*ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1994, том 335, № 4, с. 409 - 412*

## МАТЕМАТИКА

*УДК 517.927*

# ОБ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ РАЗРЫВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

**© 1994 г. А. В. Боровских, К. П. Лазарев, Ю. В. Покорный**

**Представлено академиком В.А. Ильиным 07.05.93 г.**

Поступило 02.06.93 г.

Для классической задачи Штурма–Лиувилля гарантирована вещественность, положительность и простота всех точек спектра, причем у соответствующих собственных функций нули перемежаются, а в совокупности эти функции образуют цепь Маркова (интерполирующий ряд). Переносу этих свойств на двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений посвящена значительная литература (см., например [1 - 6]). В основе этого цикла работ лежит один результат Келлога [2] о спектре интегрального оператора с непрерывным ядром. Для нужд многоточечных и некоторых нестандартных задач с непрерывными функциями Грина этому результату Келлога (с учетом уточнения [4]) был придан следующий вид [7]: для того чтобы краевая задача с непрерывной функцией Грина $G(t, s)$ имела осцилляционный (штурмовский) спектр, достаточно, чтобы для каждого $m = 1, 2, \ldots$ и любых $a < s_1 < \ldots$ $\ldots < s_m < b$ функция вида

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i G(t, s_i) \tag{1}$$

имела в $[a, b]$ перемен знака не более, чем упорядоченный набор чисел $c_1, \ldots, c_m$, причем $c_1 x(s_1) > 0$, если $c_1 \neq 0$, и $c_i x(s_i) = 0$, $i = 2, \ldots, m$. Описанное достаточное условие было названо в [7] свойством δ-регулярности. Это свойство оказалось наиболее удобным для проверки: функцию (1) естественно интерпретировать как обобщенное решение уравнения

$$Lx = \sum_{i=1}^{m} c_i \delta(t - s_i), \tag{2}$$

склеиваемое из решений однородного уравнения, поэтому подсчет нулей у решения уравнения (2) по существу мало отличается от аналогичной процедуры для решений однородного уравнения.

Такой подход оказался эффективным и при изучении разрывных краевых задач. Простейший пример – задача

$$\begin{gathered} -(px')' = \lambda q x, \quad t \neq \xi_i, \quad 0 < \xi_1 < \ldots < \xi_k < l, \\ x(0) = x(l) = 0, \\ (px')(\xi_i + 0) = (px')(\xi_i - 0) = \\ = \gamma_i (x(\xi_i + 0) - x(\xi_i - 0)), \quad \gamma_i > 0, \end{gathered} \tag{3}$$

возникающая при анализе колебаний натянутой цепочки из $k + 1$ упруго скрепленных в точках $\xi_i$ струн. δ-Регулярность здесь установить удалось, правда, в "ослабленном" варианте: когда $s_i$ в (1) не совпадает с точками разрыва $\xi_j$. Соблазн проигнорировать разрывы в точках $\xi_j$ был, однако, остановлен другим примером, также физического происхождения. Задача

$$\begin{gathered} -x'' = \lambda x, \\ x(0) = x(1) = 0, \\ x'(1/2 + 0) = x'(1/2 - 0) = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

внешне похожая на (3) (почти частный случай: $k = 1$, $\gamma_1 = 0$), имеет двукратный спектр, хотя также является δ-регулярной при $s_i \neq 1/2$. Попытка переноса осцилляционных теорем на случай разрывных функций Грина потребовала ревизии всей концепции, начиная с исходных результатов Келлога. Итогом этой ревизии стал цикл теорем, основные из которых излагаются ниже.

1. Пусть $a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_{r+1} = b$, $\Omega_i = (\xi_i, \xi_{i+1})$, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{r} \Omega_i$. Пространство кусочно-непрерывных на $[a, b]$ функций, имеющих разрывы лишь в точках $\xi_k$ и только первого рода, мы будем отождествлять с пространством $C[\Omega]$ непрерывных на компакте функций, понимая под $[\Omega]$ формальное объединение компактов $[\Omega_i] = [\xi_i + 0, \xi_{i+1} - 0]$, в котором точки $\xi_i \pm 0$ различаются и под $x(\xi_i \pm 0)$, естественно, понимается соответствующий предел. Аналогично через $C^n[\Omega]$ обозначается

*Научно-исследовательский институт математики Воронежского государственного университета*

пространство функций, $n$ раз непрерывно дифференцируемых на каждом $[\Omega_i]$.

Для оператора

$$(Lx)(t) \equiv p_0(t)x^{(n)} + \ldots + p_n(t)x \tag{5}$$

с $p_i(\cdot) \in C[\Omega]$, $p_0(t) > 0$ на $[\Omega]$ рассматривается краевая

$$\begin{gathered} Lx = f, \quad f \in C[\Omega], \\ l_i x = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

и соответствующая спектральная задача

$$\begin{gathered} Lx = \lambda q x, \quad q \in C[\Omega], \quad q(t) > 0, \\ l_i x = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь $l_i(x)$ – функционалы, определяющие склейку решения в точках $\xi_k$,

$$l(x) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j x^{(j-1)}(\xi + 0) + \beta_j x^{(j-1)}(\xi - 0)) \tag{8}$$

($\alpha_j$, $\beta_j$ и $\xi \in \{\xi_k\}$ для каждого функционала свои), а также краевые условия на концах отрезка – они тоже могут быть записаны в форме (8), если считать $\alpha_j = 0$ для $\xi = b$ и $\beta_j = 0$ для $\xi = a$.

Разрешимость задачи (6), представление решения через функцию Грина $G(t, s)$, ее непрерывность вместе с соответствующими производными на $[\Omega] \times [\Omega]$ получаются по классической схеме. Отсюда, в частности, следует эквивалентность задачи (7) интегральному уравнению

$$x(t) = \lambda \int_a^b G(t, s) q(s) x(s) ds. \tag{9}$$

2. Для формулировки основного результата – спектральной теоремы – нам понадобится уточнить некоторые понятия.

Для функции $x(t) \in C[\Omega]$ под нулями будем подразумевать либо точки $s \in \Omega \cup \{a, b\}$, в которых $x(s) = 0$, либо точки $s = \xi_k$, если в них $x(s + 0) \cdot x(s - 0) \le 0$ (т.е. числа $x(s + 0)$ и $x(s - 0)$ имеют разные знаки либо одно из них нуль). Множество нулевых точек функции $x(\cdot) \in C[\Omega]$ является, очевидно, замкнутым и распадается на компоненты связности, называемые нулевыми местами. Изолированное нулевое место называется *пучностью*, если при переходе через него функция сохраняет знак, и *узлом*, если при переходе через него функция меняет знак. Поскольку мы будем иметь дело лишь с решениями однородных уравнений, для которых нулевые места изолированы, на обобщенных понятиях узла и пучности мы останавливаться не будем.

Пусть $x(\cdot)$, $y(\cdot) \in C[\Omega]$. Будем говорить, что *нуль* $\xi$ *функции* $x(\cdot)$ *лежит левее нуля* $\eta$ *функции* $y(\cdot)$, если либо $\xi < \eta$, либо обе точки $\xi$, $\eta$ совпадают при некотором $j$ с точкой $\xi_j$, причем в этом случае

$$\frac{\begin{vmatrix} x(\xi_j - 0) & x(\xi_j + 0) \\ y(\xi_j - 0) & y(\xi_j + 0) \end{vmatrix}}{\Delta x(\xi_j) \cdot \Delta y(\xi_j)} > 0, \tag{10}$$

где $\Delta x(\xi_j)$, $\Delta y(\xi_j)$ – скачки функций. Графически неравенство (10) означает, что если точку $\xi_j$ "растянуть" в отрезок $[\alpha, \beta]$ и доопределить функции $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ линейной интерполяцией по значениям $x(\xi_j - 0)$, $x(\xi_j + 0)$, $y(\xi_j - 0)$, $y(\xi_j + 0)$, то нуль функции $x(\cdot)$ на $[\alpha, \beta]$ будет лежать левее нуля функции $y(\cdot)$.

Две точки $t, s \in [\Omega]$ назовем *квазиравными* ($t \simeq s$), если либо они совпадают в обычном смысле, либо одна из них совпадает с $\xi_i - 0$, а другая – с $\xi_i + 0$.

