mathcal{O}_V^\Gamma$-алгебра $\mathrm{End}(\mathcal{E})$ изоморфна скрученному произведению $\mathcal{O}_V\#\Gamma$;*

(ii) *$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 0$ при $i > 0$.*

Эту теорему мы и будем доказывать в оставшейся части работы после того, как в п. 2.2 докажем предложение 2.2 (чтобы избежать путаницы между левыми и правыми модулями, заметим сразу, что, поскольку $V \cong V^*$ как $\Gamma$-модуль, имеем $(\mathcal{O}_V\#\Gamma)^{\mathrm{op}} \cong \mathcal{O}_V\#\Gamma$). Кроме того, в п. 2.3 мы покажем, что почти исключительные объекты обладают значительной жесткостью, так что в сущности достаточно построить расслоение $\mathcal{E}$ после редукции в простую характеристику.

**Замечание 2.4.** Можно показать, что условия на векторное расслоение $\mathcal{E}$ в теореме 2.3 эквивалентны следующим:

(a) $\mathcal{E}_{X_0} \cong \pi^*\eta_*(\mathcal{O})|_{X_0}$;

(b) $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 0$ при $i > 0$ и $\mathrm{End}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(\mathcal{E}|_{X_0})$.

**2.1. Категории Калаби–Яу.** Напомним некоторые общие факты гомологической алгебры. За подробностями отсылаем к работе [4].

Пусть дано поле $k$. Говорят, что $k$-линейная триангулированная категория имеет *конечный тип*, если для любых двух объектов $X, Y \in D$ пространство $\mathrm{Ext}^\bullet(X, Y) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(X, Y[i])$ конечномерно. Для такой категории Бондал и Капранов [4] определяют *функтор Серра* как набор из (ковариантной) автоэквивалентности $S\colon D \to D$ и изоморфизма $\mathrm{Hom}(X, Y) \cong \cong \mathrm{Hom}(Y, S(X))^*$, зафиксированных для любых $X, Y \in D$ и удовлетворяющих определенным условиям. Если функтор Серра существует, то он единственный с точностью до единственного изоморфизма. Например, если $D$ — ограниченная производная категория когерентных пучков на гладком проективном многообразии $X$ над $k$, то $F \mapsto F \otimes K_X[\dim X]$ — функтор Серра для $D$ (где $K_X$ — каноническое линейное расслоение).

Нам понадобится небольшое обобщение этого понятия. Пусть $\mathcal{O}$ — конечно порожденная коммутативная алгебра над полем, и пусть $D$ — $\mathcal{O}$-линейная триангулированная категория; кроме того, предположим, что даны функтор $\mathsf{Hom}\colon D^{\mathrm{op}} \times D \to D^b(\mathcal{O}\text{-}\mathrm{mod}^{\mathsf{fg}})$ и функториальный изоморфизм $\mathrm{Hom}(X, Y) \cong H^0(\mathsf{Hom}(X, Y))$; набор таких данных будем называть *сильной $\mathcal{O}$-категорией.*

Триангулированная категория $D^b(\mathcal{O}\text{-}\mathrm{mod}^{\mathsf{fg}})$ снабжена канонической антиавтоэквивалентностью, а именно двойственностью Гротендика–Серра [9]. Обозначим этот функтор через $\mathbb{S}$; итак, $\mathbb{S}\colon \mathcal{F} \mapsto R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{D})$, где $\mathcal{D}$ — дуализующий пучок Гротендика, а $\mathcal{H}om$ обозначает внутренний $Hom$.

**Определение 2.5.** *Функтор Серра по отношению к $\mathcal{O}$* (или просто *$\mathcal{O}$-функтор Серра*) — это набор из (ковариантной) автоэквивалентности $S\colon D \to D$ и естественного (функториального) изоморфизма $\mathsf{Hom}(X, Y) \cong \mathbb{S}(\mathsf{Hom}(Y, S(X)))$, удовлетворяющих условиям [4].

Например, если $X$ — гладкое многообразие над $k$, снабженное проективным морфизмом $\pi\colon X \to \mathrm{Spec}\, R$, то $D^b(\mathrm{Coh}(X))$ с $\mathsf{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = R\pi_*\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ — сильная $R$-категория. Функтор

$\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F} \otimes K_X[\dim X]$ имеет естественную структуру функтора Серра по отношению к $R$; это следует из того, что двойственность Гротендика–Серра коммутирует с прямыми образами при собственных морфизмах и

$$\mathbb{S}(\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \cong \mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{F} \otimes K_X[\dim X]).$$

Следующее обобщение этого факта доказывается непосредственно.

**Лемма 2.6.** *Пусть $X$ — гладкое многообразие над $k$, снабженное, как выше, проективным морфизмом $\pi\colon X \to \operatorname{Spec} R$, и пусть $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая на $X$. Тогда $D^b(\operatorname{Coh}(X, \mathcal{A}))$ имеет естественную структуру сильной $R$-категории, а функтор $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F} \otimes K_X[\dim X]$ естественную структуру функтора Серра по отношению к $R$.* $\square$

Сильную $\mathcal{O}$-категорию будем называть *категорией Калаби–Яу*, если она допускает функтор Серра по отношению к $\mathcal{O}$, изоморфный функтору сдвига $X \mapsto X[n]$ для какого-нибудь $n \in \mathbb{Z}$.

Применения этих понятий к нашей задаче основаны на следующем результате.

**Лемма 2.7.** *Пусть $F\colon C \to D$ — триангулированный функтор между ненулевыми триангулированными категориями. Предположим, что*

(i) *$F$ допускает сопряженный слева $F'$, причем морфизм сопряженности $\mathsf{id} \to F \circ F'$ — изоморфизм;*

(ii) *$C$ неразложима, т.е. не может быть записана как $C = C_1 \oplus C_2$ с ненулевыми триангулированными категориями $C_1$, $C_2$;*

(iii) *$C$ допускает структуру сильной $\mathcal{O}$-категории для какой-либо коммутативной алгебры $\mathcal{O}$ конечного типа над полем, причем $C$ по отношению к $\mathcal{O}$ есть категория Калаби–Яу.*

*Тогда функтор $F$ — эквивалентность.*

**Доказательство.** Из условия (i) следует, что $F'$ — полное вложение и его (существенный) образ (который мы обозначаем через $I$) — допустимая справа подкатегория в $C$. Напомним, это значит, что каждый объект $\mathcal{F}$ в $C$ есть часть точного треугольника $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_1[1]$, где $\mathcal{F}_1 \in I$, а $\mathcal{F}_2 \in I^\perp$; здесь

$$I^\perp = \bigl\{\mathcal{G} \in C \mid \operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0 \ \forall \mathcal{F} \in I\bigr\}$$

— правый ортогонал к $C$ (чтобы получить такой треугольник для данного $\mathcal{F}$, полагаем $\mathcal{F}_1 = F'F(\mathcal{F})$ и берем в качестве стрелки $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}$ морфизм сопряжения, а потом дополняем ее до точного треугольника). В такой ситуации говорят, что $C$ допускает полуортогональное разложение. Из определения следует, что если $S$ — функтор Серра для $C$ (по отношению к какой-нибудь коммутативной алгебре $\mathcal{O}$ такой, что $C$ допускает сильную $\mathcal{O}$-линейную структуру), то $S^{-1}$ переводит правый ортогонал к полной подкатегории в левый ортогонал к той же подкатегории. В частности, если $C$ — категория Калаби–Яу по отношению к какой-нибудь алгебре $\mathcal{O}$, то левый ортогонал к любой триангулированной подкатегории совпадает с правым ортогоналом. Поэтому описанное выше полуортогональное разложение на самом деле ортогонально: $C = I \oplus I^\perp$; поскольку $D \neq 0$, из условия (ii) следует, что $I^\perp = 0$, а поэтому $I = C$ и $F$, $F'$ — эквивалентности категорий. $\square$

**Замечание 2.8.** Похожее (и более общее) утверждение сформулировано и доказано в [3].

Вот еще один простой вспомогательный факт.

**Лемма 2.9.** *Пусть $X$ — связное квазипроективное многообразие над полем, и пусть $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая на $X$. Тогда категория $D^b(\operatorname{Coh}(X, \mathcal{A}))$ неразложима.*

**Доказательство.** Пусть $D^b(\mathrm{Coh}(X,\mathcal{A})) = D_1 \oplus D_2$ — разложение, инвариантное относительно функтора сдвига. Пусть $P$ — неразложимое слагаемое свободного $\mathcal{A}$-модуля. Пусть $L$ — такое обильное линейное расслоение на $X$, что $H^0(L \otimes \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(P,P)) \neq 0$. Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ $\mathcal{A}$-модуль $P \otimes L^{\otimes n}$ неразложим, а потому лежит или в $D_1$, или в $D_2$. Более того, все эти модули лежат в одном и том же слагаемом, поскольку $\mathrm{Hom}(P \otimes L^{\otimes n}, P \otimes L^{\otimes m}) \neq 0$ при $n \le m$. Если $\mathcal{F}$ — объект другого слагаемого, то $\mathrm{Ext}^{\bullet}(P \otimes L^{\otimes n}, \mathcal{F}) = 0$ для $n$, откуда следует, что $\mathcal{F} = 0$. □

**2.2. Доказательство предложения 2.2.** Мы утверждаем, что функтор

$$F\colon \mathcal{F} \mapsto \mathrm{RHom}^{\bullet}(\mathcal{E},\mathcal{F})$$

удовлетворяет условиям леммы 2.7. В самом деле, левый сопряженный функтор задается $F'\colon M \mapsto M \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathrm{End}(\mathcal{E})^{\mathrm{op}}} \mathcal{F}$; он переводит ограниченные комплексы в ограниченные, поскольку у $\mathrm{End}(\mathcal{E})$ конечная гомологическая размерность. Из обращения в нуль $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E},\mathcal{E})$ следует, что $\mathsf{id} \cong F' \circ F$. Итак, имеем (i). Условие (ii) вытекает из леммы 2.9, (iii) — из леммы 2.6. □

**2.3. Жесткость.** Пусть $R$ — регулярное нётерово кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m} \subset R$ и полем вычетов $k = R/\mathfrak{m}$. Пусть дано алгебраическое многообразие $X_R$, плоское и гладкое над $R$, и пусть $X = X_R \otimes_R k$ — слой $X$ над $\mathrm{Spec}\, k \in \mathrm{Spec}\, R$.

**Лемма 2.10.** *Всякое почти исключительное расслоение $\mathcal{E}$ на $X$ единственным образом продолжается до почти исключительного расслоения $\widehat{\mathcal{E}}$ на $\mathfrak{X}$ — формальном пополнении $X_R$ в $X \subset X_R$.*

**Доказательство.** Рассмотрим фильтрацию на $R$, заданную степенями $\mathfrak{m}$, и будем строить продолжение шаг за шагом, продолжая для всех $l$ по очереди на $X_R \otimes_R (R/\mathfrak{m}^l)$. По стандартной теории деформаций на каждом шаге препятствия к продолжению $\mathcal{E}$ лежат в $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E})$, а различные продолжения параметризуются торсором над $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$. Поскольку $\mathcal{E}$ почти исключительно, обе группы равны нулю. Осталось доказать, что продолженное расслоение $\widehat{\mathcal{E}}$ почти исключительно. В самом деле, поскольку $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E},\mathcal{E}) = 0$ для всех $i \ge 1$, имеем $\mathrm{Ext}^i(\widehat{\mathcal{E}},\widehat{\mathcal{E}}) = 0$ для $i \ge 1$, $\mathrm{End}(\widehat{\mathcal{E}})$ плоско над $R$, а естественное отображение $\mathrm{End}(\widehat{\mathcal{E}})/\mathfrak{m} \to \mathrm{End}(\mathcal{E})$ — изоморфизм. Чтобы доказать, что алгебра $\mathrm{End}(\widehat{\mathcal{E}})$ имеет конечную гомологическую размерность, вычисляем группы $\mathrm{Ext}^{\bullet}$ с помощью спектральной последовательности, связанной с $\mathfrak{m}$-адической фильтрацией. □

Наши многообразия, как правило, будут некомпактны, поэтому переход от $\mathfrak{X}$ к $X_R$ требует обоснований. Чтобы получить глобальную информацию, мы используем действия $\mathbb{G}_m$. Предположим, что $X_R = \mathrm{Proj}\, \mathcal{B}^{\bullet}$ проективно над аффинным многообразием $\mathrm{Spec}\, \mathcal{B}^0$ над $R$.

**Определение 2.11.** Будем говорить, что группа $\mathbb{G}_m$ действует на $X_R$ *с положительным весом*, если все веса соответствующего действия $\mathbb{G}_m$ на $\mathcal{B}^{\bullet}$ неотрицательны.

