Д. Г. Васильченкова, В. И. Данченко, Выделение гармоник из тригонометрических многочленов амплитудно-фазовыми операторами, *Алгебра и анализ*, 2020, том 32, выпуск 2, 21–44

Алгебра и анализ
Том 32 (2020), №2

ВЫДЕЛЕНИЕ ГАРМОНИК ИЗ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

© Д. Г. ВАСИЛЬЧЕНКОВА, В. И. ДАНЧЕНКО

Рассматривается задача выделения из тригонометрических многочленов

$$T_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \tau_k(t), \quad \tau_k(t) := a_k \cos kt + b_k \sin kt,$$

гармоник τ_μ заданного порядка μ методом амплитудно-фазовых преобразований. Такие преобразования переводят многочлены $T_n(t)$ в *подобные* им с помощью двух простейших операций — умножения на вещественную константу X и сдвига на вещественную фазу λ, то есть $T_n(t) \to X \cdot T_n(t-\lambda)$. Гармоника τ_μ выделяется сложением подобных многочленов:

$$\tau_\mu(t) = \sum_{k=1}^{m} X_k \cdot T_n(t - \lambda_k), \qquad m \leqslant n,$$

где X_k, λ_k определены явными формулами. Получены аналогичные формулы для гармоник на достаточно широком классе сходящихся тригонометрических рядов. С помощью указанного представления получены точные оценки типа Фейера гармоник и коэффициентов многочленов T_n.

§1. Введение

1.1. Постановка задачи. Пусть

$$T_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \tau_k(t), \quad \tau_k(t) := a_k \cos kt + b_k \sin kt, \quad a_k,\, b_k \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для удобства формулировок задачи и основных результатов будем рассматривать тригонометрические многочлены с нулевым свободным членом, то есть $a_0 = a_0(T_n) = 0$. Всегда будем оговаривать случай, когда это условие не обязательно выполняется. Амплитудно-фазовым оператором

Ключевые слова: проблема дискретных моментов, метод Прони, регуляризация.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (задание №1.574.2016/1.4) и РФФИ (проект №18-01-00744).

(АФО) порядка не выше m, действующим на T_n, будем называть преобразование вида

$$H_m(T_n, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; t) = \sum_{j=1}^{m} X_j \cdot T_n\left(t - \lambda_j\right), \quad X_j,\, \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N} \quad (1.1)$$

(порядок АФО равен числу слагаемых в (1.1), в которых $\exp(i\lambda_j)$ попарно различны, а $X_j \neq 0$). В работе рассматривается следующая задача.

Задача $\mathcal{A}$. *При фиксированных натуральных числах μ и $n \geqslant \mu$ найти натуральное $m = m(\mu; n) \leqslant n$ и вещественные $X_j = X_j(\mu; n)$, $\lambda_j = \lambda_j(\mu; n)$, $j = \overline{1, m}$, для которых имеет место представление*

$$\tau_\mu(t) = H_m\big(T_n, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; t\big), \tag{1.2}$$

где m, X_j, λ_j не зависят от коэффициентов многочлена T_n $(a_0(T_n) = 0)$.

Наша основная цель — найти решения m, $\{X_j\}$, $\{\lambda_j\}$ задачи $\mathcal{A}$ в явном виде. Заметим, что ввиду требования вещественности X_j, λ_j достаточно решить задачу $\mathcal{A}$ только для вещественных многочленов T_n.

Самостоятельный интерес представляет задача о минимизации параметра m. В случае $\mu = 1$ минимальный порядок АФО в (1.2) всегда равен $m = n$ (теорема 3). Однако если многочлен T_n имеет степень вида $n = s\mu - 1$, $s \geqslant 2$, то минимальный порядок АФО не превосходит $m = n - \mu + 1$, что при $\mu \geqslant 2$ строго меньше степени многочлена (теорема 1).

В случае вещественного многочлена действие (1.2) имеет физический смысл: из стационарного сигнала $T_n(t)$ выделяется гармоника $\tau_\mu(t)$ наложением не более m подобных сигналов, отличающихся лишь амплитудами и начальными фазами. Такое представление гармоник легко реализуется на практике при фильтрации аналоговых и цифровых стационарных сигналов. Выделение гармоник непосредственным наложением сигналов (без использования промежуточных спектральных замеров) позволяет также применять (1.2) для достаточно точных оценок тригонометрических полиномов (см., например, следствия теоремы 1).