Определение 1. Спектр задачи (7) назовем *осцилляционным* в $C[\Omega]$, если:

а) он состоит из последовательности простых вещественных положительных собственных значений $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ ($\lambda_n \to \infty$);

б) отвечающая $\lambda_k$ собственная функция $x_k(\cdot)$ имеет внутри $(a, b)$ точно $k$ нулей, все они являются узлами;

в) нули функций $x_k(\cdot)$ и $x_{k+1}(\cdot)$ на $(a, b)$ перемежаются, т.е. для любых двух последовательных нулей $\xi < \eta$ функции $x_{k+1}(\cdot)$ между ними (т.е. правее $\xi$ и левее $\eta$) лежит точно один нуль функции $x_k(\cdot)$;

г) всякая линейная комбинация $\sum_{i=k}^{m} c_i x_i(t)$, $k \le m$, имеет на $(a, b)$ не менее $k$ узлов и не более $m$ нулей с учетом кратности (нуль-узел засчитывается за один, а нуль-пучность за два);

д) система $\{x_i(\cdot)\}_0^\infty$ на $(a, b)$ образует интерполирующий ряд (ряд Маркова); при каждом $m \ge 0$ определитель $\det\|x_i(t_j)\|_{i,j=0}^m$ сохраняет один и тот же строгий знак для всех упорядоченных наборов $a < t_0 < t_1 < \ldots < t_m < b$ из $[\Omega]$.

Через $\delta(\Omega)$ ($\delta[\Omega]$) будем обозначать множество линейных комбинаций $\delta$-функций

$$\begin{gathered} f(t) = \sum_{i=0}^{m} c_i \delta(t - s_i), \\ a < s_0 < s_1 < \ldots < s_m < b, \quad m \ge 0, \end{gathered} \tag{11}$$

с $s_i$ соответственно из $\Omega$ или $[\Omega]$. Под числом перемен знака $S(f)$ понимается число перемен знака в упорядоченном наборе коэффициентов $\{c_0, c_1, \ldots, c_m\}$ с выброшенными нулями. Для кусочно-непрерывных функций $x(\cdot) \in C[\Omega]$ число перемен знака определяется обычным образом.

Определение 2. Задача (6) называется $\delta$-регулярной на $[\Omega]$ $(\Omega)$, если для любой нетривиальной $f \in \delta[\Omega]$ $(\delta(\Omega))$ для обобщенного решения $x(\cdot)$ задачи (6) справедливо неравенство $S(x) \le S(f)$, причем из условия $c_0 \neq 0$, $c_i x(t_i) = 0$ для $t_i \simeq s_i$ при $i = 1, \ldots, m$ следует $c_0 x(t_0) > 0$ для $t_0 \simeq s_0$.

Замечание. Везде далее обобщенное решение задачи (6) с $f \in \delta[\Omega]$ можно понимать как функцию (1); другое определение, использующее свойства функции Грина как аксиомы, будет дано в п. 5.

Теорема 1. *Если задача* (6) *$\delta$-регулярная на* $[\Omega]$, *то задача* (7) *имеет в* $C[\Omega]$ *осцилляционный спектр*.

3. Схема доказательства. Пусть $G(t, s)$ – ядро оператора (9) (функция Грина задачи (6)). Как было отмечено, она непрерывна в $[\Omega] \times [\Omega]$. Введем в рассмотрение так называемые ассоциированные ядра

$$G\begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \ldots & t_m \\ s_0 & s_1 & \ldots & s_m \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \det\| G(t_i, s_j)\|_{i, j = 0}^{m}. \qquad (12)$$

Рассмотрение функции

$$u(t) = G\begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \ldots & t_m \\ s_0 & s_1 & \ldots & s_m \end{pmatrix} \qquad (13)$$

показывает, что она является функцией вида (1). При этом свойство $\delta$-регулярности оказывается эквивалентным следующим условиям:

$$G\begin{pmatrix} t_0 & \ldots & t_m \\ s_0 & \ldots & s_m \end{pmatrix} \ge 0 \quad \left(a \le \begin{matrix} t_0 \le \ldots \le t_m \\ s_0 \le \ldots \le s_m \end{matrix} \le b\right) \qquad (14)$$

для $t_i, s_i \in [\Omega]$, причем на квазидиагонали $t_i \simeq s_i$, $i = 0, \ldots, m$, выполнено строгое неравенство. Эти условия являются непосредственным обобщением условий Келлога и означают, по существу, некую "усиленную" положительность оператора с ядром (12), который мы обозначим $K_q^{(m)}$ (индекс $q$ означает, что в интеграле, кроме ядра, присутствует еще вес

$$Q(t_0, \ldots, t_m) = \prod_{i=0}^{m} q(t_i)).$$

Положительные свойства оператора $K_q^{(m)}$ гарантируют существование и некое "преобладание" ведущего собственного значения $\Lambda_m$ и положительность соответствующей собственной функции $z_m(t_0, \ldots, t_m)$. Этот момент, являющийся обобщением известной теоремы Енча, ввиду его особой важности мы более подробно обсудим ниже, в п. 4. Далее, используя связь между собственными функциями $x_m(t)$, собственными значениями $\lambda_m$ исходного оператора (9) и соответственно числами $\Lambda_m$ и функциями $z_m(t_0, \ldots, t_m)$ ($\Lambda_m = \lambda_0 \cdot \ldots \cdot \lambda_m$, $z_m(t_0, \ldots, t_m) = \det\| x_i(t_j)\|_{i, j = 0}^{m}$), получаются требуемые спектральные свойства исходного оператора (9) и соответственно задачи (7).

4. Обобщение теоремы Енча [9]. Ввиду принципиальности этого результата мы его приводим в наиболее общей формулировке.

Определение 3. Множество $W \subset \mathbb{R}^k$ назовем локально телесным, если оно образовано добавлением к внутренности $\operatorname{int} W$ некоторого (возможно, пустого) подмножества граничных точек из $\partial W$.

Для неограниченного множества $W$ к его границе будем причислять бесконечно удаленную точку.

Определение 4. Скажем, что суммируемая неотрицательная почти всюду (п. в.) функция $\psi$: $W \to R$ вполне положительна на подмножестве $V \subset W$, если для любого открытого множества $A$, имеющего с $V$ общую точку, выполнено неравенство

$$\int_{A \cap V} \psi(S) dS > 0.$$

Отметим, что свойство полной положительности занимает промежуточное место между неотрицательностью и положительностью п. в. Легко построить пример вполне положительной функции на отрезке $[0, 1]$, равной нулю на множестве меры, сколь угодно близкой к единице.

Пусть $\bar{C}(W)$ – пространство вещественнозначных непрерывных ограниченных функций, заданных на локально телесном множестве $W \subset \mathbb{R}^k$. Рассмотрим на $\bar{C}(W)$ интегральный оператор

$$(K_Q z)(T) = \int_W \mathcal{K}(T, S) Q(S) z(S) dS, \qquad (15)$$

где $T, S \in W$, $Q(\cdot) \in \bar{C}(W)$ и ядро $\mathcal{K}(T, S)$ неотрицательно и суммируемо по $S$ на $W$ при каждом фиксированном $T \in W$.

Определение 5. Оператор $K$ и его ядро $\mathcal{K}(T, S)$ назовем вполне положительными, если существует содержащее диагональ $T = S$ открытое множество $D \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ такое, что для каждого фиксированного $T \in W$ функция-срезка $\psi_T(S) = \mathcal{K}(T, S)$ неотрицательна п. в. на $W$ и вполне положительна на сечении $D_T = \{S \in W: (T, S) \in D\}$.

По существу свойство полной положительности оператора есть положительность его ядра "вблизи диагонали". Как мы видели, $\delta$-регулярность и кусочная непрерывность функции Грина обеспечивают полную положительность операторов $K_q^{(m)}$.

Теорема 2. *Пусть*:

1°) *Множество* $W \subset \mathbb{R}^k$ *локально телесно, а* $W \cup \partial W$ *связно*, 2°) *"ненагруженный" оператор* $K$ *(с* $Q(\cdot) \equiv 1$*) непрерывен, а* $K_Q$ *вполне непрерывен в* $\overline{C}(W)$,

3°) *функция* $Q(\cdot)$ *непрерывна, положительна, ограничена на* $W$ *и равна нулю на* $\partial W$,

4°) *оператор* $K$ *вполне положителен.*

*Тогда оператор* $K_Q$ *имеет положительное собственное простое значение, строго большее модулей других собственных значений, ему отвечает строго положительная на* $W$ *функция и строго положительный функционал, являющийся собственным для сопряженного оператора* $K_Q^*$.

5. Проверку свойства $\delta$-регулярности можно легко проводить, если вспомнить, что функция Грина $G(t, s)$ (т.е. решение уравнения $Lx = \delta(t - s)$, по существу, "склеена" из решений однородного уравнения. Более точно, для $s \neq \xi_j$ нетрудно получить следующие свойства, однозначно определяющие $G(t, s)$.

*При каждом фиксированном* $s \in \Omega$ *функция* $G(t, s) = g_s(t)$:

1) *является решением однородного уравнения* $Lx \equiv 0$ *при* $t < s$ *и при* $t > s$;

2) *удовлетворяет краевым условиям* $l_k x = 0$;

3) *удовлетворяет условиям склейки при* $t = s$

$$g_s^{(i)}(s+0) - g_s^{(i)}(s-0) = \begin{cases} 0, & i \leq n-2, \\ 1/p_0(s), & i = n-1. \end{cases} \tag{16}$$

Необходимость рассматривать и "предельные" срезки $G(t, \xi_\nu \pm 0)$ вынуждает нас сформулировать аналогичные свойства решений уравнений $Lx = \delta(t - s)$ с $s = \xi_\nu \pm 0$. Они оказываются следующими.

*Функция* $g_s(t)$ *при* $s = \xi_\nu \pm 0$:

а) *является решением однородного уравнения на всем* $[\Omega]$;

б) *удовлетворяет тем краевым условиям* (8) *(однородным), которые заданы в точках* $\xi_i \neq \xi_\nu$;

в) *для тех краевых условий, которые заданы в точке* $\xi_\nu$, *удовлетворяет соответствующим неоднородным условиям*

$$l(x) \equiv \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j x^{(j-1)}(\xi_\nu + 0) + \beta_j x^{(j-1)}(\xi_\nu - 0)) = $$
$$= \begin{cases} \alpha_n / p_0(\xi_\nu + 0), & s = \xi_\nu + 0, \\ -\beta_n / p_0(\xi_\nu - 0), & s = \xi_\nu - 0. \end{cases} \tag{17}$$

Фактически (17) получаются синтезированием условий $l(x) = 0$ склейки в точке $\xi_\nu$ с условиями (16).

Заметим, что осцилляционность спектра многоточечной задачи (3) установлена И.Ю. Шуруповой [10] на основе результата [8] с помощью проверки обобщенной келлоговости ее функции Грина. Свойства типа (17) для уравнения четвертого порядка получены Р. Мустафакуловым.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Kellogg O.D.* // Amer. J. Math. 1916. № 38. P. 1 - 5.
2. *Kellogg O.D.* // Ibid. 1918. № 40. P. 145 - 154.
3. *Крейн М.Г.* // ДАН. 1939. Т. 25. № 9. С. 717 - 720.
4. *Гантмахер Ф.Р.* // ДАН. 1936. Т. 1. № 1. С. 3 - 5.
5. *Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 360 с.
6. *Левин А.Ю., Степанов Г.Д.* // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17. № 3. С. 606 - 625; № 4. С. 813 - 830.
7. *Покорный Ю.В., Лазарев К.П.* // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 4. С. 658 - 670.
8. *Покорный Ю.В., Боровских А.В.* // Мат. заметки. 1993. Т. 53. № 1. С. 151 - 153.
9. *Jentzsch R.* // Z. Reine und Angew. Math. 1912. B. 141. S. 235 - 244.
10. *Шурупова И.Ю.* В сб.: Тез. докл. школы "Современные методы в теории краевых задач". Воронеж, 1992. С. 121.