**Лемма 2.12.** *В предположениях леммы* 2.10 *предположим также, что $R$ полно по отношению к $\mathfrak{m}$-адической фильтрации, $X_R$ снабжено действием $\mathbb{G}_m$ с положительным весом и $\mathcal{E}$ $\mathbb{G}_m$-эквивариантно. Тогда $\mathcal{E}$ единственным образом продолжается до $\mathbb{G}_m$-эквивариантного расслоения $\mathcal{E}_R$ на $X_R$.*

**Набросок доказательства.** Любое расширение мультипликативной группы с помощью унипотентной группы расщепляется; следовательно, продолжение $\mathcal{E}$ на $\mathfrak{X}$, доставляемое леммой 2.10, допускает $\mathbb{G}_m$-эквивариантную структуру. При условии положительного веса функтор пополнения — эквивалентность категорий $\mathbb{G}_m$-эквивариантных когерентных пучков на $X_R$ и на $\mathfrak{X}$. Чтобы построить обратную эквивалентность, интерпретируем по теореме Серра когерентные пучки как градуированные $\mathcal{B}^{\bullet}$-модули и заменяем модуль на подмодуль $\mathbb{G}_m$-конечных векторов. □

На самом деле не обязательно требовать от $\mathcal{E}$ $\mathbb{G}_m$-эквивариантности — всякое почти исключительное векторное расслоение автоматически эквивариантно по отношению к любому действию $\mathbb{G}_m$ с положительными весами. Мы опускаем доказательство, поскольку оно довольно техническое; в наших приложениях $\mathbb{G}_m$-эквивариантная структура получается прямыми геометрическими рассуждениями (см. предложение 4.3).

## 3. КВАНТОВАНИЯ

В этим разделе мы приводим некоторые общие факты о квантовании алгебраических многообразий положительной характеристики. Мы не пытаемся достичь сколько-нибудь заметной общности и доказываем только то, что нужно для доказательства теоремы 1.1.

До конца этого раздела предполагается, что все объекты определены над фиксированным полем $\mathsf{k}$.

**3.1. Стандартные определения.** Квантование (формальное) пуассоновой $\mathsf{k}$-алгебры $\langle\mathcal{O},\{\cdot,\cdot\}\rangle$ определяется обычным образом; итак, квантование есть ассоциативная плоская $\mathsf{k}[[h]]$-алгебра $\mathcal{O}_h$, полная и отделимая в топологии, порожденной степенями $h^i\mathcal{O}_h$, и снабженная таким изоморфизмом $\mathcal{O}_h/h\mathcal{O}_h\cong\mathcal{O}$, что коммутатор в $\mathcal{O}_h$ равен $h\{\cdot,\cdot\} \mod h^2\mathcal{O}_h$.

Если $X$ — пуассонова схема, то квантование $X$ — пучок $\mathsf{k}[h]$-алгебр $\mathcal{O}_h$ на $X$, снабженный изоморфизмом $\mathcal{O}_h/h\mathcal{O}_h\cong\mathcal{O}_X$ и такой, что алгебра сечений $\mathcal{O}_h(U)$ на любом аффинном открытом подмножестве $U$ есть квантование $\mathcal{O}(U)$. Проверяется, что квантование алгебры задает квантование ее локализации (см., например, [13, § 2.1]), так что квантование пуассоновой алгебры $A$ определяет квантование пуассоновой схемы $X=\operatorname{Spec}A$.

Ниже мы в основном будем работать с примерами, в которых $X$ — симплектическое многообразие.

**Пример 3.1.** Для гладкого аффинного многообразия $M$ над $\mathsf{k}$ алгебра $D_h(M)$ *асимптотических дифференциальных операторов* на $M$ — это $h$-пополнение алгебры, порожденной $\mathcal{O}_M$ и $\operatorname{Vect}(M)$ по модулю обычных соотношений $f_1\cdot f_2=f_1f_2$, $f\cdot\xi=f\xi$, $\xi\cdot f-f\cdot\xi=h\xi(f)$, $\xi_1\xi_2-\xi_2\xi_1=h[\xi_1,\xi_2]$. Как обычно, легко проверяется, что $D_h(M)$ — квантование симплектического многообразия $T^*M$.

Склеивая квантования, полученные этой конструкцией, получаем для любого гладкого многообразия $M$ над $\mathsf{k}$ пучок $D_h(M)$, который представляет собой квантование $T^*M$.

Заметим, что, когда $\operatorname{char}\mathsf{k}$ положительно, эта конструкция связана с так называемыми кристальными дифференциальными операторами Мирковича и Румынина (PD-дифференциальные операторы в терминологии [1]), а не с более широко известными дифференциальными операторами Гротендика (вторые содержат разделенные степени векторного поля, первые — нет).

Нам также понадобится градуированная версия квантований. Предположим, что пуассонова схема $X$ снабжена действием $\mathbb{G}_m$, причем скобка Пуассона имеет вес $-2$ (другими словами, $\deg\{f,g\}=\deg f+\deg g-2$ для любых двух однородных локальных функций $f$, $g$ на $X$). Будем говорить, что квантование $\mathcal{O}_h$ схемы $X$ *градуировано*, если оно снабжено таким действием $\mathbb{G}_m$, что $h$ имеет вес 2, а изоморфизм $\mathcal{O}_h/h\cong\mathcal{O}_X$ $\mathbb{G}_m$-эквивариантен. Например, стандартное квантование $\mathcal{W}$ симплектического векторного пространства градуировано (см. пример 3.6).

**3.2. Квантования как деформации.** Квантования по самому их определению можно изучать с помощью теории деформаций. В последнее время принято сводить все вопросы теории деформаций к решению уравнения Маурера–Картана в той или иной дифференциально градуированной алгебре Ли. В характеристике 0, возможно, этот метод можно применить к квантованиям и даже получить какие-то полезные результаты, но для нас это неважно: мы в основном изучаем ситуацию в положительной характеристике, где формализм дифференциально градуированных алгебр Ли теряет смысл. Поэтому нам придется работать с деформациями шаг за шагом традиционным стандартным способом. Таким образом многого получить не удается, но один нужный нам результат о продолжении доказать можно.

Пусть $X$ — гладкое многообразие. Напомним, что по стандартной теории деформаций деформации структурного пучка $\mathcal{O}_X$ в классе пучков ассоциативных алгебр контролируются группами когомологий Хохшильда $HH^i(X)$, $i = 1, 2, 3$, иными словами группами

$$\operatorname{Ext}^i_{X \times X}(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{O}_\Delta), \qquad i = 2, 3,$$

где $\Delta \subset X \times X$ обозначает диагональ. Классы эквивалентности деформаций лежат в группе $HH^2(X)$, а препятствия лежат в группе $HH^3(X)$.

**Лемма 3.2.** (i) *Пусть $U \subset X$ — открытое подмножество, и предположим, что отображение ограничения*

$$HH^i(X) \to HH^i(U)$$

*биективно для $i = 1, 2$ и инъективно для $i = 3$. Тогда любое квантование $U$ единственным образом продолжается до квантования $X$.*

(ii) *Предположим, что $X$ снабжено действием $\mathbb{G}_m$, которое сохраняет $U \subset X$, причем скобка Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ в $\mathcal{O}_X$ имеет вес $-2$, и обозначим через $HH^\bullet_-(X) \subset HH^\bullet(X)$, $HH^\bullet_-(U) \subset HH^\bullet(U)$ подпространства векторов отрицательного веса по отношению к $\mathbb{G}_m$. Предположим, что отображение ограничения $HH^i_-(X) \to HH^i_-(U)$ биективно для $i = 1, 2$ и инъективно для $i = 3$. Тогда всякое градуированное квантование $U$ единственным образом продолжается до градуированного квантования $X$.*

**Набросок доказательства.** Под деформацией $\mathcal{O}_n$ порядка $n$ структурного пучка $\mathcal{O}_X$ будем понимать пучок плоских $\mathsf{k}[h]/h^{n+1}$-алгебр на $X$, снабженный изоморфизмом алгебр $\mathcal{O}_n/h \cong \mathcal{O}_X$. Зафиксируем деформацию $\mathcal{O}_{n-1}$ порядка $n-1$. Тогда все деформации $\mathcal{O}_n$ пучка $\mathcal{O}_X$ порядка $n$, снабженные изоморфизмом $\mathcal{O}_n/h^n \cong \mathcal{O}_{n-1}$, образуют джерб, связанный $HH^{\leq 3}(X)$ (это значит, что для какого-то фиксированного комплекса $C^\bullet$ с группами когомологий $HH^i(X)$, $i = 1, 2, 3$, и для какого-то фиксированного элемента $c \in C^3$ все эти деформации параметризуются элементами $b \in C^2$ с $d(b) = c$, причем изоморфные деформации отвечают гомологичным элементам $b_1$, $b_2$). Аналогично все такие деформации $\mathcal{O}_U$ образуют джерб, связанный $HH^{\leq 3}(U)$. Чтобы доказать (i), замечаем, что условия леммы гарантируют, что ограничение задает эквивалентность соответствующих джербов, и применяем индукцию по $n$. Чтобы доказать (ii), замечаем, что в $\mathbb{G}_m$-эквивариантной ситуации, поскольку $\deg h = 2$, соответствующие джербы связаны $HH^{\leq 3}(X)_{-2n} \subset HH^{\leq 3}(X)$, т.е. подпространством векторов веса $-2n$. В силу условий леммы эти джербы эквивалентны на каждом шаге $n$. $\square$

**3.3. Фробениусов центр.** С настоящего момента и до конца этого раздела мы предполагаем, что $\mathsf{k}$ — совершенное поле характеристики $p > 0$. Предполагаем также, что пуассонова схема $X$ приведена.

Новая черта теории в положительной характеристике — наличие в квантованной алгебре $\mathcal{O}_h$ большого центра. В ситуации примера 3.1 это явление тесно связано с понятием *$p$-кривизны* плоской связности.

Начнем с элементарного наблюдения: для любой пуассоновой $\mathsf{k}$-алгебры $\mathcal{O}$ и любого $f \in \mathcal{O}$ элемент $f^p \in \mathcal{O}$ лежит в центре алгебры Ли $\mathcal{O}$; поэтому скобка Пуассона $\mathcal{O}^p$-линейна и превращает $\mathsf{Fr}_*(\mathcal{O})$ в когерентный пучок алгебр Ли на схеме $X^{(1)} = (X, \mathcal{O}^p_X)$.

**Определение 3.3.** Квантование $\mathcal{O}_h$ пуассоновой схемы $X$ называется *фробениус-постоянным*, если вложение $\mathcal{O}^p_X \hookrightarrow \mathcal{O}$ поднимается до отображения пучков алгебр из $\mathcal{O}^p_X$ в центр $\mathcal{O}_h$.

Фробениус-постоянные квантования ближе к геометрии, чем произвольные. А именно пусть $\mathcal{O}_h$ — фробениус-постоянное квантование пуассоновой схемы $X$. Тогда $\mathcal{O}_h$ по определению есть пучок $\mathcal{O}^p$-алгебр и тем самым задает квазикогерентный пучок на формальной схеме $\widehat{X}^{(1)}$ — пополнении $X^{(1)} \times \operatorname{Spec} \mathsf{k}[h]$ в центральном слое $X^{(1)} \times \{0\}$. Легко видеть, что этот пучок локально свободен и имеет ранг $p^{\dim X}$. Его ограничение на специальный слой $\mathfrak{X}$ отождествлено с $\mathsf{Fr}_*(\mathcal{O})$. Как и в лемме 2.12, в градуированной ситуации можно сказать больше.

**Лемма 3.4.** *Пусть $X = \operatorname{Proj} \mathcal{B}^{\bullet}$ — проективное многообразие над $\operatorname{Spec} \mathcal{B}^0$, гладкое над $\mathsf{k}$ и снабженное действием $\mathbb{G}_m$ и пуассоновой скобкой веса $-2$. Предположим, что действие $\mathbb{G}_m$ на $X$ имеет положительные веса. Тогда любое градуированное фробениус-постоянное квантование $\mathcal{O}_h$ многообразия $X$ есть пополнение единственного $\mathbb{G}_m$-эквивариантного пучка алгебр на произведении $X^{(1)} \times \operatorname{Spec} \mathsf{k}[h]$.*

**Доказательство.** Как и в лемме 2.12, в силу условия положительности весов пополнение дает эквивалентность тензорных категорий $\mathbb{G}_m$-эквивариантных когерентных пучков на $X^{(1)} \times \operatorname{Spec} \mathsf{k}[h]$ и на $\widehat{X}^{(1)}$. $\square$

Фробениус-постоянные квантования — объекты, локальные как в топологии Зариского, так и в этальной. Для аффинного $X$ функтор глобальных сечений дает эквивалентность между фробениус-постоянными квантованиями $X$ и $\mathcal{O}_X$.

Введение этого понятия обусловлено следующим результатом.