1.2. Сведение задачи (1.2) **к задаче Каратеодори.** Задача $\mathcal{A}$ равносильна следующей задаче дискретных моментов (см. §2)

$$X_1 z_1^k + X_2 z_2^k + \ldots + X_n z_n^k = \sigma_k, \qquad k = \overline{1, n}, \tag{1.3}$$

с неизвестными X_j и z_j, где условия задачи $\mathcal{A}$ принимают вид:

($\mathcal{A}$): *$\sigma_k = 0$ при $k \neq \mu$ и $\sigma_\mu = 1$, $z_j = e^{-i\lambda_j}$, все λ_j и X_j вещественны, все z_j попарно различны (некоторые X_j могут быть нулевыми).*

Систему (1.3) с условиями ($\mathcal{A}$) будем называть задачей $\mathcal{K}$. Хорошо известно, что система (1.3) всегда имеет решение X_j, z_j с $X_j \geqslant 0$, $|z_j| = 1$ при произвольных комплексных σ_k (оно единственно). Это утверждение классической теоремы Каратеодори (см., например, [1]). Существуют и численные алгоритмы приближенного решения системы (1.3) (см., например, [2, 3], а также алгоритм в разделе 5.1).

Но наша основная цель — найти решения $\{X_j\}$, $\{z_j\}$ задачи $\mathcal{K}$ в явном виде и без условия неотрицательности X_j. (В некоторых случаях будут найдены все ее решения.) Предлагаемый метод состоит в следующем. Система (1.3) при условиях ($\mathcal{A}$) дополняется комплексно сопряженными уравнениями этой же системы с номерами $\overline{1, n-1}$ и еще одним *свободным* уравнением $X_1 + \ldots + X_n = \omega$, где ω — вещественный параметр. Получается полная система дискретных моментов вида:

$$X_1 z_1^k + X_2 z_2^k + \ldots + X_n z_n^k = \sigma_k, \quad k = \overline{-n+1, n}, \tag{1.4}$$

где выполнены условия ($\mathcal{B}$).

($\mathcal{B}$): $\sigma_0 = \omega$, $\sigma_{\pm\mu} = 1$, $\sigma_k = 0$ *при* $k \neq 0, \pm\mu$; *все* $z_j = e^{-i\lambda_j}$ *различны, а* ω — *вещественный параметр.*

Здесь некоторые X_j могут равняться нулю. Правильный выбор параметра ω играет основную роль для ($\mathcal{B}$)-разрешимости системы (1.4) (то есть разрешимости системы (1.4) с условиями ($\mathcal{B}$)). Для решения задачи $\mathcal{A}$ мы используем то, что задача $\mathcal{K}$ (а значит и задача $\mathcal{A}$) сводится к ($\mathcal{B}$)-разрешимой задаче (1.4) (см. §3). В свою очередь, решение системы (1.4) при условиях ($\mathcal{B}$) облегчается тем, что в этой ситуации можно не требовать заранее вещественности коэффициентов X_j — в ($\mathcal{B}$)-разрешимой системе так будет автоматически в силу леммы 1.

Достаточно полно исследованы ($\mathcal{B}$)-разрешимые системы (1.4) при условиях

$$n = s\mu - 1, \qquad s = 2, 3, \ldots, \tag{1.5}$$

$$\omega \in \Omega_s := \Big\{ 2\cos\varphi_\alpha : \quad \varphi_\alpha = \frac{\pi\alpha}{s+1}, \quad \alpha = \overline{1, s} \Big\}, \tag{1.6}$$

где Ω_s — множество корней уравнения $U_s(\omega/2) = 0$, а U_s — многочлен Чебышева второго рода степени s [4]:

$$U_s(x) := (1 - x^2)^{-1/2} \sin((s+1)\arccos x). \tag{1.7}$$

Для решения систем (1.4) обычно применяется классический метод Прони [5] (см. §3), причем для его эффективности требуется дополнительно следующее условие регулярности: *все* $z_j \neq 0$ *и попарно различны, а* $X_j \neq 0$). При $\mu = 1$ и условиях ($\mathcal{B}$), (1.5), (1.6) как раз получается такой регулярный случай и явное решение удается найти определенной модификацией метода Прони. Однако при $\mu \geqslant 2$ решения системы (1.4) всегда не являются регулярными (см. замечание 3), что приводит к невозможности непосредственного применения метода Прони. Для таких случаев в §5 разработано несколько методов регуляризации задачи (1.4) определенными вариациями правых частей $\{\sigma_k\}$. Это позволило предельными переходами из решений регуляризованных систем получить решения задачи (1.4) при $\mu \geqslant 2$ (теорема 1).

1.3. Формулировка основной теоремы. Ее доказательство при $\mu \geqslant 3$ дано в §5, а при $\mu = 1$ и $\mu = 2$ — в теоремах 3 и 6.

