Sh. I. Akhalaya, A. M. Stepin, On Absolutely Continuous Invariant Measures of Noncontracting Transformations of a Circle,
*Trudy Mat. Inst. Steklova*, 2004, Volume 244, 23–34

*ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2004, т. 244, с. 23–34*

*УДК 517.98*

# Об абсолютно непрерывных инвариантных мерах несжимающих преобразований окружности[1]

**©2004 г. Ш. И. Ахалая[2], А. М. Степин[3]**

Поступило в марте 2002 г.

Дано полное изложение результата, ранее анонсированного авторами. Получено условие существования абсолютно непрерывной инвариантной меры для (локально) несжимающих отображений отрезка и окружности, не предполагающее монотонности производной рассматриваемых отображений в окрестностях их негиперболических неподвижных точек. Доказано, что для несжимающего $C^2$-отображения $f$ окружности в себя, неплоского в точках, где $f' = 1$, существует бесконечная абсолютно непрерывная инвариантная мера. Показано, что ограничение на класс гладкости ослабить нельзя.

**1.** За последние 15–20 лет появился ряд работ, посвященных изучению абсолютно непрерывных инвариантных мер одномерных отображений. Впервые доказательство существования такой конечной меры для растягивающих преобразований окружности и отрезка было дано Ласотой и Йорком [1] и Адлером [2]. При этом оказалось, что отсутствие точек, в которых одномерное отображение перестает растягивать, существенно для конечности имеющейся абсолютно непрерывной инвариантной меры (см., например, [3]). В этом направлении более глубокий результат был получен Боуэном [4].

В настоящей работе найдено достаточное условие существования абсолютно непрерывной инвариантной меры для так называемых несжимающих преобразований окружности класса гладкости $C^2$. Показано, что такая мера с необходимостью бесконечна, а также установлено, что для каждого $\alpha \in (0,1)$ существует несжимающее преобразование окружности класса гладкости $C^{1,\alpha}$, которое имеет конечную абсолютно непрерывную меру.

**2.** Итак, рассматриваются преобразования окружности класса гладкости $C^2$, для которых условие растяжения $|\varphi'(x)| > 1$ нарушается в конечном числе точек $x_1,\dots,x_n$. Такие преобразования назовем несжимающими. При исследовании вопроса о существовании абсолютно непрерывной инвариантной меры можно без ограничения общности считать, что $x_1,\dots,x_n$ являются неподвижными точками преобразования $\varphi$ и $\varphi'(x) > 1$ вне этих точек. Пусть $\psi$ — непрерывная ветвь обратного к $\varphi$ отображения в окрестности неподвижной точки $p$. Будем говорить, что отображение $\psi$ удовлетворяет в неподвижной точке $p$ условию $\Lambda^+$ (соответственно $\Lambda^-$), если для некоторого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такая точка $z \in (p, p+\varepsilon)$ (соответственно $z \in (p-\varepsilon, p)$) и число $L(z) > 0$, что для любых точек $x, y \in [\psi(z), \varphi(z)]$ (соответственно $x, y \in [\varphi(z), \psi(z)]$) выполнено неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi''(\psi^n(x))|}{(\varphi^n)'(\psi^n(y))} < L(z).$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке второго автора программой “Ведущие научные школы” (проект НШ-457.2003.1).

[2]Сухумский университет, Сухуми.

[3]Механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: stepin@mech.math.msu.su

Рассматриваемое условие выполнено, например, в том случае, когда производная несжимающего преобразования больше единицы или монотонна в некоторой окрестности неподвижной точки.

**Теорема 1.** *Если несжимающее преобразование $\varphi$ окружности класса гладкости* $\mathrm{C}^2$ *растягивает вне неподвижных точек, а в этих точках выполнены условия* $\Lambda^+$ *и* $\Lambda^-$, *то существует абсолютно непрерывная $\varphi$-инвариантная мера, которая с необходимостью бесконечна.*

**Доказательство.** Рассматривая окружность как отрезок с отождествленными концами, представим преобразование $\varphi$ как отображение $f$ единичного отрезка $I$ в себя. Отображение $f$ удовлетворяет следующим условиям:

а) существует такое разбиение $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = 1$ отрезка $I$, что ограничение отображения $f$ на полуинтервал $[a_{k-1}, a_k)$ продолжается до функции $f_k$ класса гладкости $\mathrm{C}^2$ на отрезке $I_k = [a_{k-1}, a_k]$, $k = 1, \ldots, n$;

б) все функции $f_k$ возрастают и взаимно однозначно отображают $I_k$ на $I$.