**Предложение 3.5.** *Если $M$ — гладкое $\mathsf{k}$-многообразие, то $D_h(M)$ — фробениус-постоянное квантование $T^*M$.*

**Набросок доказательства.** Определим отображение из образующих $\mathcal{O}(T^*M)^p$ в $D_h(M)$. Функция $f^p \in \mathcal{O}_M^p$, поднятая с $M$, переходит в $f^p \in D_h(M)$. Послойно линейная функция на $T^*M$ есть векторное поле на $M$; для такой функции $\xi \in \operatorname{Vect}(M)$ полагаем $\xi^p \mapsto \xi^p - h^{p-1}\xi^{[p]}$, где $\xi^{[p]}$ — ограниченная степень векторного поля $\xi$. Оставшаяся часть доказательства — прямое вычисление в локальных координатах (см. [2, § 1.2]). $\square$

**Пример 3.6.** $h$-Адическое пополнение $\mathcal{W}$ алгебры Вейля $\mathsf{W}_h$ (см. п. 1.1) — фробениус-постоянное квантование симплектического пространства $V$. (Это можно считать частным случаем предложения 3.5, где за $M$ взято лагранжево подпространство в $V$.) Это квантование градуировано. Точнее, $\mathsf{W}_h$ имеет градуировку, в которой линейным функциям приписан вес 1, а $\deg h = 2$; получаем действие мультипликативной группы на $\mathcal{W}$, и $\mathsf{W}_h$ отождествляется с подпространством $\mathbb{G}_m$-конечных векторов в $\mathsf{W}_h$.

**Пример 3.7.** Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над $\mathsf{k}$. Тогда *асимптотическая обертывающая алгебра* $U_h(\mathfrak{g})$ определяется как $h$-пополнение градуированной алгебры $\mathsf{k}[h]\langle\mathfrak{g}\rangle/(xy-yx = h[x,y])$. Если $\mathfrak{g}$ — ограниченная алгебра Ли, то $U_h(\mathfrak{g})$ — фробениус-постоянное квантование пуассонова многообразия $\mathfrak{g}^*$; фробениусов центр порожден $x^p - h^{p-1}x^{[p]}$, $x \in \mathfrak{g}$. (Отметим, что эти элементы центра однородны по отношению к естественной градуировке, в которой $\deg h = 1$.)

Следующий результат представляет собой обобщение фундаментального наблюдения Мирковича и Румынина.

**Предложение 3.8.** *Пусть $\mathcal{O}_h$ — фробениус-постоянное квантование симплектического многообразия $X$. Тогда ограничение $\mathcal{O}_h[h^{-1}]$ пучка $\mathcal{O}_h$ на общий слой формальной схемы $\widehat{X}$ — алгебра Адзумая ранга $p^{\dim X}$.*

**Доказательство.** Фробениус-окрестность $\operatorname{Frob}(x) \subset X$ замкнутой точки $x \in X$ определяется как спектр слоя $\mathcal{O}_X^p$-алгебры $\mathsf{Fr}_*(\mathcal{O}_X)$ в точке $x$ и представляет собой пуассонову схему. Достаточно доказать, что для любой замкнутой точки $x \in X$ и любого квантования $A$ пуассоновой алгебры функций на $\operatorname{Frob}(x)$ локализация $A(h^{-1})$ есть алгебра Адзумая над $\mathsf{k}((h))$. Пусть $Z$ — центр $A(h^{-1})$. Тогда

$$\dim_{\mathsf{k}((h))} Z = \dim_{\mathsf{k}}(Z \cap A) \mod hA.$$

Правая часть содержится в пуассоновом центре $\mathcal{O}_{\mathrm{Frob}(x)}$, который, как легко видеть, имеет размерность 1. Поэтому $Z = \mathsf{k}((h))$. Предположим теперь, что $I \subset A(h^{-1})$ — ненулевой двусторонний идеал. Тогда $(I \cap A) \mod h$ — пуассонов идеал $\mathcal{O}_{\mathrm{Frob}(x)}$. Поскольку гамильтоновы векторные поля порождают касательное пространство к $X$ в $x$ (что очевидно из вычисления в локальных координатах), пуассонов идеал инвариантен по отношению ко всем дифференцированиям; с другой стороны, легко проверить, что в алгебре $\mathcal{O}_{\mathrm{Frob}(x)}$ нет собственных ненулевых идеалов, инвариантных относительно любых дифференцирований. Поэтому $(I \cap A) \mod h = A \mod h$ и $I = A$ по лемме Накаямы. $\square$

## 4. ОБЩИЕ ФАКТЫ О СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ РАЗРЕШЕНИЯХ

Возвратимся к ситуации, описанной в предисловии: $V$ — конечномерное симплектическое векторное пространство, $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(V)$ — конечная подгруппа, $\pi\colon X \to Y = V/\Gamma$ — гладкое проективное разрешение, симплектическая форма $\omega$ на $X_0 = V_0/\Gamma$ продолжается до невырожденной симплектической формы на $X$.

Полагаем $\mathcal{O}^\Gamma = \mathcal{O}(V)^\Gamma = H^0(X, \mathcal{O})$. Мультипликативная группа $\mathbb{G}_m$ действует на векторном пространстве $V$ гомотетиями. Это действие спускается до действия на $V/\Gamma$, а затем поднимается до действия на $X \to V/\Gamma$ (см. [11]; принятое там предположение $\mathsf{char}\,\mathsf{k} = 0$ несущественно). Все эти действия — действия с положительными весами. Также известно [11], что отображение $X \to Y$ всегда полумалое; иными словами, $\dim X \times_Y X = \dim X$ (опять же доказательство в [11] предполагает характеристику 0, но работает без изменений в любой характеристике).

Кроме того, предположим, что $X$ удовлетворяет следующему условию:

($\bullet$) $H^p(X, \Omega^q) = 0$ при $p + q > \dim X$.

Это выполнено в характеристике 0 (см. [12]). Скорее всего, это верно и в положительной характеристике, но при каких-то дополнительных предположениях. К сожалению, мы не смогли выделить такие предположения, а потому просто принимаем ($\bullet$) как постоянное условие на разрешение $X$.

**Пример 4.1.** Если $\dim V = 2$, то всякий фактор $V/\Gamma$ с $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(V) = SL(V)$ имеет единственное разрешение $X \to V/\Gamma$ и оно удовлетворяет всем нашим предположениям. Эта ситуация очень хорошо изучена; некоторые подробности мы приведем ниже в п. 5.1.

Напомним, что мы ввели плотные открытые подмножества $V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V$ и обозначили $X_i = \pi^{-1}(V_i/\Gamma)$. Нам потребуется одно конкретное этальное покрытие открытого подмножества $X_1 \subset X$. Рассмотрим связные компоненты $H_\alpha \subset (V_1/\Gamma)$ дополнения $(V_1/\Gamma) \setminus (V_0/\Gamma)$. Всякое такое $H_\alpha$ — замкнутая подсхема в $V_1/\Gamma$ чистой коразмерности 2. Существует такое векторное подпространство $V_\alpha \subset V$ коразмерности 2, что $H_\alpha = \eta(V_\alpha \cap V_1)$, а подгруппа $\Gamma_\alpha \subset \Gamma$ элементов $\Gamma$, оставляющих на месте каждый вектор $V_\alpha$, нетривиальна.

Обозначим через $\Gamma'_\alpha \subset \Gamma$ стабилизатор подпространства $V_\alpha$; тогда $\Gamma_\alpha$ — нормальная подгруппа в $\Gamma'_\alpha$. Рассмотрим $V$ как $\Gamma_\alpha$-модуль. Он расщепляется в ортогональную сумму $V = W \oplus V_\alpha$, где $\dim W = 2$ (так что $\Gamma_\alpha \subset SL(W)$). Фактор-группа $N_\alpha = \Gamma'_\alpha/\Gamma_\alpha$ действует на $W/\Gamma_\alpha$ и на $V_\alpha$; второе действие — симплектическое действие на симплектическом векторном пространстве. Придерживаясь наших общих обозначений, через $V_{\alpha,0} \subset V_\alpha$ обозначим открытое подмножество векторов с тривиальным стабилизатором в $N_\alpha$.

Проекция $\eta\colon V \to V/\Gamma$ индуцирует естественное отображение

$$\eta_\alpha\colon (W/\Gamma_\alpha) \times V_{\alpha,0} \to ((W/\Gamma_\alpha) \times V_{\alpha,0})/N_\alpha \to V/\Gamma.$$

Отображение $\eta_\alpha$ этально вне некоторого замкнутого подмножества $F_1 \subset (W/\Gamma_\alpha) \times V_{\alpha,0}$, которое не пересекается с $\{0\} \times V_{\alpha,0}$. Прообраз $\eta_\alpha^{-1}(H_\alpha)$ — несвязное объединение $(\{0\} \times V_{\alpha,0})/N_\alpha$ и некоторого замкнутого подмножества $F_2 \subset (W/\Gamma_\alpha) \times V_{\alpha,0}$.

Обозначим через $U_\alpha \subset (W/\Gamma_\alpha) \times V_{\alpha,0}$ дополнение к замкнутому подмножеству $F_1 \cup F_2$. Тогда $U_\alpha$ — окрестность в топологии Зариского подмножества $\{0\} \times V_{\alpha,0} \subset (W/\Gamma_\alpha) \times V_{\alpha,0}$; отображение $\eta_\alpha \colon U_\alpha \to V/\Gamma$ этально, и $\eta_\alpha^{-1}(H_\alpha) = \{0\} \times V_{\alpha,0} \subset U_\alpha$. Кроме того, $\eta_\alpha$ индуцирует изоморфизм $\eta_\alpha \colon (\{0\} \times V_{\alpha,0})/N_\alpha \cong H_\alpha$.

Отображение $\eta_\alpha \colon (W/\Gamma_\alpha) \times V_{\alpha,0} \to V/\Gamma$ продолжается до отображения

$$\rho_\alpha \colon (Y_\alpha \times V_{\alpha,0})/N_\alpha \to X,$$

где $\pi_\alpha \colon Y_\alpha \to W/\Gamma_\alpha$ — каноническое крепантное разрешение $W/\Gamma_\alpha$ (см., например, [11, Section 4]; поскольку разрешение $Y_\alpha \to W/G_\alpha$ канонично, действие $N_\alpha$ на $W/\Gamma_\alpha$ единственным образом продолжается до действия на $Y_\alpha$).

Обозначим через $X_\alpha \subset Y_\alpha \times V_{\alpha,0}$ прообраз $(\pi_\alpha \times \mathsf{id})^{-1}(U_\alpha)$ открытого подмножества $U_\alpha \subset$ $\subset (W/\Gamma_\alpha) \times V_{\alpha,0}$. Отображение $\rho_\alpha$ этально на $X_\alpha$; имеем

$$\rho_\alpha^{-1}\pi^{-1}(H_\alpha) = \pi_\alpha^{-1}(\{0\}) \times V_{\alpha,0}, \tag{4.1}$$

и отображение $\rho_\alpha$ индуцирует изоморфизм

$$\rho_\alpha \colon \bigl(\pi_\alpha^{-1}(\{0\}) \times V_{\alpha,0}\bigr)/N_\alpha \to \pi^{-1}(H_\alpha) \subset X.$$

Множества $X_\alpha$ вместе с $X_0 \subset X_1$ образуют этальное покрытие подмножества $X_1 \subset X$. Ситуация формально описывается следующей леммой о склейке.