Теорема 1. *Пусть натуральные* $s \geqslant 2$, $\mu \geqslant 1$, $n = s\mu - 1$ *и параметр* $\omega \in \Omega_s$. *Тогда система* (1.4) $(\mathcal{B})$*-разрешима. Число отличных от нуля* $X_j = X_j(\mu, n, \omega)$ *равно* $m = n - \mu + 1$. *При*

$$\omega = -2\cos\varphi_\alpha, \quad \varphi_\alpha := \frac{\pi\alpha}{s+1}, \quad (\alpha = \overline{1, s}),$$

значения $z_j = z_j(\mu, n, \omega) = e^{-i\lambda_j}$ $(j = \overline{1, m})$ *попарно различны и составляют множество*

$$\{z_j\} = \{\sqrt[(s+1)\mu]{(-1)^\alpha}\} \setminus \{\sqrt[\mu]{e^{i\varphi_\alpha}}, \sqrt[\mu]{e^{-i\varphi_\alpha}}\}; \tag{1.8}$$

$$X_j = \frac{1}{(s+1)\mu}\left(\omega + 2\operatorname{Re} z_j^\mu\right), \quad \lambda_j = -\arg z_j, \quad j = \overline{1, m}, \tag{1.9}$$

где

$$\sum_{j=1}^{m} X_j = \omega; \quad \text{все } X_j < 0, \text{ если } \quad \alpha = 1; \quad \text{все } X_j > 0, \text{ если } \quad \alpha = s. \tag{1.10}$$

При $\mu \geqslant 1$ *имеем равенство* (1.2): $\tau_\mu(t) = H_m(T_n, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; t)$, *где* $m \leqslant n$, *и, значит, решение* (1.8), (1.9) *удовлетворяет условиям задачи* $\mathcal{A}$. *Кроме того, формула* (1.2) *верна и для сходящихся тригонометрических рядов, в которых отсутствуют гармоники с номерами*

$$\beta = \mu + \theta k, \ n + 1 + \theta\,(k-1) \leqslant \beta \leqslant \theta + \theta(k-1), \ \theta := n + \mu + 1, \ k \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Замечание 1. Из (1.8) видно, что существует по меньшей мере s различных допустимых решений задачи $\mathcal{A}$, соответствующих s различным корням ω_k уравнения $U_s(\omega/2) = 0$. В теоремах 3 и 6 будет показано, что при $\mu = 1, 2$ условие $\omega := X_1 + \ldots + X_n \in \Omega_s$ является необходимым и достаточным для $(\mathcal{B})$-разрешимости задачи (1.4) (и задачи $\mathcal{A}$) с условием (1.5), так что в этих случаях имеется ровно s различных решений. По-видимому, это справедливо и для всех μ.

1.4. Следствия теоремы 1. Доказательства следствий 3, 4 даны в последнем разделе.

Следствие 1 (о решении задачи $\mathcal{A}$). *Из теоремы 1 получаются явные решения задачи $\mathcal{A}$ при любом натуральном $n \geqslant \mu$. При этом параметры в (1.2) вычисляются по формулам (1.8), (1.9), где s заменяется на $s_0 := \min\{s:\ s\mu - 1 \geqslant n\}$, $m = (s_0 - 1)\mu$.*

Действительно, положим $n_0 := s_0\mu - 1$. Тогда, учитывая, что $n_0 - \mu < n$, $n_0 \geqslant n$, находим $\tau_\mu(t) = H_{n_0-\mu+1}(T_n, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; t)$, где $m = n_0 - \mu + 1 \leqslant n$. Отсюда получается следующее утверждение.

Следствие 2. *Справедливы арифметические формулы для коэффициентов Фурье многочлена $T_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n \tau_k(t)$ при условии $a_0 = 0$:*

$$a_\mu = H_m\Big(T_n, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; 0\Big), \quad b_\mu = H_m\Big(T_n, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; \frac{\pi}{2\mu}\Big),$$

где параметры АФО определены в следствии 1.

Теорема 1 сформулирована для многочленов с нулевым свободным членом. В общем случае, когда a_0 не обязательно равен нулю, вместо (1.2) с учетом (1.10) получается равенство

$$a_0\,\omega_{s,\alpha} + \tau_\mu(t) = H_m(T_n, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; t), \quad \omega_{s,\alpha} = -2\cos\frac{\pi\alpha}{s+1}, \tag{1.12}$$

где $\alpha = \overline{1, s}$, $n = s\mu - 1$, $m = n - \mu + 1$, $X_j = X_j(\mu, n, \omega_{s,\alpha})$, $\lambda_j = \lambda_j(\mu, n, \omega_{s,\alpha})$. Отсюда получается следующее утверждение.

Следствие 3. *Для многочлена $T_n(t)$ с комплексными коэффициентами при условиях $n = s\mu - 1$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$ имеем оценку:*

$$\|a_0 \pm \omega^{-1}\tau_\mu\|_{L_p[0,2\pi]} \leqslant \|T_n\|_{L_p[0,2\pi]}, \ \text{где } \omega = \omega_{s,s} = 2\cos\frac{\pi}{s+1}. \tag{1.13}$$

Для вещественного многочлена T_n при $a_0 > 0$ и $a_0 < 0$ имеем соответственно

$$a_0\omega + \sqrt{a_\mu^2 + b_\mu^2} \leqslant \omega \max_{x\in[0,2\pi]} T_n(x) \quad \text{и} \quad |a_0|\omega + \sqrt{a_\mu^2 + b_\mu^2} \leqslant -\omega \min_{x\in[0,2\pi]} T_n(x).$$

Множитель ω справа в этих неравенствах нельзя заменить меньшим. При $s = 2$ достигается равенство на многочлене $a_0 + \tau_\mu(t)$, $a_0 > 0$.

Следствие 4 (неравенства Фейера). *Для вещественного неотрицательного многочлена ($T_n \not\equiv 0$) имеем:*

$$a_0 - \omega^{-1}\sqrt{a_\mu^2 + b_\mu^2} \geqslant \min_x T_n(x), \quad \sqrt{a_\mu^2 + b_\mu^2} \leqslant \omega\, a_0 < 2\, a_0, \tag{1.14}$$

где $n = s\mu - 1$, $\omega = 2\cos\frac{\pi}{s+1}$. *Оценки* (1.14) *точны, равенства получаются для четного многочлена*

$$T_n^*(t) = \prod_{j=1}^{n-\mu+1} \sin^2\left(\frac{t+\lambda_j}{2}\right) = a_0 + a_1\cos t + \ldots + a_n \cos nt, \qquad (1.15)$$

где λ_j — *параметры из* (1.12) *при* $\omega = \omega_{s,s}$. *Кроме того, для последовательности неотрицательных четных многочленов* $S_n(t) = (1+\cos t)^n$ *при всех* μ *имеем*:

$$2\,a_0(S_n)/a_\mu(S_n) \to 1, \qquad n \to \infty. \qquad (1.16)$$

При $\mu = 1$ оценки (1.14) принадлежат Фейеру [6]. При $\mu > 1$ эти оценки (с доказательством их точности) были получены Эгервари и Сассом (1928) весьма сложными методами, основанными на представлении неотрицательных многочленов $T_n(t)$ в форме Фейера $|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \exp(ikt)|^2$. Значительно упростить их доказательство удалось С. Б. Гашкову сведением общего случая к случаю $\mu = 1$ (см. [7]). Нами предлагается совсем простое доказательство неравенств Фейера и их точности с помощью (1.12). Отметим, что неравенства (1.14) и их различные модификации известны по многим экстремальным задачам для неотрицательных многочленов, см., например, работы С. Б. Стечкина, В. В. Арестова, А. С. Белова [8, 9, 10, 11].

Замечание 2. В [12] рассматривалась задача о выделении сумм двух гармоник $\tau_\mu(t) + \tau_\nu(t)$ в форме (1.2) и применении ее в оценках типа Фейера, но ее удалось решить только в случаях $(\mu,\nu) = (1,n)$ и $(\mu,\nu) = (2,n)$. Заметим еще, что алгебраическим аналогом (1.2) является *амплитудно-частотное* представление степеней в виде:

$$z^\mu p_\mu = \sum_{j=1}^{m} X_j P_n(ze^{-i\lambda_j}), \quad P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} p_k z^k, \quad p_k \in \mathbb{C}.$$

Такого типа преобразования многочленов применялись для Паде-интерполяции в [13] (но без каких-либо предварительных условий на $\{X_j\}$, $\{\lambda_j\}$).

§2. Система уравнений для амплитуд и фаз

2.1. Как отмечалось, ввиду вещественности $\{X_j\}$, $\{\lambda_j\}$ достаточно решить задачу (1.2) для вещественных многочленов T_n. Поэтому всюду ниже считаем, что $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\tau_k(t) = \frac{a_k}{2}\left(e^{itk} + e^{-itk}\right) - i\frac{b_k}{2}\left(e^{itk} - e^{-itk}\right) = 2\cdot\mathrm{Re}\left(\alpha_k e^{ikt}\right),$$

где $2\alpha_k = a_k - ib_k$. Следовательно, при вещественных X_j имеем

$$H_n(T_n, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; t) = 2 \cdot \mathrm{Re}\biggl(\sum_{k=1}^{n}\biggl(\sum_{j=1}^{n} X_j z_j^k\biggr)\alpha_k e^{ikt}\biggr). \tag{2.1}$$

Отсюда следует, что задачи $\mathcal{A}$ и $\mathcal{K}$ равносильны. Действительно, при условиях ($\mathcal{A}$) из (1.3) и (2.1) имеем

$$H_n(T_n, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; t) = 2 \cdot \mathrm{Re}\left(\alpha_\mu e^{i\mu t}\right) = \tau_\mu(t),$$

то есть получаем (1.2). Обратно, если при условиях ($\mathcal{A}$) выполнено последнее равенство (т. е. (1.2)) для тригонометрических многочленов, то равенство их коэффициентов дает $\sum_{j=1}^{n} X_j z_j^k = \sigma_k$, то есть получаем (1.3).

Заметим, что для сходящегося ряда $T(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k(t)$ вместо (2.1) получается

$$H_n(T, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; t) = 2 \cdot \mathrm{Re}\biggl(\sum_{k=1}^{\infty}\biggl(\sum_{j=1}^{n} X_j z_j^k\biggr)\alpha_k e^{ikt}\biggr). \tag{2.2}$$

2.2. Случай, когда все z_k различны. При формальной замене $X_k z_k$ на Y_k в системе (1.3) получаем систему относительно Y_k с отличным от нуля определителем Вандермонда (при такой формальной замене первая строка имеет вид $(Y_1, \ldots, Y_n)$ независимо от значений z_k). Значения Y_k находятся как скалярные произведения (см., напр., [14]):

$$Y_k = (\mathcal{L}_k \cdot \mathcal{S}), \quad \text{где} \quad \mathcal{S} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \tag{2.3}$$

$$\mathcal{L}_k = \frac{1}{\prod\limits_{j \neq k} (z_k - z_j)} \left((-1)^{n-1}\rho_{n-1}^{(k)}, \ldots, (-1)^{n-\mu}\rho_{n-\mu}^{(k)}, \ldots, -\rho_1^{(k)},\ 1\right),$$

а $\rho_m^{(k)}$ — элементарные симметрические многочлены вида

$$\rho_0 = 1, \quad \rho_m^{(k)} = \rho_m(z_1, \ldots, z_{k-1}, 0, z_{k+1}, \ldots, z_n), \quad k = \overline{1,n},$$

$$\rho_m := \rho_m(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n} z_{j_1} \ldots z_{j_m}, \quad m = \overline{1,n},$$

Если все z_k отличны от нуля, то отсюда получаем

$$X_k(\mu) = \frac{(-1)^{n-\mu}\rho_{n-\mu}^{(k)}}{z_k \prod\limits_{j \neq k} (z_k - z_j)}, \quad 1 \leqslant \mu \leqslant n, \quad X_k(1) = \frac{(-1)^{n-1} \prod\limits_{j=1}^{n} z_j}{z_k^2 \cdot \prod\limits_{j \neq k} (z_k - z_j)}. \tag{2.4}$$

§3. Метод Прони

3.1. Полная система моментов. Заметим, что (равносильные) задачи $\mathcal{A}$ и $\mathcal{K}$ равносильны $(\mathcal{B})$-разрешимой задаче (1.4) (с каким-либо вещественным ω). Действительно, при условии $(\mathcal{A})$ система (1.4) получается добавлением к (1.3) комплексно сопряженных уравнений той же системы (1.3) (за исключением одного *свободного* уравнения с σ_0). Обратно, система (1.3) и недостающее для $(\mathcal{A})$ условие $X_k \in \mathbb{R}$ являются следствием $(\mathcal{B})$-разрешимости задачи (1.4). Именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Для совместной системы* (1.4) *условие* $X_k \in \mathbb{R}$ *следует из условий* $(\mathcal{B})$.

Доказательство. Пусть для определенности $X_k \neq 0$ при $k = \overline{1, m}$, $m \leqslant n$, а остальные X_k равны нулю. Заметим, что операция сопряжения к уравнениям (1.4) с номерами $\overline{-m+1, 0}$, даст уравнения с номерами $\overline{0, m-1}$ с заменой X_k на $\overline{X_k}$. Другими словами, уравнения с номерами $\overline{0, m-1}$ верны и для X_k, и для $\overline{X_k}$. Вычитая такие уравнения с одинаковыми номерами, получим систему относительно $X_k - \overline{X_k}$ с нулевыми правыми частями и определителем Вандермонда $W(z_1, \ldots, z_m)$ с попарно различными z_k. Она имеет нулевое решение. □

В ряде выкладок мы будем рассматривать системы (1.4) без каких-либо предварительных условий на $\{X_k\}$, $\{z_k\}$, $\{\sigma_k\}$, ω. Это классическая система дискретных моментов относительно неизвестных $\{X_k\}$, $\{z_k\}$ при прочих известных параметрах (см. например, [5, 15, 16]). Вместе с (1.4) будем рассматривать систему моментов

$$\omega_l = S_l, \quad \text{где} \quad \omega_l := \sum_{k=1}^{n} Z_k z_k^l, \qquad l = \overline{0, 2n-1}, \tag{3.1}$$

относительно Z_k, z_k при известных $S_l = \sigma_{1-n+l}$ $(S_{n-1} = \omega)$. Если все $z_k \neq 0$, $k = \overline{1, n}$, то система (3.1) получается из (1.4) заменой $Z_k = X_k z_k^{-n+1}$, так что в этом случае системы равносильны. Отметим, что в задаче (3.1) условие $z_k \neq 0$ необязательно.

3.2. Регулярные системы моментов. В [17] совместная система (3.1) и ее решение называются регулярными, если выполнены условия

$(\mathcal{B}')$: *все* z_k *попарно различны (не обязательно отличны от нуля), а все* Z_k *отличны от нуля (но не обязательно попарно различны).*

Введем еще одно условие: $(\mathcal{B}'') = (\mathcal{B}) \cup (\mathcal{B}')$ — совокупность условий $(\mathcal{B})$ и $(\mathcal{B}')$, то есть

($\mathcal{B}''$): $\sigma_0 = \omega \in \mathbb{R}$, $\sigma_{\pm\mu} = 1$, $\sigma_k = 0$ *при* $k \neq 0, \pm\mu$; *все* z_k *попарно различны и* $|z_k| = 1$, *все* Z_k *отличны от нуля.*

Определение 1. Для краткости совместные системы (3.1) с указанными свойствами ($\mathcal{B}'$), ($\mathcal{B}''$) будем называть ($\mathcal{B}'$)-регулярными, ($\mathcal{B}''$)-регулярными соответственно.

Для нахождения решения ($\mathcal{B}'$)-регулярных систем (3.1) обычно пользуются классической теоремой Прони [5]. Она утверждает, что неизвестные $\{z_j\}$ являются корнями *производящего многочлена* — определителя ганкелевой матрицы:

$$G_n(\{\sigma_k\};\, z) = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \dots & \dots & z^{n-2} & z^{n-1} & z^n \\ \sigma_{1-n} & \sigma_{2-n} & \sigma_{3-n} & \dots & \dots & \sigma_{-1} & \omega & \sigma_1 \\ \sigma_{2-n} & \sigma_{3-n} & \sigma_{4-n} & \dots & \dots & \omega & \sigma_1 & \sigma_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{-1} & \omega & \sigma_1 & \dots & \dots & \sigma_{n-3} & \sigma_{n-2} & \sigma_{n-1} \\ \omega & \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \dots & \sigma_{n-2} & \sigma_{n-1} & \sigma_n \end{vmatrix}, \tag{3.2}$$

где $S_l = \sigma_{1-n+l}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема Сильвестра–Любича [15, 17]. *Для* ($\mathcal{B}'$)*-регулярности системы* (3.1) *необходимо и достаточно, чтобы степень производящего многочлена* $G_n(\{\sigma_k\};\, z)$ *была равна* n, *а все его корни* $z_1, \dots, z_n$ *были попарно различны. Они являются решением системы* (3.1). *При этом регулярная система имеет единственное решение.*

Далее, решив уравнение $G_n(\{\sigma_k\};\, z) = 0$ относительно z, найдем z_k, а затем, используя первые n уравнений системы (3.1) (с отличным от нуля определителем Вандермонда), по формулам вида (2.3) определим Z_k. То есть в части достаточности теорема гарантирует, что если корни $z_1, \dots, z_n$ попарно различны, то система (3.1) совместна и притом с отличными от нуля Z_k. Последнее связано с тем, что если какой-либо $Z_k = 0$ в совместной системе (3.1), то определитель (3.2) равен тождественно нулю (подробнее, см. в параграфе 5).

Лемма 2. *В случае* ($\mathcal{B}'$)*-регулярной разрешимости задачи* (3.1) *производящий многочлен, построенный по формуле* (3.2), *имеет вид*

$$G_n(\{\sigma_k\};\, z) = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} Z_k \cdot \prod_{1 \leqslant k < j \leqslant n} (z_k - z_j)^2 \cdot \prod_{k=1}^{n} (z - z_k). \tag{3.3}$$

Доказательство. То, что в (3.3) присутствует последнее произведение, следует из теоремы Сильвестра–Любича. Хорошо известно, что матрица

$$A := \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \dots & \omega_{n-1} \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{n-1} & \omega_n & \dots & \omega_{2n-2} \end{pmatrix}, \quad \omega_l = \sum_{k=1}^{n} Z_k z_k^l,$$

получающаяся из матрицы (3.2) вычеркиванием первой строки и последнего столбца, представляется в виде произведения матрицы Вандермода, диагональной матрицы и транспонированной матрицы Вандермода:

$$A = W \cdot \operatorname{diag}(Z_1, \dots, Z_n) \cdot W^T, \qquad W := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_1 & \dots & z_n \\ \dots & \dots & \dots \\ {z_1}^{n-1} & \dots & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

(см., например, [18], это легко проверяется и непосредственно). То есть алгебраическое дополнение определителя (3.2) к z^n (старший коэффициент многочлена $G_n(\{\sigma_k\};\, z)$) равно $(-1)^n(\det W)^2 \prod_{k=1}^n Z_k$. □

3.3. Замечания. Как уже говорилось, представление (3.2) для многочлена $G_n(\{\sigma_k\};\, z)$ будем иногда применять без каких-либо предварительных условий на σ_k и ω. В некоторых случаях степень G_n может быть меньше n, возможно даже $G_n(\{\sigma_k\};\, z) \equiv 0$. К системам (3.1) в таких случаях метод Прони неприменим.

При выполнении условий $(\mathcal{B})$ на σ_k вместо $G_n(\{\sigma_k\};\, z)$ для определенности будем использовать обозначение $G_n(\omega, \mu;\, z)$. В дальнейшем будет показано (см. параграф 5), что основным признаком $(\mathcal{B})$-разрешимых систем (1.4), (3.1) при $\mu \geqslant 2$ и условии (1.5) является вырождение производящего многочлена: $G_n(\omega, \mu;\, z) \equiv 0$.

При выполнении условий $(\mathcal{B})$ в (3.2) под первой строкой находится трехдиагональная матрица с элементами $A_{k,n+2-k} = \omega$, $A_{k,n+2-k\pm\mu} = 1$, $k \geqslant 2$ (где соответственно $k = \overline{2, n+1}$, $k = \overline{\mu+1, n+1}$, $k = \overline{2, n+1-\mu}$), остальные элементы равны нулю. Например,

$$G_3(\omega, 1;\, z) = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 \\ 0 & 1 & \omega & 1 \\ 1 & \omega & 1 & 0 \\ \omega & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad G_3(\omega, 2;\, z) = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 1 \\ \omega & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

§4. О некоторых свойствах производящего многочлена

4.1. Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $G_n(\{\sigma_k\};\,\cdot\,)$ — *вещественный многочлен степени* n, *корни которого лежат на единичной окружности. Тогда его коэффициенты симметричны или антисимметричны, то есть с одним из знаков* $\pm$ *имеем*:

$$g_k = \pm g_{n-k}, \qquad g_k = g_k(\omega), \qquad k = \overline{0, n}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Поскольку все $|z_k| = 1$, то $g_n = \pm g_0$ (теорема Виета для вещественных коэффициентов). Далее, при $|z| = 1$ имеем

$$\overline{G_n(\{\sigma_k\};\, z)} = G_n(\{\sigma_k\};\, \overline{z}) = G_n(\{\sigma_k\};\, z^{-1}) = z^{-n} G(z),$$

где G — многочлен с коэффициентами $\widetilde{g}_k = g_{n-k}$, расположенными в обратном порядке. Следовательно, многочлены G и G_n имеют одинаковые корни, а их старшие коэффициенты могут отличаться только знаком. Отсюда получается (4.1). □

4.2. Рекуррентные формулы для многочлена $G_n(\omega, \mu;\,\cdot\,)$. Заметим, что при условиях ($\mathcal{B}$) на σ_k строки T_j определителя (3.2) с номерами $j = \overline{2, n+1}$ имеют вид $T_j = (\sigma_{n-j+1}, \ldots, \sigma_1, \omega, \sigma_1, \ldots, \sigma_{j-1})$, где $\sigma_\mu = 1$ (если такой элемент содержится в T_j), все $\sigma_k = 0$ с номерами $k \neq 0, \mu$, а $\sigma_0 = \omega$ — вещественный вспомогательный параметр.

Запишем коэффициенты многочлена $G_n(\omega, \mu;\,\cdot\,)$ в виде строки

$$\mathcal{G} := (g_0,\, g_1, \ldots, g_n).$$

Хорошо известна следующая обобщенная формула Ньютона для скалярных произведений: $(T_j \cdot \mathcal{G}) = 0$, $j = \overline{2, n+1}$ (здесь нули получаются как сумма произведений алгебраических дополнений к элементам первой строки определителя (3.2) на соответствующие элементы другой строки j).

Далее, считая для удобства, что $g_k = 0$ с номерами $k < 0$ и $k > n$, перепишем эти равенства в развернутом виде (с заменой $k = n - j + 1$):

$$g_{k+\mu} + g_k \cdot \omega + g_{k-\mu} = 0, \qquad k = \overline{0, n-1}.$$

При $q = \overline{0, \mu - 1}$ эта система распадается на μ независимых подсистем

$$g_{q+\mu k} + \omega g_{q+\mu(k-1)} + g_{q+\mu(k-2)} = 0, \qquad 0 \leqslant q + \mu(k-1) \leqslant n - 1. \tag{4.2}$$

Введем рекуррентно вспомогательные многочлены $r_k = r_k(\omega)$:

$$r_{-1} = 0, \quad r_0 = 1, \quad r_k + \omega r_{k-1} + r_{k-2} = 0, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

С учетом равенств (4.2), (4.3) получается следующая лемма.

Лемма 4. *Коэффициенты многочлена $G_n(\omega,\mu;\,\cdot\,)$ при условиях $(\mathcal{B})$ на σ_k линейно выражаются через $g_0,\dots,g_{\mu-1}$ и имеют вид*

$$g_{q+\mu k}=g_q r_k,\qquad q=\overline{0,\mu-1},\quad k=-1,0,1,\dots\quad (q+\mu k\leqslant n).\tag{4.4}$$

Действительно, при $k=-1,0$ это выполняется по определению (с учетом того, что $g_k=0$ с номерами $k<0$), а при $k\geqslant 1$ получается по индукции (то есть при $k=k_0$ и $k=k_0+1$ равенства (4.4) подставляем в (4.2), откуда находим сдедующее равенство вида (4.4) при $k=k_0+2$).

Хорошо известно (см. [4]), что равенствами (4.3) при $\omega=-2x$ рекуррентно определяются многочлены Чебышева $U_s(x)$ второго рода (см. (1.7)). Точнее,

$$U_s(x)=r_s(-2x);\qquad r_s(\omega)=U_s\left(-\omega/2\right).\tag{4.5}$$

Явный вид таких многочленов [4]: $r_s(\omega)=(-1)^s\sum_{j=0}^{[s/2]}(-1)^jC_{s-j}^j\omega^{s-2j}$. Отсюда и из (4.5) видно, что

$$r_s(\omega)=(-1)^s r_s(-\omega),\quad r_s(\omega)=(-1)^sU_s\left(\omega/2\right).\tag{4.6}$$

Кроме того, из (4.5) следует, что многочлены r_s образуют ортонормированную систему в $L_2([-2,2])$ с весом $(2\pi)^{-1}\sqrt{4-\omega^2}$.

В дальнейшем важную роль играет многочлен

$$\mathcal{R}_{s-1}(\omega;t):=r_0(\omega)+r_1(\omega)t+\ldots+r_{s-1}(\omega)t^{s-1},\quad r_0(\omega)\equiv 1,\quad s\in\mathbb{N}.$$

4.3. О корнях многочлена $\mathcal{R}_{s-1}$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 5. *Все корни t_k многочлена $\mathcal{R}_{s-1}$, $s\geqslant 2$, различны и лежат на единичной окружности в том и только том случае, когда ω является корнем многочлена $r_s(\omega)=(-1)^sU_s\left(\omega/2\right)$, то есть $\omega\in\Omega_s$ (см. (1.6)).*

При $\omega=-2\cos\varphi_\alpha=2\cos\varphi_{s-\alpha+1}$ корни t_k составляют множество

$$\{t_k\}=\{\sqrt[s+1]{(-1)^\alpha}\}\setminus\{e^{i\varphi_\alpha},e^{-i\varphi_\alpha}\}.\tag{4.7}$$

Доказательство. При $x=-\omega/2$, $\varphi=\arccos x$ из (4.5) имеем:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1-x^2}\mathcal{R}_{s-1}(\omega;t)\\
&\qquad=\sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{s-1}t^kU_k\left(x\right)=\sum_{k=0}^{s-1}t^k\sin((k+1)\varphi)\\
&\qquad=\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{s-1}t^k\left(e^{i(k+1)\varphi}-e^{-i(k+1)\varphi}\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi}\frac{1-t^se^{is\varphi}}{1-te^{i\varphi}}-e^{-i\varphi}\frac{1-t^se^{-is\varphi}}{1-te^{-i\varphi}}\right)\\
&\qquad=\frac{t^{s+1}\sin(s\varphi)-t^s\sin((s+1)\varphi)+\sin(\varphi)}{t^2-2t\cos\varphi+1}=:P(t).
\end{aligned}$$

Для того, чтобы многочлен в числителе последней дроби имел различные корни t_k с $|t_k| = 1$ по лемме 3 необходимо (а в данном случае и достаточно) чтобы

$$\begin{cases}\sin(s+1)\varphi = 0,\\ \sin s\varphi = \sin\varphi\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}\sin(s+1)\varphi = 0,\\ \sin s\varphi = -\sin\varphi.\end{cases} \tag{4.8}$$

Решив эти две системы уравнений, получим (первой и второй системам соответствуют следующие первое и второе уравнения, а в третьем равенстве — знаки $+$ и $-$):

$$\cos\frac{s+1}{2}\varphi = 0 \quad \text{или} \quad \sin\frac{s+1}{2}\varphi = 0,$$

$$P(t) = \pm\delta\cdot\frac{t^{s+1}\pm 1}{t^2 - 2t\cos\varphi + 1}, \tag{4.9}$$

где $\delta = \sin(\varphi) \neq 0$. