

К. Ю. Лавров

## ПОДГРУППЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ГРУПП ЧЕТНОГО ПОРЯДКА НАД ЛОКАЛЬНЫМ ПОЛЕМ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $R$  – кольцо дискретного нормирования  $v$ ,  $R^*$  – его мультипликативная группа,  $K$  – поле частных и  $\mathfrak{p}$  – единственный максимальный идеал  $R$ . В настоящей работе рассматривается описание подгрупп ортогональной группы  $G = \mathrm{SO}(n, K)$  четной степени  $n = 2l$  над  $K$ , содержащих максимальный расщепимый тор  $T = T(2l, R)$ .

В работе [1] получено описание подгрупп в полной линейной группе  $G_K = \mathrm{GL}(n, K)$  степени  $n$  над полем  $K$ ,  $|K| \geq 7$ , содержащих группу  $D_K = D(n, K)$  диагональных матриц. Позднее это описание было распространено на случай произвольного (не обязательно даже коммутативного) полулокального кольца [3, 6]. Аналогичный вопрос для специальной линейной группы оказался значительно более трудным и был решен для случая поля в работе [8], для случая кольца дискретного нормирования в работе [15] и, наконец, для случая полулокального кольца в работе [9]. Кроме того, в работе [10] был получен результат для ортогональных групп, схожий с результатом настоящей работы – описание подгрупп в  $\mathrm{SO}(n, R)$  и  $\mathrm{GO}(n, R)$ , содержащих максимальный расщепимый тор  $T = T(n, R)$  в случае, когда  $R$  – полулокальное кольцо или поле. Данная работа продолжает работы [10, 13] и как в техническом, так и в идейном отношении тесно связана с работами [1, 3, 8, 9, 12, 13, 15].

Заметим, что результат настоящей работы переносит на ортогональные группы также несколько известных циклов работ, в частности, полученное Н. Ивахори, Х. Мацумото, Ф. Брюа и Ж. Титсом описание парахорических подгрупп. Более подробный обзор результатов по расположению подгрупп в линейных (классических) группах можно найти например в работе Н. А. Вавилова [11], где также имеются подробные ссылки на предыдущие обзоры А. Е. Залесского, О. Х. Кинга, А. С. Кондратьева

и Ли Шанг Чжи.

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для матрицы  $a \in G$  через  $a_{ij}$  обозначается ее элемент на месте  $(i, j)$ . Таким образом  $a = (a_{ij})$ . Через  $a^{-1} = (a'_{ij})$  обозначается обратная к  $a$  матрица и ее элементы. Нам будет удобно занумеровать строки и столбцы матриц из  $G$  следующим образом:  $1, \dots, l, -l, \dots, -1$ . В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что  $2 \in R^*$ . Это, как и во всех предыдущих работах, не является необходимым, так как результаты, аналогичные результатам настоящей работы, могут быть получены без указанного предположения, но в таком случае доказательства стали бы значительно сложнее.

Пусть  $f = (f_{ij})$  – матрица порядка  $n = 2l$ , определенная равенствами  $f_{ij} = \delta_{i,-j}$ . То есть на побочной диагонали стоят единицы, а на всех остальных местах – нули. Ортогональная группа четного порядка  $SO(2l, K)$  – это группа всех матриц из  $SL(2l, K)$ , сохраняющих квадратичную форму  $x_1x_{-1} + \dots + x_lx_{-l}$ . Иными словами,  $SO(2l, K)$  состоит из тех  $a \in SL(2l, K)$ , для которых  $afa^t = f$  (здесь  $a^t$  – транспонированная матрица).

Как обычно,  $e$  – единичная матрица,  $e_{ij}$  – стандартная матричная единица, то есть матрица, у которой на месте  $(i, j)$  стоит единица, а на всех остальных местах – нули. Для  $\varepsilon \in R^*$  и  $i \neq j$  положим  $d_{ij}(\varepsilon) = e + (\varepsilon - 1)e_{ii} + (\varepsilon^{-1} - 1)e_{jj}$ . Тогда группа  $T = T(n, R)$  порождается матрицами  $D_i(\varepsilon) = d_{i,-i}(\varepsilon)$  для  $1 \leq i \leq l$ ,  $\varepsilon \in R^*$ .