**Лемма 4.2.** *Категория когерентных пучков $\mathcal{E}$ на $X_1$ эквивалентна категории следующих данных:*

(i) *когерентный пучок $\mathcal{E}_0$ на $X_0$;*

(ii) *для каждой компоненты $H_\alpha$ дополнения $V_1/\Gamma \setminus V_0/\Gamma$ продолжение $\mathcal{E}_\alpha$ пучка $\rho_\alpha^*\mathcal{E}_0$ до $N_\alpha$-эквивариантного пучка на $X_\alpha$.*

**Доказательство.** Поскольку $X_0$ и все $X_\alpha$, вместе взятые, образуют этальное покрытие $X_1$, достаточно продолжить $\mathcal{E}_0$ до пучка на $\rho_\alpha(X_\alpha)$ для каждого $X_\alpha$. Для этого достаточно построить данные спуска для этального отображения $\rho_\alpha \colon X_\alpha \to X$. Пусть $X_{\alpha,0} \subset X_\alpha$ — прообраз $\rho_\alpha^{-1}(X_0)$. В силу (4.1) произведение $X_\alpha \times_X X_\alpha$ покрывается двумя открытыми подмножествами $X_{\alpha,0} \times_X X_{\alpha,0}$ и $X_\alpha \times N_\alpha$. Поскольку $\mathcal{E}_\alpha = \rho^{-1}\mathcal{E}_0$ на $X_{\alpha,0} \subset X_\alpha$, данные спуска на первом подмножестве уже даны. Данные спуска на втором подмножестве эквивалентны $N_\alpha$-эквивариантной структуре на $\mathcal{E}_\alpha$. $\square$

**Предложение 4.3.** (i) *Предположим, что теорема* 2.3 *верна для какого-то векторного расслоения $\mathcal{E}$. Тогда $\mathcal{E}$ имеет каноническую $\mathbb{G}_m$-эквивариантную структуру.*

(ii) *Пусть $R$ — регулярное полное локальное кольцо с полем вычетов $\mathsf{k}$, максимальным идеалом $\mathfrak{m} \subset R$ и полем частных $\mathsf{K}$. Пусть дано проективное крепантное разрешение $\pi \colon X_R \to V_R/\Gamma$, где $X_R$ — гладкая схема над $R$. Предположим, что теорема* 2.3 *верна для специального слоя $X_\mathsf{k}$ схемы $X_R$ и что для каждой из этальных карт $X_\alpha \subset Y_\alpha \times V_{\alpha,0}$ обратный образ $\rho^*\mathcal{E}$ продолжается до векторного расслоения на $Y_\alpha \times V_\alpha$. Тогда теорема* 2.3 *верна для общего слоя $X_\mathsf{K}$.*

**Доказательство.** Чтобы доказать (i), заметим, что, поскольку $\mathcal{O}_V \subset \mathcal{O}_V\#\Gamma$, всякий объект $\mathcal{E}$, удовлетворяющий условиям теоремы 2.3, имеет структуру $\mathcal{O}_V$-модуля. В частности, на $X_0 \cong V_0/\Gamma \subset X$ мы имеем

$$\mathcal{E} \cong \eta_*\widetilde{\mathcal{E}}$$

для некоторого пучка $\widetilde{\mathcal{E}}$ на $V_0$. Поскольку $\mathsf{rk}\,\mathcal{E} = |\Gamma|$ равен степени этального отображения $\eta \colon V_0 \to V_0/\Gamma$, пучок $\widetilde{\mathcal{E}}$ есть линейное расслоение. Поскольку дополнение $V_0 \subset V$ имеет коразмерность $\geq 2$, группа Пикара $\mathrm{Pic}(V_0) = \mathrm{Pic}(V)$ тривиальна; следовательно, $\widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{O}_V$ и $\mathcal{E} \cong \eta_* \mathcal{O}_V$ на $X_0 \subset X$. В частности, на открытой части $X_0 \subset X$ на $\widetilde{\mathcal{E}}$ есть $\mathbb{G}_m$-эквивариантная структура.

Пусть $a\colon \mathbb{G}_m \times X \to X$ — отображение действия, и пусть $p\colon \mathbb{G}_m \times X \to X$ — проекция. Тогда эквивариантная структура на $\mathcal{E}$ задается изоморфизмом $a^*\mathcal{E} \cong p^*\mathcal{E}$; нам дан такой изоморфизм на $\mathbb{G}_m \times X_0$, и надо доказать, что он продолжается на $\mathbb{G}_m \times X$. Мы докажем, что *любой* изоморфизм $a^*(\mathcal{E}) \cong p^*(\mathcal{E})$, определенный на $\mathbb{G}_m \times X_0$, продолжается на $\mathbb{G}_m \times X$. В самом деле, пусть $\mathfrak{X}$ — формальная окрестность $\{1\} \times X \subset \mathbb{G}_m \times X$ и пусть $\mathfrak{X}_0$ — формальная окрестность $\{1\} \times X_0 \subset \mathbb{G}_m \times X_0$; тогда достаточно доказать, что любой изоморфизм $a^*\mathcal{E} \cong p^*\mathcal{E}$ на $\mathfrak{X}_0$ продолжается на $\mathfrak{X}$. Поскольку $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 0$, пучок $\mathcal{E}$ единственным образом продолжается на (тривиальную) однопараметрическую деформацию $\mathfrak{X}$ многообразия $X$. Поэтому существует хотя бы какой-то изоморфизм $a^*\mathcal{E} \cong p^*\mathcal{E}$. Но поскольку $\mathrm{End}(\mathcal{E}) = \mathcal{O}_V \# \Gamma$ совпадает с $\mathrm{End}(\mathcal{E}_{X_0})$, из теоремы о формальных функциях следует, что любое сечение $\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ на $\mathfrak{X}_0$ продолжается на $\mathfrak{X}$; следовательно, любой данный изоморфизм $a^*\mathcal{E} \cong p^*\mathcal{E}$ на $\mathfrak{X}_0$ в самом деле продолжается на $\mathfrak{X}$.

Чтобы доказать (ii), предположим, что теорема 2.3 верна для $X_\mathsf{k}$. В силу (i) соответствующее векторное расслоение $\mathcal{E}$ на $X_\mathsf{k}$ $\mathbb{G}_m$-эквивариантно. Поэтому по лемме 2.12 оно продолжается до почти исключительного векторного расслоения $\mathcal{E}_R$ на $X_R$.

Мы знаем, что алгебра $\mathrm{End}_R(\mathcal{E}_R)$ — плоская деформация алгебры $\mathrm{End}(\mathcal{E})$. Осталось доказать, что на самом деле она совпадает с $\mathrm{Sym}(V_R) \# \Gamma$.

Применяя лемму 2.12 к $\mathbb{G}_m$-эквивариантным пучкам на $V_R$, видим, что достаточно доказать, что

$$\mathrm{End}(\mathcal{E}_{\mathfrak{X}}) \cong \widehat{\mathrm{Sym}(V_R)} \# \Gamma,$$

где $\mathfrak{X}$ — формальное пополнение $X_R$ вдоль $X_\mathsf{k} \subset X_R$, а пополнение в правой части берется в $\mathfrak{m}$-адической топологии. Предположим сперва, что $V = W \oplus V'$ и $\dim W = 2$ и что группа $\Gamma$ действует тривиально на $V'$, так что, в частности, $X = X_1$. Тогда $\mathcal{E} \cong \eta_* \mathcal{O}_V$ на $X_0 = V_0/\Gamma \subset X_\mathsf{k}$ и все $\mathbb{G}_m$-однородные элементы в группе

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}|_{X_0}, \mathcal{E}|_{X_0})$$

имеют строго отрицательный вес по отношению к $\mathbb{G}_m$-действию. Поэтому по стандартной теории деформаций пучок $\mathcal{E}$ на $X_0$ продолжается до $\mathbb{G}_m$-эквивариантного пучка на $\mathfrak{X}_0$ *единственным образом.* В силу этого

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{X}_0} \cong \widehat{\eta_* \mathcal{O}_V}$$

на $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$. Теперь замечаем, что ограничение на $\mathfrak{X}_0 \subset X$ индуцирует отображение

$$\mathrm{End}(\mathcal{E}_{\mathfrak{X}}) \to \mathrm{End}(\mathcal{E}_{\mathfrak{X}_0}) \cong \widehat{\mathrm{Sym}(V_R)} \# \Gamma$$

нётеровых топологических $R$-алгебр, полных по отношению к $\mathfrak{m}$-адической топологии, и это отображение — изоморфизм по модулю $\mathfrak{m}$. Следовательно, оно изоморфизм.

В общем случае этот аргумент не работает, поскольку группа $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_{X_0}, \mathcal{E}_{X_0})$ становится слишком велика. Рассмотрим, однако, ограничение $\mathcal{E}_{X_1}$ расслоения $\mathcal{E}$ на $X_1 \subset X_\mathsf{k}$. Мы утверждаем, что

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E}_{X_1}, \mathcal{E}_{X_1}) = 0$$

при $i = 1, 2$. В самом деле, рассмотрим векторное расслоение $\mathcal{E}nd(\mathcal{E})$ на $X_1$. Из теоремы 2.3(ii) следует, что $R^k\pi_* \mathcal{E}nd(\mathcal{E}) = 0$ для $k \geq 1$, и в силу теоремы 2.3(i) имеем

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \cong H^i(X_1, \mathcal{E}nd(\mathcal{E})) \cong H^i(V_1/\Gamma, \mathcal{O}_V \# \Gamma).$$

Алгебра $\mathcal{O}_V\#\Gamma$, рассмотренная как пучок на $V_1/\Gamma$, есть прямой образ тривиального пучка $\mathcal{O}_V\otimes\mathsf{k}[\Gamma]$ по отношению к отображению проекции $\eta\colon V_1\to V_1/\Gamma$. Следовательно,

$$H^i(V_1/\Gamma,\mathcal{O}_V\#\Gamma)=H^i(V_1,\mathcal{O}_V)\otimes\mathsf{k}[\Gamma].$$

Поскольку $\mathsf{codim}(V\setminus V_1)\geq 4$, правая часть действительно тривиальна при $i=1,2$.

Теперь заметим, что в силу того же рассуждения, что в случае $V=W\oplus V'$, достаточно доказать, что $\mathrm{End}(\mathcal{E}_{\mathfrak{X}_1})$ совпадает со скрученным произведением $\widehat{\mathrm{Sym}(V_R)}\#\Gamma$. Поскольку $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_{X_1},\mathcal{E}_{X_1})=0$, векторное расслоение $\mathcal{E}$ на $X_1$ продолжается до векторного расслоения на $\mathfrak{X}_1$ единственным образом. Поэтому достаточно построить *хотя бы одно* векторное расслоение $\mathcal{E}'$ на $\mathfrak{X}_1$, продолжающее $\mathcal{E}_{X_1}$ и имеющее требуемую алгебру эндоморфизмов. Для этого применяем лемму 4.2 и заключаем, что достаточно на каждом из разрешений $Y_\alpha\times V_\alpha\to V/\Gamma_\alpha$, отвечающих этальным картам $X_\alpha$, построить $N_\alpha$-эквивариантное продолжение $\mathcal{E}'_\alpha$ пучка $\mathcal{E}_\alpha$. Но поскольку $\Gamma_\alpha\subset\Gamma$ действует на $V_\alpha$ тривиально, мы уже доказали, что продолжение существует и единственно. В частности, оно $N_\alpha$-эквивариантно. $\square$

## 5. КВАНТОВАНИЕ СИМПЛЕКТИЧЕСКОГО РАЗРЕШЕНИЯ

Предположим теперь, что основное поле $\mathsf{k}$ — совершенное поле характеристики $p>0$; предположим также, что $p>\mathsf{dim}\,X$, $p>|\Gamma|$. Цель этого раздела — следующий результат.

**Теорема 5.1.** *В перечисленных выше предположениях существует такое градуированное фробениус-постоянное квантование $\mathcal{O}_h$ схемы $X$, что $(\mathcal{O}^\Gamma)^p$-алгебра $H^0(X,\mathcal{O}_h)$ глобальных сечений $\mathcal{O}_h$ изоморфна стандартному квантованию $\mathcal{W}^\Gamma$, причем изоморфизм $\mathbb{G}_m$-эквивариантен.*

**Лемма 5.2.** *Пусть градуированное фробениус-постоянное квантование $\mathcal{O}_h$ схемы $X$ таково, что его ограничение на открытый страт $X_0\cong V_0/\Gamma$ изоморфно $\mathbb{G}_m$-эквивариантным образом пучку $\mathcal{W}|^\Gamma_{V_0^{(1)}}$. Тогда $\mathcal{O}_h$ удовлетворяет требованиям теоремы* 5.1.

**Доказательство.** Поскольку дополнение $V_0$ имеет коразмерность не меньше 2, имеем $\mathcal{W}=H^0(\mathcal{W}|_{V_0^{(1)}})$. Поэтому $H^0(\mathcal{O}_h)$ — подалгебра в $\mathcal{W}^\Gamma=H^0\big(X_0,\mathcal{O}_h|_{X_0^{(1)}}\big)$. Используя обращение в нуль $H^1(X,\mathcal{O})$, заключаем, что

$$H^0(\mathcal{O}_h)/hH^0(\mathcal{O}_h)\xrightarrow{\sim}H^0(\mathcal{O})=\mathcal{O}_V^\Gamma=\mathcal{W}^\Gamma/h\mathcal{W}^\Gamma,$$

что доказывает сюръективность отображения $H^0(\mathcal{O}_h)\to\mathcal{W}^\Gamma$. $\square$

Вот план доказательства теоремы 5.1. По лемме 5.2 достаточно взять данное квантование $X_0$ и продолжить его до квантования $X$. В п. 5.2 мы продолжим его на $X_1$, а затем на все $X$. Поскольку $\mathsf{codim}(V_1-V_0)=2$, продолжение на $X_1$ сводится к случаю $\mathsf{dim}\,V=2$, который рассмотрен отдельно в п. 5.1.

### 5.1. Случай размерности 2.

В этом пункте предполагаем, что $\mathsf{dim}\,V=2$. Наша цель — следующий результат.

**Предложение 5.3.** *Теорема* 5.1 *верна, если* $\mathsf{dim}\,V=2$. *Кроме того, разрешение $X$ и квантование $\mathcal{O}_h$ эквивариантны относительно нормализатора $\Gamma$ в* $\mathrm{Sp}(V)$.

