Из теоремы 3 вытекает, что в качестве искомой системы чисел $\mathfrak{M}(\varepsilon)$ мы можем взять множество G_r, где

$$r=\left[\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\log_3 p_0\right].$$

Автор выражает признательность О. Б. Лупанову и А. Б. Угольникову за научное руководство работой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колпаков Р. М. О порождении некоторых классов рациональных чисел вероятностными π-сетями // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1991. № 2. 27—30.
2. Схиртладзе Р. Л. О синтезе p-схемы из контактов со случайными дискретными состояниями // Сообщ. АН ГрССР. 1961. 26, № 2. 181—186.
3. Салимов Ф. И. К вопросу моделирования булевых случайных величин функциями алгебры логики // Вероятн. методы и кибернетика (Казань). 1979. № 15. 68—89.
4. Бухараев Р. Г. Основы теории вероятностных автоматов. М., 1985.

Поступила в редакцию
16.06.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1992. № 6

УДК 539.376

Д. В. Георгиевский

ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СКАЛЯРНЫМ СООТНОШЕНИЕМ

В работе [1] дана общая постановка краевой задачи устойчивости трехмерного течения вязкопластического тела относительно трехмерных возмущений. Скалярное соотношение выбиралось в виде линейной связи максимального касательного напряжения T и максимальной скорости скольжения U.

В настоящей заметке эта постановка обобщается на случай произвольной связи T и U [2, 3]:

$$T=\tau_s+\mu U[1-F(U)], \qquad U>0, \tag{1}$$

где τ_s — предел текучести при сдвиге, μ — динамическая вязкость. Функция упрочнения $F(U)$ удовлетворяет требованиям:

а) $\lim\limits_{U\to+0} U[1-F(U)]=0$; б) $[UF(U)]'\leqslant 1$;

в) $[UF(U)]''\leqslant 0$ для материалов с мягкой характеристикой,
$[UF(U)]''\geqslant 0$ для материалов с жесткой характеристикой.

В декартовой эйлеровой системе координат $(Ox_1x_2x_3)$ уравнения движения несжимаемого вязкопластического тела Ω с тензорно линейными векторными соотношениями и скалярным соотношением (1) имеют вид

$$-p_{,i}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(1+\frac{\varkappa}{U}-F(U)\right)\nabla^2 v_i-\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\varkappa}{U^2}+F'(U)\right)(v_{i,j}+v_{j,i})U_{,j}+$$
$$+\frac{g_i}{\mathrm{Fr}}=\frac{dv_i}{dt}, \quad i=1,\ 2,\ 3. \tag{2}$$

Здесь p — давление, $\mathbf{v}$ — скорость, Re и Fr — числа Рейнольдса и Фруда, $\varkappa=\tau_s h/\mu V$, g_i — направляющие косинусы ускорения силы тяжести. Уравнения (2) обезразмерены в базисе $\{\rho;\ V;\ h\}$, где ρ — плотность тела, V и h — характерные скорость и линейный размер соответственно.

Начальные и граничные условия записываются следующим образом:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},\ 0)=\widehat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}), \tag{3}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},\ t)=\mathbf{W}(\mathbf{x},\ t),\ \mathbf{x}\in\Sigma_v;\ (\underset{\sim}{\sigma}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{x},\ t)=P(\mathbf{x},\ t),\ \mathbf{x}\in\Sigma_\sigma. \tag{4}$$

Движение самих поверхностей $\Sigma_v: x_3=f_v(x_1,\ x_2,\ t)$ и $\Sigma_\sigma: x_3=f_\sigma(x_1,\ x_2,\ t)$ описывается уравнениями

$$\frac{\partial f_{(v;\sigma)}}{\partial t}=v_3-v_1\frac{\partial f_{(v;\sigma)}}{\partial x_1}-v_2\frac{\partial f_{(v;\sigma)}}{\partial x_2},\ \mathbf{x}\in\Sigma_{(v;\sigma)}. \tag{5}$$

После решения краевой задачи (2)—(5) можно найти жесткие зоны Ω_r в теле. Совокупность их границ определяется условием

$$T(\mathbf{x},\ t)=\tau_s,\ \mathbf{x}\in\Sigma_r. \tag{6}$$

Будем приписывать индекс 0 вверху либо внизу невозмущенным величинам, являющимся точными решениями поставленной выше краевой задачи. Знаки вариаций перед возмущениями для краткости писать не будем. Линеаризуя нелинейные уравнения (2), получим уравнения движения в возмущениях

$$-p_{,i}+\frac{\nabla^2 v_i}{\mathrm{Re}}+\frac{2\varkappa}{\mathrm{Re}}\left(\frac{v_{ij}-V^0_{ijkl}v_{kl}}{U_0^2}\right)_{,j}-\frac{2}{\mathrm{Re}}\left[F(U_0)v_{ij}+U_0F'(U_0)V^0_{ijkl}v_{kl}\right]_{,j}=$$

$$=\frac{\partial v_i}{\partial t}+v^0_j v_{i,j}+v^0_{i,j}v_j,\quad i=1,\ 2,\ 3, \tag{7}$$

где v_{ij} — компоненты тензора скоростей деформаций, а $V^0_{ijkl}=v^0_{ij}v^0_{kl}/(v^0_{mn}v^0_{mn})\equiv\equiv 2v^0_{ij}v^0_{kl}/U_0^2$ — тензор четвертого ранга, полностью определяемый основным течением.

Граничные условия (4), (6), снесенные с возмущенных поверхностей $x_3=f_{(v;\sigma;r)}+\eta_{(v;\sigma;r)}$ на невозмущенные $x_3=f_{(v;\sigma;r)}$ и линеаризованные при малых η, имеют вид

$$v_i=-\frac{\partial v^0_i}{\partial x_3}\eta_v,\quad x_3=f_v(x_1,\ x_2,\ t), \tag{8}$$

$$\sigma_{ij}n^0_j+\sigma^0_{ij}n_j=-\frac{\partial P^0_i}{\partial x_3}\eta_\sigma,\quad x_3=f_\sigma(x_1,\ x_2,\ t), \tag{9}$$

$$2v^0_{kl}v_{kl}=-U_0\frac{\partial U_0}{\partial x_3}\eta_r,\quad x_3=f_r(x_1,\ x_2,\ t). \tag{10}$$

Здесь мы полагаем, что заданные на Σ_v и Σ_σ векторы $\mathbf{W}$ и $\mathbf{P}$ в основном и возмущенном движениях не меняются. Из (5) следует закон движения поверхностей Σ_v, Σ_σ и Σ_r:

$$\frac{\partial\eta_{(v;\sigma;r)}}{\partial t}=v_3-v^0_1\frac{\partial\eta_{(v;\sigma;r)}}{\partial x_1}-v^0_2\frac{\partial\eta_{(v;\sigma;r)}}{\partial x_2}-v_1\frac{\partial f_{(v;\sigma;r)}}{\partial x_1}-$$

$$-v_2\frac{\partial f_{(v;\sigma;r)}}{\partial x_2},\quad \mathbf{x}\in\Sigma_{(v;\sigma;r)}. \tag{11}$$

Итак, линеаризованная краевая задача устойчивости нелинейно вязкопластического тела представляет собой три уравнения (7), уравнение несжимаемости $v_{i,i}=0$ с граничными условиями (8)—(11), заданными на поверхностях $x_3=f_{(v;\,\sigma;\,r)}$, и начальными условиями

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},\,0)=0.$$

В работе [1] аналогичная постановка для линейно вязкопластического тела в случае чистого сдвига, когда V^0_{ijkl} имеет вид

$$V^0_{ijkl}=\frac{1}{2}(\delta_{i1}\delta_{k1}\delta_{j3}\delta_{l3}+\delta_{j1}\delta_{k1}\delta_{i3}\delta_{l3}+\delta_{i1}\delta_{l1}\delta_{j3}\delta_{k3}+\delta_{j1}\delta_{l1}\delta_{i3}\delta_{k3}),$$

сводится к обобщенной спектральной проблеме Орра—Зоммерфельда [4, 5], а также доказывается теорема Сквайра, позволяющая ограничиваться только плоскими возмущениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Георгиевский Д. В. Устойчивость двумерных и трехмерных вязкопластических течений и обобщенная теорема Сквайра // Изв. РАН. Механ. тверд. тела. 1993. № 1.
2. Ильюшин А. А. Некоторые вопросы теории пластического течения // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1958. № 2. 64—86.
3. Магомедов О. Б., Победря Б. Е. Некоторые задачи вязкоупругопластического течения // Упругость и неупругость. Вып. 4. М., 1975. 152—169.
4. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М., 1971.
5. Шкадов В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. М., 1973.

Поступила в редакцию
28.04.92