Поэтому для доказательства сформулированной теоремы достаточно показать, что верна следующая

**Теорема 2.** *Если несжимающее преобразование $f$ отрезка $I$, удовлетворяющее условиям* а) *и* б), *растягивает вне неподвижных точек $b_1, \ldots, b_n$, а в этих точках выполнены условия* $\Lambda^+$ *и* $\Lambda^-$, *то существует абсолютно непрерывная $f$-инвариантная мера, которая с необходимостью бесконечна.*

**Доказательство.** Так как из существования абсолютно непрерывной инвариантной меры для индуцированного отображения следует существование такой же меры для исходного отображения (по которому строилось индуцированное отображение), то сначала построим индуцированное отображение $T$ преобразования $f$ по множеству

$$A = \bigcup_{k=1}^{n-1} \{(f_k^{-1}(a_k), a_k) \cup (a_k, f_{k+1}^{-1}(a_k))\},$$

а затем покажем существование абсолютно непрерывной $T$-инвариантной меры.

Для построения отображения $T$ введем интервалы

$$A_{2i-1}^k = (\beta_k^i, \beta_{k+1}^i) \qquad \text{и} \qquad A_{2i}^k = (\alpha_{k+1}^i, \alpha_k^i),$$

где $\alpha_k^i = f_i^{-k+1}(a_i)$ и $\beta_k^i = f_i^{-k+1}(a_{i-1})$, $k = 1, 2, \ldots$; $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как $f_i(x) > x$ при $x > b_i$ и $f_i(x) < x$ при $x < b_i$, то последовательности $\{\alpha_k^i\}_{k=1}^\infty$ монотонно убывают, а последовательности $\{\beta_k^i\}_{k=1}^\infty$ монотонно возрастают, причем

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k^i = \lim_{k\to\infty} \beta_k^i = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В силу определения рассматриваемых интервалов и монотонности построенных последовательностей заключаем, что для любого натурального числа $k$ интервалы $A_j^k$, $j = 2, 3, \ldots, 2n-1$, непусты, а их замыкания образуют замкнутое разбиение множества $I \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, причем

$$A = \bigcup_{j=2}^{2n-1} A_j^1.$$

Из свойства б) отображения $f$ следует биективность следующих соответствий:

$$f_i \colon A_{2i}^{k+1} \to A_{2i}^k, \qquad f_i \colon A_{2i-1}^{k+1} \to A_{2i-1}^k,$$

$k = 1, 2, \ldots$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Наконец, построим интервалы вида

$$I_{i,j}^k = f_i^{-1}(A_j^k),$$

где $k = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 2, 3, \ldots, 2n-1$. Непосредственно из определения этих интервалов следует, что для любого натурального числа $k$ все интервалы $I_{i,j}^k$ непусты, причем

$$I_{i,2i}^k = A_{2i}^{k+1} \qquad \text{и} \qquad I_{i,2i-1}^k = A_{2i-1}^{k+1},$$

$k = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому множество

$$A_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{\substack{j=2 \\ j \neq 2i-1,\, 2i}}^{2n-1} I_{i,j}^k$$

будет всюду плотным подмножеством полной меры в $A$.

Теперь мы можем описать индуцированное отображение $T$. Если точка $x$ принадлежит множеству $A$, то возможны два случая: либо $x \in A_0$, либо $x \notin A_0$. В первом случае найдутся такие индексы $k = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 2, 3, \ldots, 2n-1;\ j \neq 2i-1, 2i$, что $x \in I_{i,j}^k$ и в силу построения этих интервалов будем иметь

$$T(x) = f_j^{k-1} \circ f_i(x). \tag{1}$$

Во втором случае точка $x$ является концевой точкой некоторого из интервалов $I_{i,j}^k$. Таких точек счетное число, и поэтому с метрической точки зрения их рассмотрением можно пренебречь.

Из определения отображения $T$ и равенства (1) следует, что его ограничение на интервалах $I_{i,j}^k$ продолжается до функции класса гладкости $\mathrm{C}^2$ на отрезки $\overline{I_{i,j}^k}$, причем имеют место следующие биективные соответствия:

$$T\colon\ I_{i,j}^k \to A_j^1,$$

где $k = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 2, 3, \ldots, 2n-1;\ j \neq 2i-1, 2i$. Так как замыкание множества $A_0$ не содержит неподвижных точек отображения $f$, то из равенства (1) заключаем, что отображение $T$ является растягивающим, т.е.

$$\inf_{A_0}\{T'(x)\} = \varkappa > 1. \tag{2}$$

**Лемма 1.** *Следующие величины ограничены в совокупности некоторым* (*одним и тем же*) *числом* $\sigma$:

$$\Lambda_{i,j}^k = \sup_{I_{i,j}^k}\left\{\frac{|T''(x)|}{(T'(x))^2}\right\},$$

*где* $k = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 2, 3, \ldots, 2n-1;\ j \neq 2i-1, 2i.$

**Доказательство.** Пусть точки $x$ и $y$ принадлежат одному из интервалов $I_{i,j}^k$, и для определенности предположим, что индекс $j$ четен, т.е. найдется такое число $m = \overline{1, n-1}$, что $m \neq i$ и $j = 2m$. Тогда из равенства (1) получим

$$\frac{|T''(x)|}{(T'(y))^2} \le \frac{|(f_m^{k-1})''(f_i(x))|}{\left((f_m^{k-1})'(f_i(y))\right)^2}\,\frac{(f_i'(x))^2}{(f_i'(y))^2} + \frac{(f_m^{k-1})'(f_i(x))}{(f_m^{k-1})'(f_i(y))}\,\frac{|f_i''(x)|}{(f_i'(y))^2}\,.$$

Взяв верхнюю грань от обеих частей полученного неравенства по множеству $I^k_{i,2m}$ и заметив, что $f_i$ отображает биективно это множество на $A^k_{2m}$, получим такое неравенство:

$$\Lambda^k_{i,2m} \le \alpha_i\, M^k_m + \beta_i\, N^k_m, \tag{3}$$

где

$$\alpha_i = \sup_{I_i}\left\{\frac{(f_i'(x))^2}{(f_i'(y))^2}\right\}, \qquad \beta_i = \sup_{I_i}\left\{\frac{|f_i''(x)|}{(f_i'(y))^2}\right\},$$

$$M^k_m = \sup_{A^k_{2m}}\left\{\frac{|(f^{k-1}_m)''(x)|}{\bigl((f^{k-1}_m)'(y)\bigr)^2}\right\}, \qquad N^k_m = \sup_{A^k_{2m}}\left\{\frac{(f^{k-1}_m)'(x)}{(f^{k-1}_m)'(y)}\right\}.$$

Из свойства a) отображения $f$ следует, что величины $\alpha_i$, $\beta_i$, $i=1,\dots,n$, ограничены. Поэтому в силу неравенства (3) для доказательства леммы достаточно показать равномерную ограниченность следующих функций:

$$M^k_m(x,y) = \frac{|(f^k_m)''(x)|}{\bigl((f^k_m)'(y)\bigr)^2} \qquad \text{и} \qquad N^k_m(x,y) = \frac{(f^k_m)'(x)}{(f^k_m)'(y)},$$

где $x,y\in A^{k+1}_{2m}$, $k=1,2,\dots$; $m=1,\dots,n-1$.

Обозначим через $d^k_m$ и $d_m$ вариацию функции $f_m'(x)$ на интервалах $A^{k+1}_{2m}\subset I_m$ и $I_m$, $k=1,2,\dots$; $m=1,\dots,n-1$, соответственно. В силу свойства a) отображения $f$ эти величины ограничены некоторым числом $d$. Если $x,y\in A^{k+1}_{2m}$, то $f^i_m(x), f^i_m(y)\in A^{k+1-i}_{2m}$. Следовательно, можно написать следующую цепочку неравенств:

$$N^k_m(x,y) = \prod_{i=0}^{k-1}\frac{f_m'(f^i_m(x))}{f_m'(f^i_m(y))} \le \exp\left\{\sum_{i=1}^{k} d^i_m\right\} \le \exp\left\{\sum_{i=1}^{\infty} d^i_m\right\} \le \exp\{d_m\} \le \exp\{d\}.$$

Покажем теперь ограниченность функций $M^k_m(x,y)$. Для этого запишем величину $(f^k_m)''(x)$ следующим образом:

$$(f^k_m)''(x) = (f^k_m)'(x)\sum_{i=0}^{k-1}\frac{f_m''(f^i_m(x))}{f_m'(f^i_m(x))}\,(f^i_m)'(x).$$

Тогда из определения функции $M^k_m(x,y)$ с учетом неравенства $f_m'(x)\ge 1$ получим

$$M^k_m(x,y) \le \exp\{2d\}\sum_{i=0}^{k-1}|f_m''(f^i_m(x))|\left(\prod_{j=i}^{k-1} f_m'(f^j_m(y))\right)^{-1}.$$

Так как $f_m$ биективно отображает $A^{k+1}_{2m}$ на $A^k_{2m}$, то найдутся такие точки $\overline{x},\overline{y}\in A^1_{2m}$, что $x=f^{-k}_m(\overline{x})$ и $y=f^{-k}_m(\overline{y})$. Поэтому последнее неравенство можно переписать так:

$$\exp\{-2d\}\, M^k_m(x,y) \le \sum_{i=1}^{k}|f_m''(f^{-i}_m(\overline{x}))|\left(\prod_{j=1}^{i} f_m'(f^{-j}_m(\overline{y}))\right)^{-1} \le S_m(\overline{x},\overline{y}),$$

где

$$S_m(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f_m''(f^{-n}_m(x))|}{(f^n_m)'(f^{-n}_m(y))}, \qquad x,y\in A^1_{2m}.$$

Так как прообразы точки множества $A^1_{2m}$ стремятся справа к неподвижной точке $b_m$ и в этой точке выполнено условие $\Lambda^+$, то имеем ограниченность функции $S_m(x,y)$, а следовательно, равномерную ограниченность функций $M^k_m(x,y)$, $k=1,2,\dots$ Равномерная ограниченность величин $\Lambda^k_{i,j}$ в случае нечетного $j$ доказывается аналогично с использованием условия $\Lambda^-$. Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Отображение $T$ обладает единственной абсолютно непрерывной инвариантной мерой, причем ее функция плотности $h(x)$ непрерывна на множестве $A$ и отделена от нуля некоторой константой $d$.*

**Доказательство.** Покажем сначала существование такой меры. Для этого на множестве $A$ построим последовательность положительных функций

$$\pi_n(x)=\sum_{y\in T^{-n}(x)}\frac{1}{(T^n)'(y)}\,,\qquad n=1,2,\dots,$$

и покажем, что она равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на каждом из интервалов $A^1_i$, $i=2,3,\dots,2n-1$. С этой целью фиксируем две произвольные точки $x$ и $y$ одного из интервалов $A^1_i$ и рассмотрим соотношение

$$\frac{\pi_n(x)}{\pi_n(y)}=\frac{\sum_{z\in T^{-n}(x)}\prod_{k=0}^{n-1}[T'(T^k(z))]^{-1}}{\sum_{w\in T^{-n}(y)}\prod_{k=0}^{n-1}[T'(T^k(w))]^{-1}}\,. \tag{4}$$

Из теоремы о среднем значении имеем равенства

$$T'(T^{-1}(y))-T'(T^{-1}(x))=T''(\xi)\,(T^{-1}(y)-T^{-1}(x)),$$
$$y-x=T'(\eta)\,(T^{-1}(y)-T^{-1}(x)),$$

где под $T^{-1}(x)$ и $T^{-1}(y)$ понимаются те прообразы точек $x$ и $y$, которые попадают в один и тот же интервал типа $I^k_{i,j}$, а $\xi$ и $\eta$ — некоторые точки этого интервала. Сопоставляя эти равенства, получим

$$\frac{T'(T^{-1}(y))}{T'(T^{-1}(x))}=1+\frac{T''(\xi)}{T'(\eta)\,T'(T^{-1}(x))}\,(y-x).$$

В силу леммы 1 отсюда следует неравенство

$$1-\sigma|x-y|\le\frac{T'(T^{-1}(y))}{T'(T^{-1}(x))}\le 1+\sigma|x-y|.$$

Применяя последовательно теорему о среднем значении и неравенство (2), получим

$$1-\varkappa^{-k+1}\,\sigma|x-y|\le\frac{T'(T^{-k}(y))}{T'(T^{-k}(x))}\le 1+\varkappa^{-k+1}\,\sigma|x-y|, \tag{5}$$

где $k=1,2,\dots$ Так как между множествами прообразов двух произвольных точек из одного и того же интервала $A^1_i$, $i=2,\dots,2n-1$, существует взаимно однозначное соответствие, то из (4) и (5) последует такое неравенство:

$$\prod_{k=0}^{n-1}(1-\varkappa^{-k}\,\sigma|x-y|)\le\frac{\pi_n(x)}{\pi_n(y)}\le\prod_{k=0}^{n-1}(1+\varkappa^{-k}\,\sigma|x-y|)$$

и, следовательно,

$$\exp\{-K|x-y|\}\le\frac{\pi_n(x)}{\pi_n(y)}\le\exp\{K|x-y|\},$$

где $K = \varkappa\sigma(\varkappa-1)^{-1}$ и $n \in \mathbb{N}$. В силу полученного неравенства можно утверждать, что построенная последовательность функций равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на каждом из интервалов $A_i^1$, $i = 2, 3, \dots, 2n-1$.

Рассмотрим теперь последовательность абсолютно непрерывных мер $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ с функциями плотности

$$\rho_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\pi_n(x).$$

Последовательность функций плотности равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на интервалах $A_i^1$, $i = 2, \dots, 2n-1$. Поэтому применим теорему Арцела (см., например, [5]) и из последовательности $\{\rho_n(x)\}$ выделим равномерно сходящуюся подпоследовательность на интервале $A_2^1$. Затем снова применим эту теорему к полученной подпоследовательности и выделим из нее равномерно сходящуюся подпоследовательность на интервале $A_3^1$. Продолжая последовательно этот процесс, получим подпоследовательность функций плотности, равномерно сходящуюся на каждом интервале $A_i^1$, $i = 2, \dots, 2n-1$, и, следовательно, на всем множестве $A$. Предельная функция $h(x)$ этой последовательности является непрерывной функцией плотности абсолютно непрерывной $T$-инвариантной меры $\mu$, причем для любых точек $x$ и $y$ из одного и того же интервала $A_i^1$, $i = 2, \dots, 2n-1$, выполнено неравенство

$$\exp\{-K|x-y|\} \le \frac{h(x)}{h(y)} \le \exp\{K|x-y|\}.$$

В силу этого неравенства можно утверждать, что функция $h(x)$ удовлетворяет на множестве $A$ неравенству

$$0 < d \le h(x) \le D < \infty, \tag{6}$$

где $d$ и $D$ — некоторые константы.

Для завершения доказательства леммы достаточно показать эргодичность отображения $T$ относительно построенной абсолютно непрерывной $T$-инвариантной меры, так как из эргодичности следует единственность такой меры (см., например, [6]).

Эргодичность отображения $T$ можно доказать, используя методику Реньи [7]. Следуя этой методике и используя лемму 1, можно показать, что для любых измеримых подмножеств $B$ и $C$ множества $A$ выполнено неравенство

$$\frac{c_1 d}{D^2}\,\mu\{C\} \le \frac{\mu\{T^{-1}(B)\cap C\}}{\mu\{B\}} \le \frac{c_2 D}{d^2}\,\mu\{C\},$$

где

$$c_1 = \min_{2\le i\le 2n-1}\left\{\frac{1}{\lambda\{A_i^1\}}\exp\left(-\frac{\varkappa\sigma}{(\varkappa-1)\lambda\{A_i^1\}}\right)\right\},$$

$$c_2 = \min_{2\le i\le 2n-1}\left\{\frac{1}{\lambda\{A_i^1\}}\exp\left(\frac{\varkappa\sigma}{(\varkappa-1)\lambda\{A_i^1\}}\right)\right\},$$

а $\lambda$ — мера Лебега на прямой. Пусть $B$ инвариантно относительно отображения $T$ и $\mu(B) > 0$. Тогда, взяв в качестве $C$ множество $A\setminus B$, из последнего неравенства получим $\mu(A\setminus B) = 0$. Но это и означает эргодичность отображения $T$ относительно меры $\mu$. Лемма полностью доказана.

Итак, существование абсолютно непрерывной $f$-инвариантной меры доказано. Покажем теперь, что любая такая мера бесконечна. Пусть это не так и абсолютно непрерывная $f$-инвариантная мера $d\nu(x) = \rho(x)\,d\lambda(x)$ конечна. Тогда ее ограничение на множество $A$ будет абсолютно непрерывной $T$-инвариантной мерой $d\mu(x) = h(x)\,d\lambda(x)$, которая была построена в лемме 2. В силу ее единственности ограничение функции $\rho(x)$ на множество $A$ почти всюду совпадает с функцией $h(x)$.

Замену окружности на единичный отрезок с отождествленными концами можно провести таким образом, чтобы в точке $b_1 = 0$ выполнялось равенство $f_1'(b_1) = 1$. Покажем, что $\nu$-мера интервала $(0, a_1)$ бесконечна.

Из определения последовательности точек $\{\alpha_k^1\}_{k=1}^\infty$ имеем

$$\nu\{(0,a_1)\} = \sum_{k=1}^\infty \Bigl(\nu\{(0,\alpha_k^1)\} - \nu\{(0,\alpha_{k+1}^1)\}\Bigr).$$

С другой стороны, в силу $f$-инвариантности меры $\nu$ можно написать следующую цепочку равенств:

$$\nu\{(0,\alpha_k^1)\} = \nu\{f^{-1}((0,\alpha_k^1))\} = \nu\{(0,\alpha_{k+1}^1)\} + \sum_{i=2}^n \nu\{f_i^{-1}((0,\alpha_k^1))\}.$$

Сопоставляя два последних равенства, получаем неравенство

$$\nu\{(0,a_1)\} \ge \sum_{k=1}^\infty \nu\{f_2^{-1}((0,\alpha_k^1))\}.$$

Так как для любого натурального числа $k$ имеет место включение

$$\bigcup_{n=k}^\infty A_2^n \subset (0,\alpha_k^1),$$

то

$$\nu\{(0,a_1)\} \ge \sum_{k=1}^\infty \nu\left\{f_2^{-1}\left(\bigcup_{n=k}^\infty A_2^n\right)\right\} = \sum_{k=1}^\infty \sum_{n=k}^\infty \nu\{f_2^{-1}(A_2^n)\} = \sum_{k=1}^\infty \sum_{n=k}^\infty \nu\{I_{2,2}^n\} =$$
$$= \sum_{k=1}^\infty \sum_{n=k}^\infty \int\limits_{I_{2,2}^n} \rho(x)\,d\lambda(x). \tag{7}$$

Заметив, что для любого натурального числа $n$ имеет место включение $I_{2,2}^n \subset A$, мы можем под знаком интеграла в (7) функцию $\rho(x)$ заменить функцией $h(x)$. Сделав это и учитывая неравенство (6), получим

$$\int\limits_{I_{2,2}^n} \rho(x)\,d\lambda(x) = \int\limits_{I_{2,2}^n} h(x)\,d\lambda(x) \ge d\cdot\lambda\{I_{2,2}^n\} = d\bigl|f_2^{-1}(\alpha_n^1) - f_2^{-1}(\alpha_{n+1}^1)\bigr| \ge cd(\alpha_n^1 - \alpha_{n+1}^1),$$

где

$$c = \min_{1\ge i\ge n}\Bigl\{\inf_I\{(f_i^{-1})'(x)\}\Bigr\}.$$

Отсюда и из неравенства (7) следует, что

$$\nu\{(0,a_1)\} \ge cd \sum_{k=1}^\infty \sum_{n=k}^\infty (\alpha_n^1 - \alpha_{n+1}^1) = cd \sum_{k=1}^\infty \alpha_k^1\,. \tag{8}$$

Покажем, что ряд в правой части неравенства (8) расходится. Для этого рассмотрим функцию

$$g(x) = x + \alpha x^2,$$

где $\alpha > 2f_1''(0)$ — любое положительное число. Тогда в некоторой достаточно малой правосторонней окрестности $\mathcal{U}$ нуля выполнено неравенство

$$f_1(x) \le g(x).$$

Пусть натуральное число $k$ такое, что $\alpha_k^1 \in \mathcal{U}$. Тогда

$$\alpha_n \le \alpha_{n+k}^1, \tag{9}$$

где

$$\alpha_n = g^{-n}(\alpha_k^1), \qquad n = 1, 2, \dots$$

Из неравенств (8) и (9) следует, что

$$\nu\{(0, a_1)\} \ge cd \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_n.$$

Так как числа $\alpha_n$ удовлетворяют неравенству (см., например, [3])

$$\frac{D_1}{n+l} < \alpha_n < \frac{D_2}{n+l}\,,$$

где $l$ — некоторое целое число, а $D_1$ и $D_2$ — некоторые положительные действительные числа, то ряд в правой части последнего неравенства расходится и, следовательно, $\nu$-мера интервала $(0, a_1)$ бесконечна.

Итак, бесконечность меры $\nu$ доказана. Тем самым завершено доказательство теоремы 1 и теоремы 2.

**3.** Ограничение на класс гладкости в теоремах 1 и 2 существенно, как показывает следующая

**Теорема 3.** *Для любого числа $\alpha \in (0,1)$ найдется такое несжимающее преобразование $f$ окружности класса $\mathrm{C}^{1,\alpha}$, что существует абсолютно непрерывная конечная $f$-инвариантная мера.*

**Доказательство.** Зафиксируем произвольное число $\alpha \in (0,1)$ и на полуинтервале $(0, 1/2]$ зададим функцию $\rho(x)$ следующим образом. На множествах $(0, 1/6)$ и $(1/4, 1/2)$ положим по определению $\rho(x) = x^{-\alpha}$ и $\rho(x) = 1$ соответственно, а на отрезке $[1/6, 1/4]$ определим $\rho(x)$ так, чтобы ее ограничение на множество $[1/12, 1/4]$ было убывающей функцией класса гладкости $\mathrm{C}^2$. Затем построим на отрезке $[0, 1/2]$ такую функцию $\varphi(x)$, чтобы всюду на полуинтервале $(0, 1/2]$ выполнялось неравенство

$$\rho(x) < 1 + \rho(\varphi(x))\varphi'(x). \tag{10}$$

Для этого выберем некоторым образом (ниже будет указано как) положительное число $\varepsilon < 1/2$ и соответственно на отрезках $[0, 1/3]$ и $[5/12, 1/2]$ положим по определению

$$\varphi(x) = x - \varepsilon x^{1+\alpha} \qquad \text{и} \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{6}\,.$$

На отрезке же $[1/3, 5/12]$ определим $\varphi(x)$ так, чтобы она имела производную меньше единицы и ее ограничение на множестве $[1/4, 1/2]$ было бы возрастающей функцией класса гладкости $\mathrm{C}^2$. В силу неравенств

$$\varphi(1/3) < 1/3 < \varphi(5/12) < \varphi(1/3) + 1/12$$

это возможно сделать. Так как на полуинтервале $(0, 1/2]$ функция $\rho(x)$ не возрастает и $\varphi(x) < x$, то вместо неравенства (10) достаточно проверить выполнение неравенства

$$\rho(x)[1 - \varphi'(x)] < 1. \tag{11}$$

Если $x$ — произвольная точка объединения множеств $(0, 1/6)$ и $(1/3, 1/2]$, то неравенство (11) выполнено в силу выбора числа $\varepsilon < 1/2$ и функций $\rho(x)$ и $\varphi(x)$. Пусть теперь $x$ — некоторая фиксированная точка отрезка $[1/6, 1/3]$. Тогда неравенство (11) примет вид

$$\rho(x)(\alpha + 1)\varepsilon x^{\alpha} < 1. \tag{12}$$

Это неравенство верно при $\varepsilon = 0$, и, следовательно, для достаточно малого значения $\varepsilon$ оно все еще будет выполняться. Зафиксируем это значение числа $\varepsilon$ и обозначим его через $\varepsilon(x)$, т.е. для всех $\varepsilon < \varepsilon(x)$ неравенство (12) верно. Из непрерывности левой части неравенства (12) по переменной $x$ следует, что существует такая окрестность $\mathcal{U}(x)$ точки $x \in [1/6, 1/3]$, что неравенство (12) верно для всех точек $y \in \mathcal{U}(x)$ и выбранного числа $\varepsilon(x)$. Из покрытия отрезка $[1/6, 1/3]$ такими окрестностями выберем конечное подпокрытие $\mathcal{U}(x_1), \dots, \mathcal{U}(x_n)$ и положим $\varepsilon = \min_{1 \le k \le n}\{\varepsilon(x_k)\}$. Тогда получим, что неравенство (12) выполнено на отрезке $[1/6, 1/3]$ и, следовательно, на всем промежутке $(0, 1/2]$.

Наконец, с помощью функций $\varphi(x)$ и $\rho(x)$ определим на отрезке $[0, 1/2]$ функцию $\psi(x)$ следующим равенством:

$$\psi(x) = \frac{1}{2} + \int\limits_{\varphi(x)}^{x} \rho(t)\, dt.$$

Данная функция возрастает на отрезке $[0, 1/2]$ от $1/2$ до $7/12$, причем на множествах $[1/4, 1/2]$ и $[0, 1/6]$ задается соответственно равенствами

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\, x + \frac{1}{3}$$

и

$$\psi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 - \alpha}\, x^{1+\alpha}\bigl[1 - (1 - \varepsilon x^{\alpha})^{1-\alpha}\bigr].$$

Так как

$$\psi'(x) = \rho(x) - \rho(\varphi(x))\varphi'(x),$$

то из неравенства (10) следует, что $\psi'(x)$ всюду на $(0, 1/2)$ меньше единицы. В окрестности нуля

$$\psi(x) = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{(1 - \alpha)^2}\, x - \frac{\alpha\varepsilon^2}{2(1 - \alpha)^3}\, x^{1+\alpha} + o(x^{1+\alpha}),$$

и, следовательно, построенная функция $\psi(x)$, так же как и $\varphi(x)$, принадлежит на отрезке $[0, 1/2]$ классу гладкости $\mathrm{C}^{1,\alpha}$.

Теперь мы можем приступить к завершению доказательства теоремы 3. Для этого на отрезке $[0, 1]$ определим возрастающие функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ класса гладкости $\mathrm{C}^{1,\alpha}$ следующим образом:

$$g_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \in [0, 1/2], \\ 1 - \psi(1 - x), & \text{если } x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

и

$$g_2(x)=\begin{cases}\psi(x), & \text{если } x\in[0,1/2],\\ 1-\varphi(1-x), & \text{если } x\in[1/2,1].\end{cases}$$

В силу определения функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$ их производные всюду меньше единицы, за исключением неподвижных точек. Так как для любого $x\in[0,1]$ выполнено равенство $g_1(x)=1-g_2(1-x)$, то преобразование

$$f(x)=\begin{cases}g_1^{-1}(x), & \text{если } x\in[0,1/2),\\ g_2^{-1}(x), & \text{если } x\in[1/2,1),\end{cases}$$

полуинтервала $[0,1)$ может быть рассмотрено как несжимающее преобразование окружности класса гладкости $C^{1,\alpha}$. Легко показать, что абсолютно непрерывная конечная мера $d\mu(x)=h(x)\,dx$, где

$$h(x)=\begin{cases}\rho(x), & \text{если } x\in(0,1/2],\\ \rho(1-x), & \text{если } x\in[1/2,1),\end{cases}$$

является $f$-инвариантной. Теорема 3 доказана.

**4.** Ряд результатов по метрической теории одномерных отображений были получены Боуэном [4] и Талером [8, 9]. В работах этих авторов предполагалась монотонность производной рассматриваемых отображений в окрестностях их неподвижных точек с единичной производной. Сравним это условие с нашими условиями $\Lambda^-$ и $\Lambda^+$. С этой целью построим пример несжимающего преобразования окружности с немонотонной производной в окрестностях его неподвижных точек, но удовлетворяющей в этих точках условиям $\Lambda^-$ и $\Lambda^+$. Для этого на отрезке $[0,1]$ рассмотрим функцию $f(x)=x+x^3$ и интересующее нас преобразование будем строить путем надлежащего возмущения производной $f'(x)$ с ее последующим зеркальным отражением относительно прямой $y=x$.

Предварительно построим последовательность точек $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, полагая

$$a_k=f^{-k}(2).$$

Так как она, монотонно убывая, стремится к нулю, то отрезки $I_k=[a_{k+1},a_k]$ образуют замкнутое разбиение полуинтервала $(0,1]$. Фиксируем произвольный отрезок $I_k$ и определим на нем функцию $\varphi_k'(x)$ следующим образом:

$$\varphi_k'(x)=\begin{cases}f'(x)+\alpha_k(x), & \text{если } a_{k+1}\le x\le \dfrac{a_k+a_{k+1}}{2},\\ f'(x)-\beta_k(x), & \text{если } \dfrac{a_k+a_{k+1}}{2}\le x\le a_k,\end{cases}$$

где

$$\alpha_k(x)=\varepsilon_k\exp\left\{-\frac{(a_k-a_{k+1})^2}{(a_k-a_{k+1})^2-(4x-a_k-3a_{k+1})^2}\right\},$$

$$\beta_k(x)=\varepsilon_k\exp\left\{-\frac{(a_k-a_{k+1})^2}{(a_k-a_{k+1})^2-(4x-a_{k+1}-3a_k)^2}\right\},$$

а положительное число $\varepsilon_k$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{3}{32}(3a_k^2+2a_ka_{k+1}-5a_{k+1}^2)<\varepsilon_k<\frac{24}{32}(a_k^2+2a_ka_{k+1}-3a_{k+1}^2).$$

Нетрудно проверить, что функция $\varphi'(x)$, ограничение которой на каждом из отрезков $I_k$ совпадает с $\varphi'_k(x)$, непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,1]$, немонотонна в окрестности нуля и для любой точки $x \in I_k$ удовлетворяет соотношению

$$f'(a_{k+1}) = \varphi'(a_{k+1}) \le \varphi'(x) \le \varphi'(a_k) = f'(a_k). \tag{13}$$

Поэтому монотонно возрастающая функция

$$\varphi(x) = \int_0^x \varphi'(t)\,dt$$

будет принадлежать классу $\mathrm{C}^2$ на отрезке $[0,1]$ и иметь немонотонную производную в правосторонней окрестности своей единственной неподвижной точки, причем для любого натурального числа $k$ выполнено равенство $\varphi(a_{k+1}) = a_k$. Покажем теперь, что в неподвижной точке построенная функция удовлетворяет условию $\Lambda^+$. Для этого в качестве точки $z$ возьмем, например, точку $a_2$. Пусть $y \in [\varphi^{-1}(z), \varphi(z)]$, т.е. $y \in [a_3, a_1]$. Оценим снизу величину $(\varphi^n)'(\varphi^{-n}(y))$. Так как $\varphi^{-k}(y) \in [a_{k+3}, a_{k+1}]$, то из соотношения (13) следует, что

$$(\varphi^n)'(\varphi^{-n}(y)) \ge \prod_{k=1}^{n} \varphi'(a_{k+3}).$$

В силу теоремы о среднем значении имеем равенство

$$\varphi'(\xi_k) = \frac{a_{k+2} - a_{k+3}}{a_{k+3} - a_{k+4}}\,,$$

где $\xi_k \in [a_{k+4}, a_{k+3}]$. Отсюда и из соотношения (13) заключаем, что

$$\varphi'(a_{k+3}) \ge \frac{a_{k+2} - a_{k+3}}{a_{k+3} - a_{k+4}}$$

и, следовательно,

$$(\varphi^n)'(\varphi^{-n}(y)) \ge \frac{a_3 - a_4}{a_{n+3} - a_{n+4}}\,.$$

Обозначим через $M$ максимум функции $|\varphi''(z)|$ на отрезке $[0,1]$. Тогда из последнего неравенства следует, что для любых двух точек $x, y \in [\varphi^{-1}(z), \varphi(z)]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi''(\varphi^{-n}(x))|}{(\varphi^n)'(\varphi^{-n}(y))} \le M \frac{a_4}{a_3 - a_4}\,.$$

Но это и означает, что в нуле построенная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию $\Lambda^+$.

Определим на отрезке $[1,2]$ монотонную возрастающую функцию $\psi(x)$ следующим образом:

$$\psi(x) = 2 - \varphi(2 - x)\,.$$

Ясно, что данная функция в окрестности своей единственной неподвижной точки $x = 2$ имеет немонотонную производную и удовлетворяет в этой точке условию $\Lambda^-$.

Наконец, рассматривая окружность $S$ как отрезок $[0,2]$ с отождествленными концами, построим отображение $h\colon S \to S$, полагая

$$h(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } 0 \le x < 1, \\ \psi(x), & \text{если } 1 \le x < 2. \end{cases}$$

В силу сказанного выше это несжимающее преобразование окружности с единственной неподвижной точкой, причем в окрестности этой точки производная $h'(x)$ немонотонна, а условия $\Lambda^-$ и $\Lambda^+$ выполнены.

Таким образом, изложенная конструкция показывает, что условия $\Lambda^-$ и $\Lambda^+$ существенно слабее предположения о монотонности производной в окрестности неподвижной точки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Lasota A., Yorke J.A.* On the existence of invariant measures of piecewise monotonic transformations // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 186. P. 481–488.
2. *Adler R.L.* $F$-expansions revisited // Lect. Notes Math. 1973. V. 318. P. 1–5.
3. *Ахалая Ш.И., Степин А.М.* Об инвариантных мерах несжимающих отображений // Сообщ. АН ГССР. 1980. Т. 100, №3. С. 549–552.
4. *Bowen R.* Invariant measures for Markov maps of interval // Commun. Math. Phys. 1979. V. 69. P. 1–17.
5. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.
6. *Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
7. *Renyi A.* Representations for real numbers and their ergodic properties // Acta math. Acad. sci. Hung. 1957. V. 8. P. 477–493.
8. *Thaler M.* Estimates of the invariant densities of endomorphisms with indifferent fixed points // Israel J. Math. 1980. V. 37. P. 303–314.
9. *Thaler M.* Transformations on $[0,1]$ with infinite invariant measures // Israel J. Math. 1983. V. 46. P. 67–96.