5.1.1. *Разрешение как гамильтонова редукция.* Классификация наборов данных $\langle V,\omega,\Gamma\rangle$ с $\mathsf{dim}\,V=2$ хорошо известна (еще Клейну, если не раньше). Они отвечают диаграммам Дынкина с простыми связями; в каждом случае крепантное разрешение $X$ фактора $V/\Gamma$ единственно. Напомним недавнее описание $X$ как гильбертова фактора $V$ по $\Gamma$, данное Ито и Накамурой [10] (см. также изложение в [21]). Рассмотрим подмногообразие $\Gamma$-неподвижных точек в схеме Гильберта $\mathrm{Hilb}^n(V)$ подсхем в $V$ длины $n$, $n=|\Gamma|$, и обозначим через $\mathrm{Hilb}^\Gamma(V)$ ту из его связных компонент, которая содержит элементы вида $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{O}_{\gamma(v)}$, $v\in V\setminus\{0\}$. Тогда имеем $X\cong\mathrm{Hilb}^\Gamma(V)$.

Разрешение $X$ можно также получить гамильтоновой редукцией (алгебраического) симплектического векторного пространства по действию редуктивной группы; эта конструкция (в аналитическом контексте) была открыта Кронхаймером [17] и изучена в работах Люстига, Накаджимы и др. Опишем вкратце версию этой конструкции (по-видимому, принадлежащую Накаджиме), основанную на интерпретации через гильбертов фактор.

Пусть $R = \mathsf{k}[\Gamma]$ — регулярное представление группы $\Gamma$. Пространство $X = \mathrm{Hilb}^{\Gamma}(V)$ — пространство модулей таких представлений $\mathrm{Sym}(V^*)\#\Gamma$, которые изоморфны $R$ как $\Gamma$-модуль и порождены $\Gamma$-инвариантным вектором. Пусть $R$ — тавтологическое векторное расслоение на $X$, т.е. прямой образ на $X$ структурного пучка универсальной $\Gamma$-эквивариантной подсхемы в $X \times V$.

Пусть $M$ — пространство, параметризующее представления $N$ алгебры $T(V^*)\#\Gamma$, снабженные изоморфизмом $\Gamma$-модулей $N \cong R$; здесь через $T$ обозначена тензорная алгебра. По определению $M$ есть векторное пространство

$$M = \mathrm{Hom}_{\Gamma}(V^*, \mathrm{End}(R)) = \mathrm{Hom}_{\Gamma}(V^* \otimes R, R) = (V \otimes \mathrm{End}(R))^{\Gamma}$$

$\Gamma$-эквивариантных отображений из $V^*$ в $\mathrm{End}(R)$.

(Можно также описать $M$ как пространство представлений так называемого двойного колчана, отвечающего аффинной диаграмме Дынкина типа $A$, $D$, $E$; см., например, [18].)

Векторное пространство $\mathrm{End}(R)$ снабжено симметрическим следовым спариванием $\mathsf{tr}(ab)$ и скобкой Ли $[\cdot,\cdot]\colon \mathrm{End}(R) \otimes \mathrm{End}(R) \to \mathrm{End}(R)$; и то и другое $\Gamma$-инвариантны. Спаривание, тензорно помноженное на симплектическую форму $\omega$ на $V$, дает симплектическую форму $\Omega$ на $V \otimes \mathrm{End}(R)$; ограничивая ее на подпространство $M$ $\Gamma$-инвариантных векторов, получаем симплектическую форму $\Omega$ на $M$. Скобка, помноженная на форму $\omega$, дает квадратичное отображение $V \otimes \mathrm{End}(R) \to \mathrm{End}(R)$; обозначим через $\widetilde{\mu}\colon M \to \mathrm{End}(R)$ его ограничение на $M$.

Группа $G = \mathrm{Aut}_{\Gamma}(R)/\mathbb{G}_m$ действует на $M$, сохраняя $\Omega$. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы $G$. Легко видеть, что образ $\widetilde{\mu}$ лежит в подпространстве $\mathfrak{g}^* \subset (\mathrm{End}(R))^* = \mathrm{End}(R)$; таким образом, имеем отображение $\mu\colon M \to \mathfrak{g}^*$. Немедленно проверяется, что $\mu$ — отображение моментов для действия $G$ на $M$.

Нулевой слой $\mu^{-1}(0)$ параметризует те представления $T(V^*)\#\Gamma$, которые пропускаются через $\mathrm{Sym}(V^*)\#\Gamma$; тем самым точка $\mu^{-1}(0)$ задает $\Gamma$-эквивариантный когерентный пучок на $V$. Оказывается, что один из факторов $\mu^{-1}(0)$ по $G$ в смысле геометрической теории инвариантов совпадает с $X$. А именно рассмотрим расщепление $\iota\colon G \to \mathrm{Aut}(R)$ проекции $\mathrm{Aut}(R) \to G$, которое отождествляет $G$ с подгруппой автоморфизмов, тривиальных на 1-мерном пространстве $\Gamma$-инвариантных векторов. Определим характер $\chi\colon G \to \mathbb{G}_m$, положив $\chi(g) = \det(\iota(g))$. Тогда точка $x \in \mu^{-1}(0)$ $\chi$-стабильна, если и только если соответствующий $\Gamma$-эквивариантный когерентный пучок на $V$ порожден $\Gamma$-инвариантным сечением (см., например, [20], также [16]). Итак, симплектическое многообразие $X = \mathrm{Hilb}^{\Gamma}(V) = \mu^{-1}(0)/\!/_{\chi}G$ — гамильтонова редукция $M$ по $G$.

В этих терминах можно описать и тавтологическое векторное расслоение $\mathcal{R}$. Для этого рассмотрим тривиальное векторное расслоение на $M$ со слоем $R$. Используя расщепление $\iota$, его можно снабдить $G$-эквивариантной структурой: определяем действие $G$ на $R$, ограничивая тавтологическое действие с помощью $\iota$, и вводим диагональное действие $G$ на $R \otimes \mathcal{O}$.

Ограничение получившегося $G$-эквивариантного расслоения на $\mu^{-1}(0)$ спускается до векторного расслоения на факторе. Получаем векторное расслоение на $X$, которое отождествлено с $\mathcal{R}$.

Как обычно в ситуации гамильтоновой редукции, два шага можно сделать в обратном порядке: сначала берем фактор $M/\!/_{\chi}G$ в смысле геометрической теории инвариантов, потом реализуем $X$ как замкнутую подсхему в $M/\!/_{\chi}G$.

Подведем итог.

**Предложение 5.4.** (i) *Пусть $M^{ss} \subset M$ — открытое подмножество представлений, порожденных $\Gamma$-инвариантным вектором. Тогда действие $G$ на $M^{ss}$ свободно и существует геометрический фактор $M^{ss}/G$. Подмногообразие*

$$\big(\mu^{-1}(0) \cap M^{ss}\big)/G \subset M^{ss}/G$$

*изоморфно $X$, а редукция формы $\Omega$ равна форме $\omega$.*

(ii) *Снабдим тривиальное векторное расслоение $R \otimes \mathcal{O}$ диагональным действием $G$. Тогда спуск $R \otimes \mathcal{O}_{M^{ss}}$ на $M^{ss}/G$ дает $\mathcal{R}$ при ограничении на $X \subset M^{ss}/G$.* $\square$

5.1.2. *Квантовая версия.* Чтобы получать гамильтоновой редукцией квантования, вводим следующее понятие.

**Определение 5.5.** Пусть $X$ — алгебраическое симплектическое многообразие над полем $\mathsf{k}$ положительной характеристики. Пусть $G$ — алгебраическая группа, действующая на $X$. Фробениус-постоянное квантование $\mathcal{O}_h$ многообразия $X$ *фробениус-$G$-постоянно*, если $G$ действует на $\mathcal{O}_h$ так, что действие $G$ на центральной подалгебре $\mathcal{O}_X^p[[h]] \subset \mathcal{O}_h$ оставляет $h$ инвариантным и совпадает с естественным действием $G$ на $\mathcal{O}_X^p \subset \mathcal{O}_X^p[[h]]$.

Подвергая насилию терминологию, мы будем говорить "отображение из векторного пространства $W$ в пучок $\mathcal{F}$", имея в виду "отображение из $W$ в пространство глобальных сечений $\mathcal{F}$".

**Определение 5.6.** Пусть $X$, $G$ таковы, как в предыдущем определении, пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы $G$, и пусть $\mathcal{O}_h(X)$ — фробениус-$G$-постоянное квантование $X$. *Квантовым отображением моментов* называется гомоморфизм $\mathsf{k}[[h]]$-алгебр $\mu\colon U_h(\mathfrak{g}) \to \mathcal{O}_h(X)$ такой, что

(i) ограничение $\mu$ на центральную подалгебру $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^{(1)})[[h]]$ отображает подалгебру $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^{(1)}) \subset \mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^{(1)})[[h]]$ в $\mathcal{O}(X^{(1)}) \subset \mathcal{O}(X^{(1)})[[h]]$;

(ii) для любого $\xi \in \mathfrak{g}$ и любого локального сечения $s$ пучка $\mathcal{O}_h$ имеем $\mu(\xi)s - s\mu(\xi) = h\xi(s)$, где $\xi(s)$ — действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на $\mathcal{O}_h$, индуцированное действием группы $G$.

Немедленно проверяется, что благодаря (ii) индуцированное отображение

$$\mu_0\colon\ \mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^{(1)}) \to \mathcal{O}_X^p,$$

существующее в силу (i), есть отображение моментов для действия $G$ на $X$.

**Пример 5.7.** Пусть $X = V$ — симплектическое векторное пространство, и пусть $G = \mathrm{Sp}(V)$. Тогда имеем квантовое отображение моментов, переводящее $x \in \mathfrak{sp}(V) \cong \mathrm{Sym}^2(V) \subset V \otimes V$ в соответствующий элемент $\mathcal{W}$.

Если $G \subset \mathrm{Sp}(V)$ — алгебраическая подгруппа, то получаем квантовое отображение моментов $\mu\colon \mathfrak{g} \to \mathcal{W}$, ограничивая это отображение на подалгебру Ли $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sp}(V)$.

Отметим, что индуцированный гомоморфизм $U_h(\mathfrak{g}) \to \mathcal{W}$ (который мы тоже обозначаем через $\mu$) связан с действием $\mathbb{G}_m$ формулой $\mu(tx) = t^2\mu(x)$.

**Предложение 5.8.** *Пусть $M$ — гладкое симплектическое многообразие, пусть $G$ — группа, действующая на $M$, пусть $\mathcal{O}_h$ — фробениус-$G$-постоянное квантование $X$, и предположим, что дано квантовое отображение моментов $\mu\colon \mathfrak{g} \to \mathcal{O}_h$. Более того, предположим, что дано такое $G$-инвариантное открытое подмножество $U \subset X$, что $G$ действует на $U$ свободно и существует геометрический фактор $U/G$; тем самым проекция $\rho\colon U \to U/G$ отождествляет $U$ с тотальным пространством главного $G$-расслоения на $U/G$.*

*Тогда пучок*

$$(\rho_*\mathcal{O}_h)^G \subset \rho_*\mathcal{O}_h$$

*есть фробениус-постоянное квантование пуассонова многообразия $U/G$, а его фактор*

$$\mathcal{O}_h(Z) = (\rho_*\mathcal{O}_h)^G/\langle\rho_*\mathcal{O}_h\mu(\mathfrak{g})\rho_*\mathcal{O}_h\rangle^G$$

*есть фробениус-постоянное квантование гамильтоновой редукции*

$$Z = (\mu_0^{-1}(0)\cap U)/G \subset U/G.$$

*Более того, если $\mathcal{F}$ — локально проективный $G$-эквивариантный пучок левых $\mathcal{O}_h$-модулей на $X$, то пучок $(\rho_*\mathcal{F})^G/I(\rho_*\mathcal{F})^G$ — локально проективный пучок $\mathcal{O}_h(Z)$-модулей на $Z$.*

**Набросок доказательства.** Если $S\subset U/G$ — открытое аффинное подмножество, то, поскольку действие $G$ на $\rho^{-1}(S)$ свободно, алгебра функций на $\rho^{-1}(S)$ есть инъективный объект в категории алгебраических $G$-модулей. Это доказывает первое утверждение. С другой стороны, поскольку действие свободно, $\mathcal{O}(\rho^{-1}(S))$ плоско над $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g})$ и $\mu(\mathfrak{g})\mathcal{O}(\rho^{-1}(S))$ — инъективный $G$-модуль. Отсюда получаем изоморфизм

$$\mathcal{O}_Z = \rho_*(\mathcal{O})^G/(\mu(\mathfrak{g})\rho_*(\mathcal{O})^G) \xrightarrow{\sim} (\rho_*(\mathcal{O})/\mu(\mathfrak{g})\rho_*(\mathcal{O}))^G. \tag{5.1}$$

Кроме того, $\mathcal{O}_h(\rho^{-1}(S))$ плоско над $U_h(\mathfrak{g})$, в силу чего $(\rho_*(\mathcal{O}_h)/\mu(\mathfrak{g})\rho_*(\mathcal{O}_h))^G$ есть $h$-плоская деформация $\mathcal{O}(Z)$. Изоморфизм (5.1) показывает, что

$$\mathcal{O}_h(Z) = \rho_*(\mathcal{O}_h)^G/(\mu(\mathfrak{g})\rho_*(\mathcal{O}_h)^G) \xrightarrow{\sim} (\rho_*(\mathcal{O}_h)/\mu(\mathfrak{g})\rho_*(\mathcal{O}_h))^G.$$

Как отмечено выше, правая часть здесь есть $h$-плоская деформация $\mathcal{O}(Z)$, а левая часть снабжена ассоциативным умножением. Ясно, что отображение коммутатора в получающемся пучке алгебр совместимо со скобкой Пуассона; поэтому $\mathcal{O}_h(Z)$ — в самом деле квантование $\mathcal{O}_Z$. Доказательство утверждения про гамильтонову редукцию $\mathcal{O}_h$-модуля параллельно доказательству утверждения про редукцию пучка алгебр $\mathcal{O}_h$. $\square$

5.1.3. *Квантование разрешения.* Вернемся теперь в ситуацию предложения 5.3. Совмещая предложение 5.4 с предложением 5.8, получаем фробениус-постоянное квантование $\mathcal{O}_h$ разрешения $X\to V/G$. Из конструкции ясно, что квантование $\mathcal{O}_h$ градуировано. В силу леммы 5.2, чтобы доказать предложение 5.3, теперь достаточно показать, что $\mathcal{O}_h$ совпадает со стандартным квантованием на $V_0\subset V$.

Рассмотрим пучок $\mathcal{R}_h$ $\mathcal{O}_h$-модулей на $X^{(1)}$, полученный гамильтоновой редукцией свободного модуля $R\otimes\mathcal{O}_h(M)$. По предложению 5.8 вместе с предложением 5.4(ii) имеем $\mathcal{R}_h/h\mathcal{R}_h \cong$ $\cong \mathcal{R}$.

Более того, рассмотрим ограничение пучка $\mathcal{R}_h$ на открытое подмножество $X_0 = V_0/\Gamma\subset X$. Мы утверждаем, что существует естественный изоморфизм

$$\mathcal{R}_h \cong \mathcal{O}_h \otimes_{\mathcal{O}^p_{X_0}} \mathcal{O}^p_{V_0}$$

пучков на $X_0$. В самом деле, из определения $\mathcal{R}_h$ возникает действие $\mathcal{O}(V^{(1)})[[h]] =$ $= H^0(X^{(1)},\mathcal{R}^{(1)})[[h]]$ на $\mathcal{R}_h$, коммутирующее с действием $\mathcal{O}_h$. Из этого действия в свою очередь возникает отображение пучков

$$\mathcal{O}^p_{V_0}\otimes_{\mathcal{O}^p_{V/\Gamma}}\mathcal{O}_h \to \mathcal{R}_h.$$

Легко видеть, что оно индуцирует изоморфизм по модулю $h$; поскольку оба пучка плоски над $h$, отображение есть изоморфизм.

Теперь, чтобы доказать предложение 5.3, достаточно применить следующий результат.

**Лемма 5.9.** *Пусть $\mathcal{O}_h$ — такое $\mathbb{G}_m$-эквивариантное фробениус-постоянное квантование $X$, что пучок*

$$\mathcal{O}_h|_{X_0} \otimes_{\mathcal{O}_{X_0}^{(1)}} \mathcal{O}_{V_0^{(1)}}$$

*$\mathcal{O}_h$-модулей на $X_0 = V_0/\Gamma$ продолжается до локально проективного $\mathcal{O}_h$-модуля $\mathcal{R}_h$ на $X$, удовлетворяющего $\mathcal{R}_h/h\mathcal{R}_h \cong \mathcal{R}$.*

*Тогда ограничение квантования $\mathcal{O}_h$ на открытое подмножество $X_0^{(1)} = V_0^{(1)}/\Gamma$ изоморфно $\mathcal{W}|^{\Gamma}_{V_0^{(1)}}$, причем изоморфизм совместим с действием $\mathbb{G}_m$.*

**Доказательство.** Достаточно построить $\Gamma$-эквивариантный изоморфизм градуированных $(\mathcal{O}^{\Gamma})^p$-алгебр

$$H^0\Big(\mathcal{O}_h \otimes_{\mathcal{O}_{X_0}^{(1)}} \mathcal{O}_{V_0^{(1)}}\Big) \cong \mathcal{W}. \tag{5.2}$$

Рассмотрим подпространство $V^* \subset \mathcal{O}(V)$ линейных функций на $V$. В силу, например, [14] имеем $H^i(X, \mathcal{R}) = 0$ при $i > 0$. Поэтому отображение

$$H^0(\mathcal{R}_h) = H^0\Big(\mathcal{O}_h \otimes_{\mathcal{O}_{X_0}^{(1)}} \mathcal{O}_{V_0^{(1)}}\Big) \to H^0(\mathcal{R}) = \mathcal{O}(V)$$

сюръективно. В частности, вложение $V \subset \mathcal{O}(V)$ пропускается через отображение $\iota\colon V^* \to \to H^0(\mathcal{R}_h)$. Более того, это отображение можно выбрать $\mathbb{G}_m$-эквивариантным, так что $\mathsf{Im}(\iota)$ лежит в пространстве элементов степени 1 по отношению к действию $\mathbb{G}_m$. Тогда для любых двух $x, y \in V^*$ элемент $xy - yx$ равен $h\omega(x,y)$ по модулю $h^2$ и имеет степень 2 по отношению к действию $\mathbb{G}_m$. Из этого очевидным образом следует, что $xy - yx = h\omega(x,y)$. Итак, имеем $\Gamma$-эквивариантный мультипликативный гомоморфизм из пополненной алгебры Вейля $\mathcal{W}$ в

$$H^0\Big(\mathcal{O}_h \otimes_{\mathcal{O}_{X_0}^{(1)}} \mathcal{O}_{V_0^{(1)}}\Big).$$

Поскольку он индуцирует изоморфизм на присоединенных градуированных факторах по отношению к $h$-адической фильтрации, он и сам является изоморфизмом. $\square$

**5.2. Общий случай.** Вернемся к общему случаю теоремы 5.1 (никаких предположений о $\dim V$). Вспомним обозначения $V_1$, $X_1$, введенные в п. 1.1.

**Предложение 5.10.** *Стандартное квантование $\mathcal{W}^{\Gamma}$ многообразия $X_0 = V_0/\Gamma$ продолжается до градуированного фробениус-постоянного квантования $\mathcal{O}_h$ многообразия $X_1$.*

**Доказательство.** Фробениус-постоянное квантование $X$ есть когерентный пучок $X(1)$, поэтому к нему применима лемма 4.2. Тем самым достаточно продолжить данное квантование $X_0 = V_0/\Gamma \subset X$ до квантования каждой из этальных карт $X_\alpha$. Применяя предложение 5.3 к $Y_\alpha$, получаем градуированное фробениус-постоянное $N_\alpha$-эквивариантное квантование $Y_\alpha$. Беря его ($h$-адически пополненное) тензорное произведение со стандартным квантованием векторного пространства $V_\alpha$, получаем градуированное фробениус-постоянное $N_\alpha$-эквивариантное квантование $X_\alpha \subset Y_\alpha \times V_\alpha$. $\square$

Чтобы завершить доказательство теоремы 5.1, остается показать, что фробениус-постоянное квантование $\mathcal{O}_h$ подмножества $X_1 \subset X$ продолжается до фробениус-постоянного квантования всего $X$. Достаточно доказать следующее

**Предложение 5.11.** *Любое градуированное фробениус-постоянное квантование $\mathcal{O}_h$ подмножества $X_1 \subset X$ единственным образом продолжается до градуированного фробениус-постоянного квантования $X$.*

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что достаточно продолжить $\mathcal{O}_h$ до деформации $\mathcal{O}(X)$ в пучок ассоциативных алгебр: тогда и действие $\mathbb{G}_m$, и вложение $\mathcal{O}^p$ в центр $\mathcal{O}_h$ продолжатся с $X_1$ единственным образом, поскольку $\operatorname{codim}(X \setminus X_1) \geq 2$.

Используем лемму 3.2. Хохшильдовские когомологии гладких многообразий можно вычислять с помощью спектральной последовательности Хохшильда–Костанта–Розенберга, член $E_2$ которой равен

$$H^p(X, \Lambda^q \mathcal{T}(X)),$$

т.е. когомологиям степени $p$ с коэффициентами в расслоении $\Lambda^q \mathcal{T}(X)$ поливекторных полей степени $q$ на $X$. Тогда в силу леммы 3.2 предложение сводится к следующему утверждению о когомологиях.

**Лемма 5.12.** *Рассмотрим отображение ограничения*

$$\sigma\colon H^p(X, \Lambda^q \mathcal{T}(X)) \to H^p(X_1, \Lambda^q \mathcal{T}(X_1))$$

*на сумме компонент отрицательного веса. Тогда оно есть изоморфизм при $p+q = 1, 2$ и инъективно при $p+q = 3$.*

**Доказательство.** Поскольку пучки поливекторных полей локально свободны, а дополнение $X \setminus X_1 \subset X$ имеет коразмерность по крайней мере 2, отображение $\sigma$ биективно при $p = 0$ и инъективно при $p = 1$ (для всех весов).

По нашему предположению $(\bullet)$ имеем

$$H^p(X, \Omega^q_X) = 0$$

при $p + q > \dim X$. Поскольку $X$ симплектично, имеем $\Omega^p_X \cong \Lambda^{\dim X - p} \mathcal{T}(X)$, так что из этого следует, что

$$H^p(X, \Lambda^q \mathcal{T}(X)) = 0$$

при $p > q$. Для $q = 0$ это дает $H^p(X, \mathcal{O}_X) = 0$, $p \geq 1$, и $H^p(X_1, \mathcal{O}_X) = H^p(V_1/\Gamma, \mathcal{O}_{V/\Gamma}) = H^p(V_1, \mathcal{O}_V)^\Gamma$. Поскольку $\operatorname{codim}(V \setminus V_1) \geq 4$, из этого следует, что $H^p(X_1, \mathcal{O}_X) = 0$ при $p = 1, 2$. Если $q = 1$, получаем $H^2(X, \mathcal{T}(X)) = 0$, так что отображение $\sigma$ тавтологически инъективно при $p = 2$, $q = 1$.

Осталось рассмотреть сумму компонент отрицательного веса в группе $H^1(X, \mathcal{T}(X))$. Отождествим $\mathcal{T}(X) \cong \Omega^1_X$ с помощью симплектической формы; поскольку симплектическая форма имеет вес 2, достаточно рассмотреть сумму компонент неположительного веса в $H^1(X, \Omega^1_X)$. Более того, поскольку действие $\mathbb{G}_m$ на $X$ имеет положительные веса, достаточно изучить $\mathbb{G}_m$-инвариантную часть в $H^1(X, \Omega^1_X)$. Мы уже знаем, что отображение $\sigma$ инъективно на $H^1(X, \Omega^1_X)$. Поскольку $\operatorname{codim}(X \setminus X_1) \geq 2$, любое линейное расслоение на $X_1$ продолжается на все $X$. Тем самым, чтобы завершить доказательство, достаточно доказать следующий факт.

**Лемма 5.13.** *Группа $H^1(X_1, \Omega^1_X)^{\mathbb{G}}_m$ порождена классами Черна линейных расслоений на $X_1$.*

**Доказательство.** Пучок $\pi_* \Omega^1_X$ на $V_1/\Gamma$ совпадает с $\Gamma$-инвариантной частью пучка $\eta_* \Omega^1_V$, где $\eta\colon V \to V/\Gamma$ — отображение проекции. Поскольку $\operatorname{codim}(V \setminus V_1) \geq 4$, имеем $H^i(V_1/\Gamma, \pi_* \Omega^1(X)) = 0$ при $i = 1, 2$. Поэтому

$$H^1(X_1, \Omega^1_X) = H^0(V_1/\Gamma, R^1 \pi_* \Omega^1_X).$$

Пучок $R^1 \pi_* \Omega^1_X$ сосредоточен на дополнении $V_1/\Gamma \setminus V_0/\Gamma$, которое распадается в несвязное объединение компонент $H_\alpha$. Поэтому на $V_1/\Gamma$ имеем

$$R^1 \pi_* \Omega^1_X = \bigoplus_\alpha (\eta_{\alpha,*} \eta^*_\alpha R_1 \pi_* \Omega^1_X)^{N_\alpha},$$

где $\eta_\alpha\colon U_\alpha \to V_1/\Gamma$ — этальные карты, построенные в разд. 4. Замена базы дает

$$\eta_\alpha^* R^1\pi_*\Omega^1_X \cong R^1\pi_*\Omega^1_{X_\alpha}.$$

Напомним, что $X_\alpha$ — плотное открытое подмножество в $\overline{X}_\alpha = Y_\alpha \times V_\alpha$. Пучок $\Omega^1_{\overline{X}_\alpha}$ на $\overline{X}_\alpha$ разлагается в прямую сумму

$$\left(\Omega^1_{Y_\alpha} \boxtimes \mathcal{O}_{V_\alpha}\right) \oplus \left(\mathcal{O}_{Y_\alpha} \boxtimes \Omega^1_{V_\alpha}\right),$$

а так как $H^1(Y_\alpha, \mathcal{O}_{Y_\alpha}) = 0$, имеем

$$R^1(\pi_\alpha \times \mathsf{id})_*\left(\mathcal{O}_{Y_\alpha} \boxtimes \Omega^1_{V_\alpha}\right) = 0$$

по формуле проекции. Поэтому

$$R^1\pi_*\Omega^1_{X_\alpha} \cong R^1\pi_{\alpha,*}\Omega^1_{Y_\alpha} \boxtimes \mathcal{O}_{V_\alpha}.$$

Заключаем, что

$$H^0\left(V_1/\Gamma, R^1\pi_*\Omega^1_{X_1}\right) \cong \bigoplus_\alpha \left(H^1(Y_\alpha, \Omega^1_{Y_\alpha}) \otimes H^0(U_\alpha, \mathcal{O}_{V_{\alpha,0}})\right)^{N_\alpha},$$

и, поскольку дополнение $V_\alpha \setminus V_{\alpha,0}$ имеет коразмерность по меньшей мере 2, имеем

$$H^0(U_\alpha, \mathcal{O}_{V_{\alpha,0}}) \cong \mathcal{O}_{V_\alpha}$$

для каждого $\alpha$. Осталось доказать, что группа элементов веса 0 в

$$\left(H^1(Y_\alpha, \Omega^1_{Y_\alpha}) \otimes \mathcal{O}_{V_\alpha}\right)^{N_\alpha} \tag{5.3}$$

порождена классами Черна $N_\alpha$-эквивариантных линейных расслоений на $\overline{X}_\alpha$. Но легко видеть, что $H^1(Y_\alpha, \Omega^1_{Y_\alpha})$ порождено классами Черна компонент исключительной кривой $E = \pi_\alpha^{-1}(0) \subset \subset Y_\alpha$, а $\mathbb{G}_m$ действует на эту группу тривиально. С другой стороны, единственные функции неположительного веса на $V_\alpha$ — это константы. Итак, любой $N_\alpha$-инвариантный элемент веса 0 в группе (5.3) есть линейная комбинация классов Черна дивизоров вида $D \times V$, где $D$ — $N_\alpha$-инвариантный дивизор с носителем на $E$. Каждый такой дивизор $D \times V$ соответствует дивизору на $X_1$. $\square$

## 6. ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

С этого момента мы будем использовать нижние индексы, чтобы обозначать кольцо скаляров; так, для любой $R$-алгебры $A = A_R$ кольцо $A \otimes_R R'$ будем обозначать через $A_{R'}$.

**6.1. Предположения.** Зафиксируем алгебраически замкнутое поле $\mathsf{K}$ характеристики нуль и набор данных $\langle V, \omega, \Gamma, X\rangle$, определенных над $\mathsf{K}$, где $V$ — конечномерное векторное пространство над $\mathsf{K}$, $\omega$ — симплектическая форма на $V$, $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(V)$ — конечная подгруппа, а $X \to V/\Gamma$ — проективное гладкое крепантное разрешение фактор-многообразия $V/\Gamma$. Пусть $R \subset \mathsf{K}$ — такая $\mathbb{Z}$-алгебра конечного типа, что $\langle V, \omega, \Gamma, X\rangle$ определены над $R$; мы предполагаем, что $R \cong \mathbb{A}^n_R$, $\omega_R$ симплектично; $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(n, R)$, $X$ гладко над $R$, а $\pi\colon X \to V/\Gamma$ собственно (в дальнейшем мы будем просто говорить "определено над $R$", неявно предполагая все эти естественные условия). Тогда алгебра Вейля тоже определена над $R$. Ясно, что такое $R$ существует.

В силу [11] отображение $X \to V/\Gamma$ полумало. По [12] из этого следует, что $H^p(X,\Omega_X^q)=0$ при $p+q>\mathsf{dim}\,X$. Поэтому, локализуя при необходимости $R$, мы можем считать, что редукция $X_\mathsf{k}$ в каждой замкнутой точке $\operatorname{Spec}\mathsf{k}\in\operatorname{Spec}R$ положительной характеристики удовлетворяет условию ($\bullet$) в начале разд. 4 (чтобы проверить, что локус плохих точек есть замкнутое по Зарискому алгебраическое подмногообразие, используем действие $\mathbb{G}_m$ с положительными весами). При необходимости дополнительно локализуя $R$, добиваемся того, что все предположения разд. 4 выполнены для всех $X_\mathsf{k}$.

Обозначим $\mathsf{W}=\mathsf{W}_h/(h-1)\mathsf{W}_h$.

**Лемма 6.1.** *Существует такое плотное аффинное открытое подмножество* $\operatorname{Spec}R'\subset\subset\operatorname{Spec}R$, *что бимодуль* $\mathsf{W}_{R'}$ *задает эквивалентность Мориты*

$$\mathsf{W}_{R'}^{\Gamma}\sim(\mathsf{W}\#\Gamma)_{R'}.$$

**Доказательство.** Можно предположить, что $|\Gamma|^{-1}\in R$. Положим

$$e=\frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma\in R[\Gamma]\subset(\mathsf{W}\#\Gamma).$$

Тогда $e$ — идемпотент, $\mathsf{W}_{R'}^{\Gamma}=e((\mathsf{W}\#\Gamma)_{R'})e$ и, как хорошо известно, достаточно проверить, что $e$ порождает единичный двусторонний идеал в $(\mathsf{W}\#\Gamma)_{R'}$. Алгебра $\mathsf{W}_\mathsf{K}$ проста; легко вывести, что алгебра $(\mathsf{W}_\mathsf{K}\#\Gamma)$ также проста; поэтому $e$ порождает единичный идеал в $(\mathsf{W}\#\Gamma)_\mathsf{K}$. Следовательно, он порождает единичный идеал в $(\mathsf{W}\#\Gamma)_{R'}$ для некоторого $R'\subset K$ конечного типа над $R$. $\square$

**6.2. Эквивалентность для алгебры Адзумая в положительной характеристике.** Возьмем $R'$, удовлетворяющее заключению леммы 6.1, и зафиксируем замкнутую точку $\operatorname{Spec}\mathsf{k}\in\operatorname{Spec}R'$. Положим $X=X_\mathsf{k}$, $V=V_\mathsf{k}$. Рассмотрим градуированное фробениус-постоянное квантование $\mathcal{O}_h$ многообразия $X$, построенное в теореме 5.1. Продолжим его до пучка $\mathsf{O}_h$ на $X\times\operatorname{Spec}\mathsf{k}[h,h^{-1}]$, используя лемму 3.4. Положим $\mathsf{O}=\mathsf{O}_h/(h-1)\mathsf{O}_h$; тем самым $\mathsf{O}$ — локально свободный пучок на $X^{(1)}$.

**Лемма 6.2.** *Имеем* $H^i(\mathsf{O})=0$ *при* $i>0$, *а* $H^0(\mathsf{O})=\mathsf{W}^\Gamma$ *как алгебра над* $\mathcal{O}(V^{(1)})^\Gamma$.

**Доказательство.** Утверждение немедленно следует из конструкции; однако оно заслуживает того, чтобы вынести его в отдельную лемму, поскольку представляет собой ключевое место в доказательстве теоремы 1.1. $\square$

В силу предложения 3.8 алгебра $\mathsf{O}$ есть алгебра Адзумая ранга $p^{\mathsf{dim}\,X}$.

**Теорема 6.3.** *Имеем эквивалентности производных категорий*

$$D^b(\operatorname{Coh}(X,\mathsf{O}))\cong D^b\bigl(\mathsf{W}_\mathsf{k}^\Gamma\text{-mod}^{\mathtt{fg}}\bigr)\cong D^b\bigl(\mathsf{W}\#\Gamma_\mathsf{k}\text{-mod}^{\mathtt{fg}}\bigr),$$

*где первая эквивалентность дается производным функтором от функтора глобальных сечений, а вторая дается леммой* 6.1.

**Доказательство.** Вторая эквивалентность дается леммой 6.1. Остается доказать, что производный функтор от функтора глобальных сечений дает эквивалентность

$$D^b(\operatorname{Coh}(X,\mathsf{O}))\cong D^b\bigl(\mathsf{W}_\mathsf{k}^\Gamma\text{-mod}^{\mathtt{fg}}\bigr).$$

Мы проверим, что свободный модуль ранга 1 над $\mathsf{O}$ есть почти исключительный объект в $\operatorname{Coh}(X^{(1)},\mathsf{O})$; после этого требуемое утверждение вытекает из предложения 2.2.

Алгебра $\mathsf{W}$ имеет конечную гомологическую размерность, поскольку присоединенная градуированная алгебра по отношению к естественной фильтрации изоморфна симметрической алгебре $\mathrm{Sym}(V^*)$, гомологическая размерность которой конечна. Поскольку $\mathsf{char}\,\mathsf{k}$ не делит $|\Gamma|$, алгебра $\mathsf{W}\#\Gamma$ также имеет конечную гомологическую размерность; в силу эквивалентности, доставляемой леммой 6.1, то же самое верно для алгебры $\mathsf{W}^\Gamma$. Поскольку $H^i(X,\mathcal{O})=0$ при $i\geq 1$, объект $\mathsf{O}\in\mathrm{Coh}\big(X^{(1)}_{\mathsf{k}},\mathsf{O}\big)$ в самом деле почти исключителен. $\square$

**6.3. Раскрутка.** Используем обозначения предыдущего пункта. Устраним алгебры Адзумая.

**Предложение 6.4.** *Существует алгебра Адзумая $\mathcal{A}$ на $V^{(1)}/\Gamma$, ограничение которой на $V^{(1)}_0/\Gamma$ подобно $W^\Gamma|_{V^{(1)}_0/\Gamma}$.*

Предложение немедленно вытекает из следующего факта.

**Лемма 6.5.** *Пусть $S$ — аффинная схема, на которой действует конечная группа $\Gamma$, причем $|\Gamma|$ обратимо на $S$. Пусть $p\colon S\to S/\Gamma$ — проекция в категорный фактор. Пусть $l\in\mathbb{Z}_{>0}$ взаимно просто с $|\Gamma|$. Тогда $p^*$ индуцирует изоморфизм $\mathrm{Br}(S/\Gamma)[l]\xrightarrow{\sim}\mathrm{Br}(S)[l]^\Gamma$, где $[l]$ обозначает $l$-кручение.*

**Доказательство.** По теореме Габбера [6] для любой аффинной схемы $X$ имеем $\mathrm{Br}(X)[l]= H^2(X_{\mathrm{et}},\mathbb{G}_m)[l]$. Для любого конечного морфизма $p$ высшие прямые образы в этальной топологии $R^ip_*(\mathbb{G}_m)$, $i\geq 1$, тривиальны; в самом деле, слой пучка $R^ip_*(\mathbb{G}_m)$ в геометрической точке $x$ есть $i$-я группа когомологий этального пучка $\mathcal{O}^*$ на спектре некоторого коммутативного кольца $R$, конечного над строго гензелевым кольцом (см. [19, Theorem III.1.15]); но тогда само $R$ строго гензелево в силу [19, Corollary I.4.3], и потому эта группа когомологий обращается в нуль.

Имеем отображение нормы $\mathrm{Nm}\colon p_*(\mathbb{G}_m(S))\to\mathbb{G}_m(S/\Gamma)$. Оно индуцирует отображение

$$\mathrm{Nm}\colon\ \mathrm{Br}(S)[l]=H^2\big((S/\Gamma)_{\mathrm{et}},p_*(\mathbb{G}_m)\big)[l]\to H^2\big((S/\Gamma)_{\mathrm{et}},\mathbb{G}_m\big)[l]=\mathrm{Br}(S/\Gamma)[l].$$

Имеем $\mathrm{Nm}\circ p^*(c)=|\Gamma|\cdot c$ и $p^*\circ\mathrm{Nm}(c)=\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^*(c)$. Получаем требуемое утверждение. $\square$

**Замечание 6.6.** Предложение 6.4 вдохновлено результатом [2], где введен аналог описанной выше алгебры Адзумая $\mathcal{A}$. Точнее, в [2] явно построена алгебра Адзумая на нильпотентном конусе простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем характеристики $p$. Эта алгебра получается из универсальной обертывающей $U(\mathfrak{g})$ редукцией в “особом” характере центральной подалгебры $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t})^W$; особый центральный характер получается из особого веса $-\rho$ (здесь $\mathfrak{t}$ — подалгебра Картана $\mathfrak{g}$, а $W$ — группа Вейля).

**Теорема 6.7.** *Предположим, что данные $\langle V,\omega,\Gamma,X\rangle$ над полем вычетов $\mathsf{k}=R'/\mathfrak{m}$ положительной характеристики удовлетворяют предположениям теоремы 6.3. Тогда они также удовлетворяют заключению теоремы 2.3 (а следовательно, и теоремы 1.1).*

**Доказательство.** Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая, построенная в предложении 6.4. Мы утверждаем, что существуют эквивалентности

$$\mathrm{Coh}\big(X^{(1)}\big)\cong\mathrm{Coh}\big(X^{(1)},\mathsf{O}\otimes\pi^*(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})\big),\tag{6.1}$$

$$D^b\Big(\mathrm{Coh}\Big(X^{(1)},\mathsf{O}\otimes_{\mathcal{O}_{V^{(1)}}}\mathcal{A}^{\mathrm{op}}\Big)\Big)\cong D^b\Big(\mathsf{W}^\Gamma_{\mathsf{k}}\otimes_{\mathcal{O}^\Gamma_{V^{(1)}}}\mathcal{A}^{\mathrm{op}}\text{-}\mathrm{mod}^{\mathfrak{fg}}\Big),\tag{6.2}$$

$$\mathsf{W}^\Gamma_{\mathsf{k}}\otimes_{\mathcal{O}^\Gamma_{V^{(1)}}}\mathcal{A}^{\mathrm{op}}\text{-}\mathrm{mod}^{\mathfrak{fg}}\cong\Big(\Big(\mathsf{W}_{\mathsf{k}}\otimes_{\mathcal{O}_{V^{(1)}}}\eta^*(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})\Big)\#\Gamma\Big)\text{-}\mathrm{mod}^{\mathfrak{fg}},\tag{6.3}$$

$$\mathrm{Coh}^\Gamma\big(V^{(1)}\big)\cong\Big(\Big(\mathsf{W}_{\mathsf{k}}\otimes_{\mathcal{O}_{V^{(1)}}}\eta^*(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})\Big)\#\Gamma\Big)\text{-}\mathrm{mod}^{\mathfrak{fg}}.\tag{6.4}$$

Здесь (6.1) (соответственно (6.4)) получается, как только мы докажем, что алгебра Адзумая $\mathsf{O}\otimes\pi^*(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ (соответственно $\mathsf{W}_{\mathsf{k}}\otimes_{\mathcal{O}_{V^{(1)}}}\eta^*(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$), стоящая в правой части, расщепляется (соответственно допускает $\Gamma$-эквивариантное расщепление). В обоих случаях они расщеплены на открытом подмножестве в силу характеристического свойства $\mathcal{A}$; следовательно, они расщепляются всюду в силу [19, Corollary IV.2.6] (группа Брауера неприводимой регулярной схемы вкладывается в группу Брауера ее общей точки); $\Gamma$-эквивариантная структура на расщепляющем расслоении для $\mathsf{W}_\mathsf{k} \otimes_{\mathcal{O}_{V^{(1)}}} \eta^*(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ продолжается из $V_0$ на $V$, поскольку $\mathsf{codim}(V \setminus V_0) \geq 2$.

Эквивалентность (6.3) параллельна эквивалентности в лемме 6.1 и следует из того факта, что, поскольку идемпотент $e = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma$ порождает единичный двусторонний идеал в $\mathsf{W}_\mathsf{k}\#\Gamma$, он порождает единичный идеал и в $(\mathsf{W}_\mathsf{k} \otimes \eta^*(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}))\#\Gamma$.

Наконец, эквивалентность (6.2) параллельна эквивалентности в теореме 6.3. А именно по формуле проекции получаем

$$H^0\Big(\mathsf{O} \otimes_{\mathcal{O}^\Gamma_{V^{(1)}}} \mathcal{A}^{\mathrm{op}}\Big) = \mathsf{W}^\Gamma_\mathsf{k} \otimes_{\mathcal{O}^\Gamma_{V^{(1)}}} \mathcal{A}^{\mathrm{op}}.$$

Также из формулы проекции следует, что высшие группы когомологий пучка в левой части последнего равенства обращаются в нуль. В силу (6.3) алгебра в правой части имеет конечную гомологическую размерность. Поэтому (6.2) вытекает из предложения 2.2.

Компонуя эквивалентности (6.1)–(6.4), получаем эквивалентность производных категорий когерентных пучков; теперь в качестве $\mathcal{E}$ можно взять образ структурного пучка $\mathcal{O}_V\#\Gamma \in$ $\in \mathrm{Coh}^\Gamma(V)$ при этой эквивалентности.

Осталось проверить, что $\mathcal{E}$ — векторное расслоение; тогда из эквивалентности категорий следует, что оно удовлетворяет заключению теоремы 2.3. Используем следующее более подробное описание $\mathcal{E}$. Пусть $\mathcal{B}$ есть $\mathsf{O} \otimes \pi^*(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$-модуль, дающий эквивалентность Мориты между $\mathsf{O}$ и $\pi^*(\mathcal{A})$, и пусть $B$ есть $\mathsf{W}_h \otimes \eta^*(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$-модуль, дающий эквивалентность Мориты между $\mathsf{W}_h$ и $\eta^*(\mathcal{A})$. Из определения следует, что все эти эквивалентности переводят когерентный пучок $\mathcal{B} \in \mathrm{Coh}(X^{(1)})$ в $B \otimes \mathsf{k}[\Gamma] \in \mathrm{Coh}^\Gamma(V^{(1)})$. Векторное расслоение $B$ на $V^{(1)}$ тривиально по теореме Суслина–Квиллена. Поэтому $\mathcal{O}\#\Gamma$ — прямое слагаемое в $B \otimes \mathsf{k}[\Gamma]$ и $\mathcal{E}$ — прямое слагаемое в $\mathcal{B}$; в частности, оно есть векторное расслоение. $\square$

**Замечание 6.8.** Представленное выше явное описание $\mathcal{E}$ можно слегка упростить, если ограничиться рассмотрением ограничения $\mathcal{E}$ на формальную окрестность слоя $\pi$. Тогда алгебра $\mathsf{O}$ расщепляется и неразложимые слагаемые $\mathcal{E}$ суть неразложимые слагаемые расщепляющего векторного расслоения для $\mathsf{O}$.

**6.4. Характеристика нуль.** Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 1.1. Достаточно доказать теорему 2.3.

**Лемма 6.9.** *Пусть даны поля* $\mathsf{k}_1 \subset \mathsf{k}_2$ (*не обязательно алгебраически замкнутые*). *Предположим, что* $V$, $\omega$, $\Gamma$, $X$ *определены над* $\mathsf{k}_1$. *Если утверждения теоремы* 2.3 *верны для* $V$, $\omega$, $\Gamma$, $X$, *то они также верны для* $V_{\mathsf{k}_2}$, $\omega_{\mathsf{k}_2}$, $\Gamma$, $X_{\mathsf{k}_2}$. *Наоборот, если они верны для* $V_{\mathsf{k}_2}$, $\omega_{\mathsf{k}_2}$, $\Gamma$, $X_{\mathsf{k}_2}$, *то они верны и для* $V_{\mathsf{k}'_1}$, $\omega_{\mathsf{k}'_1}$, $\Gamma$, $X_{\mathsf{k}'_1}$, *где* $\mathsf{k}'_1$ — *некоторое конечное расширение* $\mathsf{k}_1$.

**Доказательство.** Первое утверждение очевидно. Чтобы доказать второе, рассмотрим такую $\mathsf{k}_1$-алгебру конечного типа $R \subset \mathsf{k}_2$, что и векторное расслоение $\mathcal{E}_{\mathsf{k}_2}$, существующее по теореме 2.3, и изоморфизм $\mathrm{End}(\mathcal{E}) \cong \mathcal{O}_V\#\Gamma$ определены над $R$. Тогда в качестве $\mathsf{k}'_1$ можно взять поле вычетов любой замкнутой точки $\operatorname{Spec} R$. $\square$

**Доказательство теоремы 2.3.** Вернемся к обозначениям п. 6.1; заменим $R$ на $R'$, данное леммой 6.1. Возьмем любую замкнутую точку $\operatorname{Spec}\mathsf{k} \in \operatorname{Spec} R$, в которой $R$ регулярно, а поле вычетов $\mathsf{k} = R/\mathfrak{m}$ имеет положительную характеристику. Пусть $\widetilde{R}$ — пополнение $R$ по $\mathfrak{m}$-адической топологии, и пусть $\mathsf{K}'$ — его поле частных. По теореме 6.7 теорема 2.3 верна для $X_\mathsf{k}$. Более того, по построению векторное расслоение $\mathcal{E}$ на $X_\mathsf{k}$ удовлетворяет предположениям предложения 4.3. Следовательно, теорема 2.3 верна также и для $X_{\mathsf{K}'}$. Применяя лемму 6.9, заключаем, что теорема 2.3 верна над конечным расширением $F$ поля частных кольца $R$. Поскольку $F$ изоморфно подполю $\mathsf{K}$, заключаем, что и в исходной ситуации теорема верна. $\square$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Berthelot P., Ogus A.* Notes on crystalline cohomology. Princeton (NJ): Princeton Univ. Press; Tokyo: Univ. Tokyo Press, 1978.
2. *Bezrukavnikov R., Mirković I., Rumynin D.* Localization of modules for a semisimple Lie algebra in prime characteristic: E-print, 2002. math.RT/0205144.
3. *Bridgeland T., King A., Reid M.* The McKay correspondence as an equivalence of derived categories // J. Amer. Math. Soc. 2001. V. 14. P. 535–554.
4. *Бондал А.И., Капранов М.М.* Представимые функторы, функторы Серра и перестройки // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1989. Т. 53. С. 1183–1205.
5. *Bondal A., Orlov D.* Derived categories of coherent sheaves // Proc. Intern. Congr. Math., Beijing, 2002. Beijing: Higher Ed. Press, 2002. V. 2. P. 47–56.
6. *Gabber O.* Some theorems on Azumaya algebras // Groupe de Brauer: Semin. Les Plans-sur-Bex, 1980. Berlin; New York: Springer, 1981. P. 129–209. (Lect. Notes Math.; V. 844).
7. *Gonzalez-Sprinberg G., Verdier J.-L.* Construction géométrique de la correspondance de McKay // Ann. sci. École Norm. Supér. 1983. V. 16. P. 409–449.
8. *Haiman M.* Hilbert schemes, polygraphs, and the Macdonald positivity conjecture // J. Amer. Math. Soc. 2001. V. 14. P. 941–1006.
9. *Hartshorne R.* Residues and duality: Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. Berlin; New York: Springer, 1966. (Lect. Notes Math.; V. 20).
10. *Ito Y., Nakamura I.* McKay correspondence and Hilbert schemes // Proc. Japan Acad. A: Math. Sci. 1996. V. 72, N 7. P. 135–138.
11. *Kaledin D.* Dynkin diagrams and crepant resolutions of singularities: E-print, 1999. math.AG/9903157 // Sel. Math. To appear.
12. *Kaledin D.* Sommese vanishing for non-compact manifolds: E-print, 2003. math.AG/0312271.
13. *Kapranov M.* Noncommutative geometry based on commutator expansions // J. reine und angew. Math. 1998. Bd. 505. S. 73–118.
14. *Kapranov M., Vasserot E.* Kleinian singularities, derived categories and Hall algebras // Math. Ann. 2000. Bd. 316. S. 565–576.
15. *Keller B.* On the cyclic homology of exact categories // J. Pure and Appl. Algebra. 1999. V. 136. P. 1–56.
16. *King A.* Moduli of representations of finite-dimensional algebras // Quart. J. Math. Oxford. Ser. 2. 1994. V. 45. P. 515–530.
17. *Kronheimer P.B.* The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients // J. Diff. Geom. 1989. V. 29. P. 665–683.
18. *Lusztig G.* On quiver varieties // Adv. Math. 1998. V. 136. P. 141–182.
19. *Milne J.S.* Étale cohomology. Princeton: Princeton Univ. Press, 1980. (Princeton Math. Ser.; V. 33). Рус. пер.: *Милн Дж.* Этальные когомологии. М.: Мир, 1982.
20. *Nakajima H.* Quiver varieties and Kac–Moody algebras // Duke Math. J. 1998. V. 91. P. 515–560.
21. *Nakajima H.* Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 1999. (Univ. Lect. Ser.; V. 18).
22. *Reid M.* McKay correspondence: E-print, 1997. alg-geom/9702016.