Как и в предыдущих работах [10, 13], для формулировки основного результата мы будем пользоваться понятием сети идеалов кольца, впервые введенного З. И. Боровичем в [1]. Считаю нужным напомнить определение.

**Определение 1.** Таблица  $\sigma = (c_{ij})$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , составленная из идеалов  $\sigma_{ij}$  кольца  $R$ , называется сетью идеалов в  $R$  порядка  $n$ , если  $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$  для всех  $i, j, r$ . Сеть идеалов называется  $D$ -сетью, если, кроме этого,  $\sigma_{ii} = R$  при всех  $i$ .

В случае локального кольца и его поля частных вместо идеалов рассматривают  $R$ -подмодули поля  $K$ , отличные от нуля и  $K$ , имеющие вид  $\mathfrak{p}^m$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ , они называются дробными идеалами. Как и в работах [12, 13, 14], нам будет удобно отступить

от традиционного словоупотребления и называть дробными идеалами также нуль и  $K$ . При этом мы считаем, что  $0 = \mathfrak{p}^\infty$ , а  $K = \mathfrak{p}^{-\infty}$ , и, если положить дополнительно  $-\infty + \infty = \infty$ , то для всех  $-\infty \leq l, m \leq \infty$  справедливо равенство  $\mathfrak{p}^l \mathfrak{p}^m = \mathfrak{p}^{l+m}$ . Кроме этого для изучаемой задачи, как и в [13], необходимо использовать не  $D$ -сети, а их обобщение –  $V$ -сети, впервые введенные в [14].

**Определение 2.** Таблица  $\sigma = (\sigma_{ij}) = (\mathfrak{p}^{m_{ij}})$ , где  $1 \leq i, j \leq n$ , называется сетью дробных идеалов в  $K$  порядка  $n$ , если для всех  $1 \leq i, j, r \leq n$  выполнено условие  $\sigma_{ir} \sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$  или, иными словами,  $m_{ir} + m_{rj} \geq m_{ij}$ . Сеть  $\sigma = (\sigma_{ij})$  дробных идеалов в  $K$  порядка  $n$  называется  $V$ -сетью, если для всех  $i$  диагональный идеал  $\sigma_{ii}$  равен либо  $R$ , либо  $K$ , причем  $\sigma_{ii} = K$  в том и только в том случае, когда найдется такой индекс  $j \neq i$ , что  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = K$ .

Сеть называется симплектической, если  $\sigma_{ij} = \sigma_{-j, -i}$ , для всех  $i, j$ , и ортогональной если, кроме того,  $\sigma_{i, -i} = \sum \sigma_{ij} \sigma_{j, -i}$ ,  $1 \leq j \leq l$ ,  $j \neq \pm i$ , для всех  $i$ . Следующие определения аналогичны определениям из работ [1, 3, 13].

**Определение 3.** Для произвольной сети  $\sigma$  дробных идеалов в  $K$  порядка  $n$  через  $M(\sigma)$  обозначим совокупность матриц  $a = (a_{ij})$  из кольца  $M(n, K)$  всех матриц порядка  $n$  над  $K$ , для которых  $a_{ij} \in \sigma_{ij}$  при всех  $i, j$ .

Из определения сети следует, что  $M(\sigma)$  есть подкольцо кольца  $M(n, K)$ . Ясно, что для произвольной сети  $\sigma$  совокупность  $e + M(\sigma)$ , состоящая из матриц  $e + a$ , где  $a \in M(\sigma)$ , является мультипликативной системой.

**Определение 4.** Максимальная подгруппа в полной линейной группе  $\text{GL}(n, K)$ , содержащаяся в мультипликативной системе  $e + M(\sigma)$ , называется сетевой подгруппой, соответствующей сети  $\sigma$ , и обозначается через  $G(\sigma)$ .

Ортогональная сеть  $\sigma$  задает ортогональную сетевую подгруппу  $\Gamma(\sigma) = G(\sigma) \cap G$  в группе  $G = \text{SO}(n, K)$ . Через  $N_\Gamma(\sigma)$ , и  $N_{\overline{\Gamma}}(\sigma)$  обозначим соответственно нормализаторы  $\Gamma(\sigma)$  в  $G$  и  $\overline{G} = \text{GO}(n, K)$ .

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $R$  – кольцо дискретного нормирования  $v$ ,  $R^*$  – его мультипликативная группа,  $K$  – поле частных и  $\mathfrak{p}$  – единственный максимальный идеал  $R$ . Предположим, что поле вычетов  $F = R/\mathfrak{p}$  содержит не менее 9 элементов. Тогда для любой подгруппы  $H$  группы  $SO(2l, K)$ , содержащей максимальный расщепимый тор  $T = T(2l, R)$ , существует единственная ортогональная  $V$ -сеть  $\sigma = (\sigma_{ij})$  дробных идеалов в  $K$  порядка  $n = 2l$  такая, что

$$\Gamma(\sigma) \leq H \leq N_{\Gamma}(\sigma).$$

Как и в работе [10], из этой теоремы сразу же следует описание подгрупп в  $\overline{G}$ , содержащих  $T$ .

**Следствие.** В условиях теоремы для любой подгруппы в  $\overline{G} = GO(2l, K)$ , содержащей  $\overline{T} = \overline{T}(2l, R)$ , существует единственная ортогональная  $V$ -сеть дробных идеалов в  $K$  такая, что  $\Gamma(\sigma) \leq H \leq N_{\overline{\Gamma}}(\sigma)$ .

### 3. НОРМАЛИЗАТОР СЕТЕВОЙ ПОДГРУППЫ

Матрицы из  $G$ , входящие в сетевую подгруппу  $\Gamma(\sigma)$ , характеризуются довольно простыми конгруэнц-условиями. Важно иметь аналогичную характеристику для матриц из нормализатора  $N_{\Gamma}(\sigma)$ . В этом параграфе мы приводим результаты, дающие такую характеристику. Все они совершенно аналогичны соответствующим леммам из работы [10], поэтому мы приводим их без доказательств.

Первая лемма, как и в [10], – частный случай предложения 1 из [5]. Она гарантирует существование сети идеалов, ассоциированной с подгруппой.

**Лемма 3.1.** Пусть  $2 \in R^*$ ,  $R$  – локальное кольцо, которое порождается как кольцо группой  $R^*$  своих обратимых элементов,  $K$  – поле частных кольца  $R$ . Тогда для любой подгруппы  $H$  в  $G$ , нормализуемой группой  $T$ , существует единственная наибольшая ортогональная  $V$ -сеть  $\sigma$  дробных идеалов в  $K$  такая, что  $E_{\Gamma}(\sigma) \leq H$ .

В формулировке леммы через  $E_{\Gamma}(\sigma)$  обозначена содержащаяся в  $\Gamma(\sigma)$  элементарная сетевая подгруппа, соответствующая сети  $\sigma$ , то есть подгруппа, порожденная всеми содержащимися в  $\Gamma(\sigma)$  элементарными ортогональными трансвекциями – матрицами вида  $T_{ij}(\alpha)$ ,  $\alpha \in \sigma_{ij}$ ,  $i \neq j$ . Напомним, что такие матрицы при

четном  $n$  имеют вид

$$T_{ij}(\alpha) = T_{-j,-i}(-\alpha) = e + \alpha e_{ij} - \alpha e_{-j,-i}, \text{ где } \alpha \in K, i \neq \pm j.$$

Сеть  $\sigma$  из леммы 3.1 такая, что  $E_{\Gamma}(\sigma) \leq H$ , и называется *сетью, ассоциированной с подгруппой  $H$* . Если дополнительно  $T \leq H$ , то  $\Gamma(\sigma) \leq H$ , и будем называть  $\Gamma(\sigma)$  *сетевой подгруппой, ассоциированной с  $H$* .

Таким образом, нам надо доказать включение  $H \leq N_{\Gamma}(\sigma)$ . Следующая лемма дает нам удобную характеристику матриц из  $N_{\Gamma}(\sigma)$ , доказательство аналогичных лемм есть в [4, 10]. Здесь и далее  $R, R^*, K$  такие же, как и выше.

**Лемма 3.2.** Пусть  $2 \in R^*$  и найдется такой  $\theta \in R^*$ , что  $\theta^2 - 1 \in R^*$ ,  $\sigma = (\sigma_{ij})$  и  $\tau = (\tau_{ij})$  — две ортогональные сети дробных идеалов в  $K$ . Для того, чтобы для матрицы  $a = (a_{ij}) \in G$  имела место формула  $a\Gamma(\sigma)a^{-1} = \Gamma(\tau)$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого набора индексов  $i, j, r, s$  выполнялось включение

$$a_{ir}\sigma_{rs}a'_{sj} \subseteq \tau_{ij}.$$

Эти условия для всех наборов индексов  $i, j, r, s$  эквивалентны тем же условиям для тех наборов, в которых  $r \neq -s$ .

Согласно этой лемме, для того, чтобы убедиться, что некоторая матрица  $a = (a_{ij}) \in G$  принадлежит  $N_{\Gamma}(\sigma)$ , нужно проверить справедливость включений  $a_{ir}\sigma_{rs}a'_{sj} \in \sigma_{ij}$ , для всех индексов  $i, j, r, s$ , при  $r \neq -s, i \neq j$ . Однако, оказывается, что уже в случае полулокального кольца для доказательства того, что некоторая подгруппа  $H \geq T$  содержится в  $N_{\Gamma}(\sigma)$ , достаточно проверить лишь, что  $a_{ir}a'_{rj} \in \sigma_{ij}$  для всех матриц  $a \in H$ . В общем случае это было доказано в теореме 4 работы [3], доказательство факта, совершенно аналогичного нашему, можно найти в [10].

**Лемма 3.3.** Пусть  $R$  — локальное кольцо,  $2 \in R^*$  и поле вычетов  $R$  содержит более трех элементов. Тогда для того, чтобы подгруппа  $H, T \leq H \leq G$ , содержалась в  $N_{\Gamma}(\sigma)$  для некоторой ортогональной  $V$ -сети  $\sigma$  дробных идеалов в  $K$ , необходимо и достаточно, чтобы для всех  $a = (a_{ij}) \in H$  имело место включение  $a_{ir}a'_{rj} \in \sigma_{ij}$  при всех  $i, j, r, i \neq \pm j$ .

## 4. ИЗВЛЕЧЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ТРАНСВЕКЦИЙ

Все результаты этого параграфа имеют такой характер. Пусть  $H$  – подгруппа в  $G$ , содержащая  $T$ . Тогда, если  $H$  содержит матрицу  $a$ , подчиненную некоторым дополнительным условиям (например, наличие нулей на фиксированных местах), то  $H$  содержит некоторую ортогональную трансвекцию  $T_{ij}(\alpha)$ , где  $\alpha$  сконструирован из элементов матрицы  $a$  (например,  $\alpha = a_{ij}$ , или  $\alpha = a_{ir}a'_{rj}$ ). Цель этой деятельности состоит в том, чтобы доказать, что в  $H$  содержится достаточное количество элементарных ортогональных трансвекций. Фиксируем следующие обозначения:  $H$  – всегда подгруппа в  $G$ , содержащая  $T$ , а  $\sigma$  – ассоциированная с  $H$  сеть. Напомним, что  $T_{ij}(\alpha) \in H$  эквивалентно тому, что  $\alpha \in \sigma_{ij}$ .

Следующая лемма стандартна, ее аналоги, в том числе и более общие, можно найти, например, в работах [5, 10, 13, 14]. Мы формулируем эту лемму конкретно, так, как это необходимо для решения задачи, рассматриваемой в данной работе.

**Лемма 4.1.** Пусть  $R$  – кольцо дискретного нормирования,  $K$  – его поле частных,  $2 \in R^*$  и  $R$  порождается как кольцо группой  $R^*$ . Если верхняя унитарная матрица  $a = (a_{ij})$  принадлежит  $H$ , то для всех  $i < j$  имеем  $a_{ij} \in \sigma_{ij}$ .

Условие леммы 4.1 верно как и для более общих случаев колец, например, полулокальных, см. [2], так и для полей, кроме того, она легко вытекает из результатов работы [7]. Разумеется, эта лемма применима и ко всем матрицам, сопряженным с верхними унитарными при помощи соответствующих матриц перестановок.

При доказательстве следующих лемм мы будем использовать то, что для ортогональной матрицы  $a = (a_{ij})$  четного порядка и обратной к ней  $a^{-1} = (a'_{ij})$  верны соотношения ортогональности:  $a'_{ij} = a_{-j, -i}$ .

**Лемма 4.2.** Пусть в условиях леммы 4.1 для некоторой матрицы  $a = (a_{ij}) \in H$  при фиксированном  $r$  для всех  $i \neq r$  справедливы равенства  $a_{ri} = 0$ . Тогда  $a_{ir}a'_{rr} \in \sigma_{ir}$  для всех  $i \neq r$ .

**Доказательство.** Очевидно, что для элементов обратной матрицы  $a^{-1}$  также имеем  $a'_{ri} = 0$  для всех  $i \neq r$ . Из условий ортогональности матрицы  $a$  следует, что  $a_{i, -r} = 0$  для всех  $i \neq r$ . По-

ложим  $b = aD_r(\varepsilon)a^{-1}$ , где  $\varepsilon \in R^*$ , такой, что  $\varepsilon - 1 \in R^*$ . Тогда  $b_{ij} = a_{ir}(\varepsilon - 1)a'_{rj} + a_{i,-r}(\varepsilon^{-1} - 1)a'_{-rj} = 0$  при  $i \neq r$ . Таким образом, ненулевые элементы в матрице  $b$  имеются только в  $r$ -м столбце, и, следовательно, ее можно представить как произведение ортогональных трансвекций  $b = \prod T_{ir}((\varepsilon - 1)a_{ir}a'_{rj})$ , где произведение берется по всем  $i \neq \pm r$ . Теперь мы можем применить к  $b$  лемму 4.1, воспользовавшись обратимостью  $\varepsilon - 1$ , получить требуемые включения.  $\square$

Следующая лемма является аналогом леммы 8 из работы [10], но при ее доказательстве, как и в работе [12], мы будем существенно использовать то, что  $R$  является кольцом дискретного нормирования.

Напомним свойства дискретных нормирований, которыми будем пользоваться при доказательстве. Если  $v$  – дискретное нормирование, то:

$$v(1) = v(-1) = 0, \quad v(-x) = v(x),$$

$$\text{если } v(x) \neq v(y), \text{ то } v(x + y) = \min(v(x), v(y)).$$

Итак, основная лемма об извлечении трансвекций формулируется так.

**Лемма 4.3.** Пусть в условиях леммы 4.1 поле вычетов кольца  $R$  содержит не менее 9 элементов. Если в матрице  $a = (a_{ij}) \in H$  при фиксированных  $r$  и  $q$  выполнено равенство  $a_{q,-r} = a_{-q,r} = 0$ , то для любого  $i$   $a_{ir}a'_{rq} \in \sigma_{iq}$ .

**Доказательство.** Возьмем  $\theta \in R^*$ , такое, что  $1 + \theta \in R^*$ , и рассмотрим матрицу  $b(\theta) = aD_r(1 + \theta)a^{-1}$ . Тогда элемент матрицы  $b$ , стоящий на месте  $(i, j)$ , равен:

$$b(\theta)_{ij} = \delta_{ij} + a_{ir}\theta a'_{rj} + a_{i,-r}\bar{\theta}a'_{-rj},$$

где  $\bar{\theta} = -\theta(\theta + 1)^{-1}$ . Таким образом,  $b(\theta)_{qj} = \delta_{qj} + a_{qr}\theta a'_{rj}$ . В частности,  $b(\theta)_{q,-q} = 0$  для всех  $\theta$ . Это значит, что  $q$ -е строки матриц  $b(\theta)$  и  $b(\eta)$  (где  $\eta$  – другой такой элемент, что  $\eta(\eta + 1) \in R^*$ ) пропорциональны за исключением диагональных элементов. Положим теперь  $c = b(\theta)D_q(\varepsilon)b(\eta)^{-1}$ , где  $\varepsilon = \theta\eta^{-1}(1 + \eta x)(1 + \theta x)^{-1}$ ,  $x = a_{qr}a'_{rq}$  – коэффициент, на который нужно подправить  $q$ -й диагональный элемент матрицы  $b(\theta)$ , чтобы  $q$ -е строки матриц  $b(\theta)$  и  $b(\eta)$  стали полностью пропорциональны. Как и в работе [10],

непосредственные вычисления показывают, что  $c_{qj} = 0$  для всех  $j \neq q$ , а это значит, что к матрице  $c$  можно применить лемму 4.2. Откуда получаем, что  $c_{iq}c'_{qq} \in \sigma_{iq}$  для всех  $i \neq \pm q$ . Дальнейшие, довольно длинные вычисления показывают, что

$$c_{iq} = a_{ir}a'_{rq}\lambda(\theta, \eta) + a_{i,-r}a'_{-r,q}\mu(\theta, \eta),$$

где  $\lambda(\theta, \eta) = (\theta - \eta)(\theta - \bar{\eta})\eta^{-1}(1 + \theta x)^{-1}$ , а  $\mu(\theta, \eta) = (\eta - \theta)(1 + \theta)^{-1}(1 + \theta x)^{-1}(1 + \eta)^{-1}(1 + \eta x)^{-1}\eta^{-1}[\eta(1 + \eta + \eta(1 + \theta)x) + \theta(1 + \eta + \eta(1 + \eta)x)]$ ; см. [10]. Заметим, что в силу ортогональности  $a$  из условия следует, что  $a'_{-r,q} = 0$ , а это значит, что

$$c_{iq} = \frac{a_{ir}a'_{rq}(\theta - \eta)(\theta - \bar{\eta})}{\eta(1 + \theta x)}.$$

Сходные, чуть более простые, вычисления дают выражение для  $c'_{qq}$ :

$$c'_{qq} = \frac{\eta}{\theta} + \frac{(\theta - \eta)x}{1 + \theta}.$$

Если теперь элемент  $x \in R$ , то, учитывая условие на кольцо, можно выбрать обратимые элементы  $\theta$  и  $\eta$  так, чтобы все элементы  $1 + \theta$ ,  $1 + \eta$ ,  $\theta - \eta$ ,  $\theta - \bar{\eta}$ ,  $1 + \theta x$ ,  $1 + \eta x$ ,  $\eta(1 + \theta) + \theta(\theta - \eta)x$  также были обратимы. А это значит, что  $a_{ir}a'_{rq} \in \sigma_{iq}$ .

Если же  $x \notin R$ , то  $v(x) = -m < 0$ . Тогда, как и в случае целого  $x$ , выберем  $\theta$ ,  $\eta$  так, чтобы  $1 + \theta$ ,  $1 + \eta$ ,  $\theta - \eta$ ,  $\theta - \bar{\eta}$  были обратимы. Следовательно,

$$v(c_{iq}c'_{qq}) = v(a_{ir}a'_{rq}\lambda(\theta, \eta)c'_{qq}) = v(a_{ir}a'_{rq}) - v(1 + \theta x) + v(c'_{qq}).$$

Так как  $x \notin R$ , то  $v(1 + \theta x) = v(x) = -m$ , при этом  $v(c'_{qq}) = v(x) = -m$ . А это значит, что  $v(a_{ir}a'_{rq}) = v(c_{iq}c'_{qq})$ . Иными словами,  $a_{ir}a'_{rq} \in \sigma_{iq}$  и для случая не целого  $x$ . Лемма доказана.  $\square$

## 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Теперь можем приступить к доказательству теоремы. Вспомним, что группа  $\bar{T} = \bar{T}(2l, K)$  диагональных матриц, содержащихся в  $\bar{G} = \text{GO}(2l, K)$ , порождается  $T$  и матрицами вида  $h(\varepsilon) = \text{diag}(\varepsilon, \dots, \varepsilon, 1, \dots, 1)$ , где  $\varepsilon$  повторяется  $l$  раз. Тогда матрица  $h(\varepsilon^2)$  лишь на скалярный множитель  $\varepsilon$  отличается от матрицы  $D(\varepsilon) = \prod D_i(\varepsilon)$ , где  $1 \leq i \leq l$ . Кроме того, в доказательстве

нам удобно будет для матрицы  $a \in G$  через  $\Delta_{ij}^{kl}(a)$  обозначать ее минор  $a_{ik}a_{jl} - a_{il}a_{jk}$ .

**Доказательство теоремы.** Пусть  $T \leq H \leq G$  и  $\sigma$  – ассоциированная с  $H$  сеть. По лемме 3.3, достаточно проверить что для любой матрицы  $a \in H$  выполнены включения  $a_{ir}a'_{rj} \in \sigma_{ij}$ ,  $i \neq \pm j$ .

Докажем вначале, что для любой матрицы  $b \in H$  и любых индексов  $i \neq \pm j$  будет  $\sum b_{is}b'_{sj} \in \sigma_{ij}$ ,  $1 \leq s \leq l$ . Возьмем  $\varepsilon \in R^*$  такое, что  $\varepsilon^2 - 1 \in R^*$ , и положим  $c = bD(\varepsilon)b^{-1}$ . Несложное вычисление показывает, что  $c_{j,-j} = c_{-j,j} = 0$  для любого  $j$ . Таким образом, мы можем применить к матрице лемму 4.3 и заключить, что  $c_{ij}c'_{jj} \in \sigma_{ij}$ . Но  $\varepsilon$  можно выбрать так, чтобы элемент  $c'_{jj}$  был обратим, в силу того, что элемент локального кольца обратим, когда обратим его образ в поле вычетов, то есть он не лежит в максимальном идеале. Чтобы образ  $c'_{jj}$  был обратим в поле вычетов, нужно, чтобы образ  $\varepsilon$  не был решением одного квадратного уравнения, что вместе с предыдущими условиями запрещает не более 5 значений, а поле вычетов содержит не менее 9 элементов. Дальнейшие вычисления показывают, что  $c_{ij} = (\varepsilon - \varepsilon^{-1}) \sum b_{is}b'_{sj}$ ,  $1 \leq s \leq l$ .

Докажем теперь, что при всех  $r$  и  $i \neq \pm j$  для любой матрицы  $a \in H$  справедливо включение  $\Delta_{i,-j}^{r,-r}(a) \in \sigma_{ij}$ . Для этого возьмем  $\xi \in R^*$  такой, что  $1 + \xi \in R^*$ , и рассмотрим матрицу  $b = aD_r(1 + \xi)a^{-1}$ . Применив к ней только что доказанное включение и подставив в него выражение для коэффициентов матрицы  $b$  через коэффициенты матрицы  $a$ :

$$b_{ij} = \delta_{ij} + a_{ir}\xi a'_{rj} + a_{i,-r}\bar{\xi}a'_{-r,j},$$

где  $\bar{\xi}$  имеет тот же смысл, что и в лемме 4.3, получим  $\Delta_{i,-j}^{r,-r}(a)\bar{\xi}(1 + x\xi) \in \sigma_{ij}$ , где  $x = \sum a'_{js}a_{sj}$ ,  $1 \leq s \leq l$ . Осталось заметить, что если  $x \in R$ , то  $\xi$  можно выбрать так, чтобы  $1 + x\xi \in R^*$ , а если  $x \notin R$ , то  $v(1 + x\xi) = v(x) = -m < 0$  и, следовательно,  $v(\Delta_{i,-j}^{r,-r}(a)) = v(\sigma_{ij}) + m$ , что и значит, что  $\Delta_{i,-j}^{r,-r}(a) \in \sigma_{ij}$ .

Завершим теперь доказательство включений  $a_{ir}a'_{rj} \in \sigma_{ij}$ . Снова рассмотрим матрицу  $b = aD_r(1 + \xi)a^{-1}$ . Для нее имеет место включение  $\Delta_{i,j}^{r,-r}(b) \in \sigma_{ij}$ , или, что то же самое,

$$a_{ir}a'_{rj}\bar{\xi}(1 + y\xi) - a_{i,-r}a'_{-r,j}\xi(1 - y\bar{\xi}) \in \sigma_{ij},$$

где  $y = \Delta_{i,-i}^{r,-r}(a)$ . Аналогичное включение для  $b^{-1}$  будет выглядеть так:

$$a_{ir}a'_{rj}\xi(1+y\bar{\xi}) - a_{i,-r}a'_{-r,j}\bar{\xi}(1-y\xi) \in \sigma_{ij}.$$

Определитель этой системы включений равен  $\bar{\xi}^2 - \xi^2$ , и можно выбрать  $\xi \in R^*$  так, чтобы он был обратим. Тем самым требуемые включения, а вместе с ними и теорема, доказаны.

В заключение сделаем замечания общего характера о возможностях дальнейшего развития этой работы.

Не вызывает сомнений, что аналог теоремы верен и для ортогональных групп нечетного порядка, он очевидным образом, как и в работе [10], сводится к теореме доказанной, в этой работе. Автор предполагает в ближайшее время провести соответствующие вычисления.

Кроме того, не вызывает сомнений также возможность решения схожей задачи для симплектических групп. После этого, учитывая работу [13], можно будет заключить, что стандартное описание подгрупп верно для всех бесконечных серий групп Шевалле (в их классическом понимании) над полем частного кольца дискретного нормирования.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. З. И. Борович, *Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 12–29.
2. З. И. Борович, *О параболических подгруппах в специальной линейной группе над полулокальным кольцом.* — Вестн. Ленингр. Ун-та No. 19 (1976), 29–34.
3. З. И. Борович, Н. А. Вавилов, *Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц.* — Тр. Матем. ин-та АН СССР **148** (1978), 43–57.
4. З. И. Борович, Е. В. Дыбкова, Л. Ю. Колотилина, *О сопряженности сетевых подгрупп в линейных группах.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **86** (1979), 11–18.
5. Н. А. Вавилов, *О параболических подгруппах групп Шевалле над полулокальным кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **75** (1978), 43–58.
6. Н. А. Вавилов, *О подгруппах полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащих группу диагональных матриц.* — Вестн. Ленингр. ун-та No. 1 (1981), 10–15.
7. Н. А. Вавилов, *Параболические подгруппы групп Шевалле над коммутативным кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **116** (1982), 20–43.

8. Н. А. Вавилов, *О подгруппах специальной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц, I–IV.* — Вестн. Ленингр. ун-та, Сер. I, No. 22 (1985), 3–7 ; No. 2, вып. 1 (1986), 10–15; вып. 2 (1987), 3–8; вып. 3 (1988), 10–15.
9. N. A. Vavilov, *Subgroups of  $SL_n$  over a semilocal ring.* — Preprint Universität Bielefeld, No. 111 (1998), 1–13.
10. Н. А. Вавилов, *О подгруппах расщепимых ортогональных групп.* — Сиб. мат. журнал **24** (1988), 12–25.
11. N. A. Vavilov, *Intermediate subgroups in Chevalley groups.* — in: Proc. Conf. Groups of Lie type and their Geometries (Como – 1993). Cambridge Univ. Press. 1995, p. 233–280.
12. Н. А. Вавилов, И. Хамдан, *О подгруппах полной линейной группы над локальным полем.* — Изв. вузов. Математика **12** (1989), 8–15.
13. К. Ю. Лавров, *Подгруппы полной линейной группы над локальным полем.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **272** (2000), 242–258.
14. И. Хамдан, *Подгруппы полной линейной группы над полем частных полулокального кольца.* — Канд. дисс., Ленинград (1987).
15. И. Хамдан, *О подгруппах специальной линейной группы над локальным кольцом главных идеалов.* — В кн.: Сб. научн. трудов. (Кольца и линейные группы.) Кубанский гос. ун-т. (1988), с. 119–126.

Lavrov K. G. Subgroups of the orthogonal groups of even degree over a local field.

In this paper, we obtain the description of subgroups of orthogonal linear groups  $SO(2l, K)$  and  $GO(2l, K)$  over the field of fractions  $K$  of a local principal ideal domain  $R$  containing the maximal split tori  $T = T(2l, R)$  with entries from  $R$ . Similar result for overgroups  $T$  in case of semilocal ring and field was obtained earlier by N. Vavilov. Result of the present paper generalizes also some known results.