УДК 515.17

Об особенностях, допускающих отщепление $\mathbf{A}_1$

© 1993. С. М. Гусейн-Заде

Самой простой из непростых (т.е. имеющих модули относительно группы замен переменных в прообразе) особенностей функций двух переменных является $x^4 + y^4 + ax^2y^2$, $a^2 \neq 4$ ($\mathbf{X}_9$ по терминологии В. И. Арнольда [1]). Ее множество нулевого уровня приводимо и состоит из четырех прямых, двойное отношение угловых коэффициентов которых и является модулем. Здесь мы покажем, что подобная ситуация имеет место для всей классификации особенностей функций двух переменных по числу модулей. Именно, минимальные элементы в множестве особенностей фиксированной модальности всегда приводимы и имеют «похожие» друг на друга компоненты. Например, среди особенностей, огораживающих унимодальные (см. [1, § 15, 16]), имеются семейства $\mathbf{J}_{3,0}$, $\mathbf{W}_{1,0}$ и $\mathbf{Z}_{1,0}$ коранга 2 (т.е. стабильно эквивалентные росткам функций двух переменных) с представителями $x^3 + y^9 = (x + y^3)(x + \lambda y^3)(x + \lambda^2 y^3)$ (здесь и далее $\lambda = \exp(2\pi i/3)$ — кубический корень из единицы), $x^4 - y^6 = (x^2 + y^3)(x^2 - y^3)$ и $y(x^3+y^6) = y(x+y^2)(x+\lambda y^2)(x+\lambda^2 y^2)$; среди особенностей, огораживающих бимодальные (см. там же), имеются семейства $\mathbf{J}_{4,0}$, $\mathbf{X}_{2,0}$ и $\mathbf{Z}_{2,0}$ коранга 2 с представителями $x^3+y^{12} = (x+y^4)(x+\lambda y^4)(x+\lambda^2 y^4)$, $x(x^4-y^6) = x(x^2+y^3)(x^2-y^3)$ и $y(x^3 + y^9) = y(x + y^3)(x + \lambda y^3)(x + \lambda^2 y^3)$.

Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции, имеющий в начале координат изолированную критическую точку с кратностью (числом Милнора) μ_0, m_0 — его модальность (относительно группы замен переменных в прообразе), S_f — страт $\{\mu = \mathrm{const}\}$ ($\{\mu = \mu_0\}$) в базе ограниченной миниверсальной деформации особенности f (см. [2]). Размерность страта S_f равна m_0 (см. [3]), а его коразмерность в базе любой версальной деформации равна $\mu_0 - m_0 - 1$.

На множестве стратов $\{\mu = \mathrm{const}\}$ (классов) особенностей имеется отношение частичного порядка, определяемого примыканием: особенность класса g меньше особенности класса h, если страт $\{\mu = \mathrm{const}\}$ особенности g примыкает к страту $\{\mu = \mathrm{const}\}$ особенности h (в этом случае $\mu(g) < \mu(h)$).

Определение. Будем говорить, что особенность f допускает отщепление особенности $\mathbf{A}_1$, если к ней примыкает один из стратов $\{\mu = \mu_0 - 1\}$, т.е. если существует такая (непрерывная по $t \in \mathbb{R}$) деформация $F\colon (\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ особенности $f(F(\,\cdot\,, 0) = f)$, что для достаточно малых $t \neq 0$ функция $f_t = F(\,\cdot\,, t)$ имеет в достаточно малой окрестности начала координат две критические точки кратностей $\mu_0 - 1$ и 1 соответственно.

Лемма. *Предположим, что все (или почти все) особенности из страта $\{\mu = \mathrm{const}\}$ особенности f допускают отщепление $\mathbf{A}_1$. Тогда класс особенности f не является минимальным в множестве особенностей с фиксированной модальностью $m = m_0$.*

Доказательство. Отщепляемость $\mathbf{A}_1$ означает, что к страту $\{\mu = \mu_0\}$ особенности f примыкает некоторый страт $\{\mu = \mu_0 - 1\}$. Его коразмерность не больше $\mu_0 - m_0 - 2$. С другой стороны, она равна $(\mu_0 - 1) - m' - 1$, где m' — модальность особенностей из этого страта. Следовательно, $m' \geqslant m_0$, откуда

(по определению модальности) $m' = m_0$, т.е. особенности из указанного страта имеют ту же модальность, что и f и, значит, класс f не является минимальным в множестве особенностей модальности m_0.

Следствие. *Существуют особенности, не допускающие отщепления* $\mathbf{A}_1$.

Пусть теперь $f\colon (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток функции с изолированной критической точкой в начале координат, $\{f = 0\}$ — кривая нулевого уровня функции f, $\{\varphi_i\}$ — набор ростков отображений $\varphi_i\colon (\mathbb{C}^1, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$, определяющих униформизацию ростка кривой $\{f = 0\}$. Через $r = r(f)$ обозначим количество неприводимых компонент кривой $\{f = 0\}$, через $s = s(f)$ — количество «исчезающих самопересечений» у особенности кривой $\{f = 0\}$, т.е. количество самопересечений в окрестности начала координат у кривой $\bigcup \operatorname{Im} \widetilde{\varphi}_i$ для общих шевелений $\widetilde{\varphi}_i$ ростков φ_i (см. [2, 4]). Вследствие соотношения $\mu(f) = 2s - (r-1)$ (см. [5, 4]) и сохранения количества неприводимых компонент r вдоль страта $\{\mu = \mathrm{const}\}$ особенности двух переменных сохранение числа Милнора μ в семействе эквивалентно сохранению количества компонент r и количества исчезающих самопересечений s.

Особенность функции f (или кривой $\{f = 0\}$) может быть разрешена при помощи последовательности σ-процессов в особых точках (см., например, [2]). Мы будем предполагать, что рассматриваются только минимальные разрешения (т.е. σ-процессы в уже разрешенных точках не делаются). Для всех особенностей из страта $\{\mu = \mathrm{const}\}$ ростка f (функции двух переменных!) эти последовательности σ-процессов будут одинаковыми, и, следовательно, их деревья разрешения будут совпадать. Это можно вывести, например, с помощью метода индукции, воспользовавшись соотношением $s(\{f = 0\}) = s(\sigma^{-1}(\{f = 0\})) + d(d-1)/2$, в котором d — степень кривой $\{f = 0\}$, т.е. наибольшая степень максимального идеала, которой принадлежит росток f, а под $s(\sigma^{-1}(\{f = 0\}))$ понимается сумма количеств исчезающих самопересечений по всем особым точкам собственного прообраза кривой $\{f = 0\}$ (см. [4, п. 2.4]). Полный прообраз кривой $\{f = 0\}$ состоит из ее собственного прообраза (замыкания прообраза многообразия $\{f = 0\} \setminus \{0\}$) и исключительного дивизора (объединения проективных прямых, вклеиваемых при σ-процессах). На множестве компонент исключительного дивизора имеется отношение частичного упорядочения, в котором компонента, вклеиваемая при σ-процессе в точке, принадлежащей другой компоненте, больше последней. Никакая из компонент исключительного дивизора не может пересекаться более чем с двумя компонентами, меньшими ее.

Теорема. *Предположим, что имеется максимальная (относительно описанного порядка) компонента исключительного дивизора, которая пересекается не более чем с тремя другими компонентами полного прообраза кривой* $\{f = 0\}$. *Тогда все особенности из страта* $\{\mu = \mathrm{const}\}$ *ростка* f *допускают отщепление особенности* $\mathbf{A}_1$, *и, следовательно, класс особенности* f *не является минимальным в множестве особенностей с фиксированной модальностью.*

Доказательство. Поскольку все особенности из страта $\{\mu = \mathrm{const}\}$ имеют одинаковые разрешения, утверждение достаточно доказать для самой особенности f. Пусть P — максимальная компонента исключительного дивизора, пересекающаяся не более чем с тремя другими компонентами полного прообраза кривой $\{f = 0\}$. Если она не пересекается с другими компонентами исключительного дивизора, то она — единственная среди них и f имеет особенность типа $\mathbf{A}_1$ или $\mathbf{D}_4$. В этом случае утверждение очевидно. Если компонента P не единствен-

ная, то она не может пересекаться с двумя компонентами полного прообраза кривой $\{f = 0\}$ (это является следствием минимальности рассматриваемого разрешения). Поэтому P (трансверсально) пересекается либо с двумя компонентами собственного прообраза кривой $\{f = 0\}$ и с одной компонентой исключительного дивизора, либо с одной компонентой собственного прообраза кривой $\{f = 0\}$ и с двумя компонентами исключительного дивизора. В первом случае после стягивания P в соответствующей точке попарно трансверсально пересекаются две компоненты исключительного дивизора и одна неособая компонента собственного прообраза. Пошевелив ее, мы получим компоненту, пересекающую исключительный дивизор в двух точках (рис. 1; на обоих рисунках слева изображена (локальная) ситуация до шевеления, а справа — после; толстыми линиями изображаются компоненты исключительного дивизора). Легко видеть, что (после стягивания исключительного дивизора) полученная деформация дает деформацию кривой $\{f = 0\}$, имеющую то же количество s исчезающих самопересечений и на единицу большее количество компонент r. Во втором случае после стягивания P в соответствующей точке попарно трансверсально пересекаются две неособые компоненты собственного прообраза и одна компонента исключительного дивизора. Существует такая деформация собственного прообраза, при которой из этих двух компонент образуется одна неособая (неодносвязная, диффеоморфная как риманова поверхность цилиндру), имеющая простое касание с соответствующей компонентой исключительного дивизора (в точке, в которой она не пересекается с другими компонентами полного прообраза; см. рис. 2). Легко видеть, что (после стягивания исключительного дивизора) эта деформация дает деформацию кривой $\{f = 0\}$, имеющую на единицу меньшие s и r. Нетрудно показать, что в обоих случаях деформация кривой $\{f = 0\}$ реализуется деформацией ростка f. В обоих случаях число Милнора $\mu = 2s - (r - 1)$ у деформации особенности f на единицу меньше, чем у f, что и требовалось доказать.

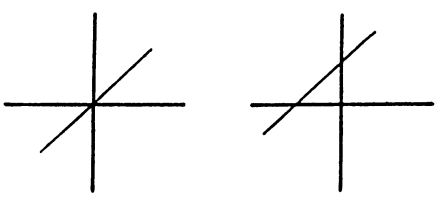

Рис. 1

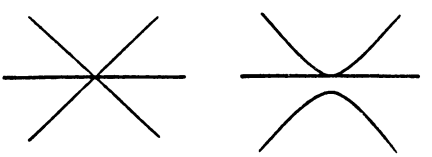

Рис. 2

Если максимальная компонента исключительного дивизора пересекается с четырьмя другими компонентами полного прообраза, то по крайней мере две из них — компоненты собственного прообраза кривой $\{f = 0\}$.

Следствие. *Если класс особенности f является минимальным в множестве особенностей с фиксированной модальностью, то кривая $\{f = 0\}$ приводима и имеет пару компонент с одинаковыми парами Пюизо (см.* [2]) *и индексами пересечений со всеми другими компонентами.*

Более внимательный анализ доказательства теоремы показывает, что если таких компонент только две, то они обязательно особы.

Литература

1. *Арнольд В. И., Варченко А. И., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Т. I. – М.: Наука. – 1982. **2.** *Арнольд В. И., Варченко А. И.,*

Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. II. – М.: Наука. – 1984. **3.** *Габриэлов А. М.* // Функц. анализ и его прил. – 1974. – Т. 8, вып. 2. – С. 7–12. **4.** *Гусейн-Заде С. М.* // Функц. анализ и его прил. – 1974. – Т. 8, вып. 4. – С. 23–30. **5.** *Милнор Дж.* Особые точки комплексных гиперповерхностей. – М.: Мир, 1971.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
17 декабря 1991 г.

УДК 517

О комплексах Весса–Зумино

© 1993. Е. Е. Демидов

Не так давно Вессом и Зумино была предложена конструкция аналога комплекса де Рама (WZ-комплекс) для некоммутативных («квантовых») аффинных пространств [5]. Оказалось, что этот аналог тесно связан с решениями квантового уравнения Янга–Бакстера (YB). В настоящей заметке описаны простейшие свойства алгебры дифференциальных операторов, ассоциированной с WZ-комплексом (аналог алгебры Вейля); вычислены когомологии WZ-комплекса, построенного по R-матрице Садбери [4]. Определены «морфизмы Фробениуса и Картье в нулевой характеристике», возникающие, когда параметры деформации суть корни из 1.

1. Зафиксируем алгебраически замкнутое поле k, $\operatorname{char} k = 0$. Если $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ — семейство квадратичных алгебр с одинаковым количеством образующих n, то существует универсальная квадратичная алгебра $M(\mathcal{A})$, для которой каждая A_α является левым комодулем [2]. Эта алгебра $M(\mathcal{A})$ может быть представлена как $k\langle z_i^j \mid i, j = 1, \dots, n\rangle / I_{\mathcal{A}}$. Хопфову оболочку $M(\mathcal{A})$ обозначим $G(\mathcal{A})$ [3].

2. Определение WZ-комплексов. Исходные данные: квадратичные алгебры $A = k\langle x_1, \dots, x_n\rangle/(I_A)$, $B = k\langle \xi_1, \dots, \xi_n\rangle/(I_B)$; I_A, I_B — подпространства квадратичных соотношений, порождающие идеалы. WZ-комплексом, ассоциированным с A и B, называется квадратичная алгебра Ω такая, что

1. Ω порождена $x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n$ и содержит A и B в качестве подалгебр;
2. $\{\xi_i\}$ ($\{x_i\}$) линейно независимы над A (над B) справа;
3. существуют операторы $\Xi_{ij}\colon A \to A$, $X_{ij}\colon B \to B$ такие, что

$$f\xi_j = \sum_i \xi_i \Xi_{ij}(f), \quad f \in A; \qquad \varphi x_j = \sum_i x_i X_{ij}(\varphi), \quad \varphi \in B;$$

4. Ω является левым $M(A, B)$-комодулем, причем эта структура наследуется с A и B;
5. существует дифференциал $d\colon \Omega \to \Omega$, переводящий x_i в ξ_i, а ξ_i в 0 и действующий по градуированному правилу Лейбница $d(\varphi\psi) = d\varphi\,\psi + (-1)^{\widetilde{\varphi}}\varphi\, d\psi$ (градуировка определяется по B);
6. d является эндоморфизмом $M(A, B)$-комодуля Ω.

Таким образом, Ω как векторное пространство есть, вообще говоря, фактор $B \bigotimes_k A$, и для определения Ω фактически необходимы лишь соотношения вида $x_i \otimes \xi_j = \sum_{k,\ell} T_{ij}^{k\ell} \xi_k \otimes x_\ell$. Теорема существования WZ-комплексов содержится в [1]. Следующий способ их построения указан в [5]. Пусть R — невырожденное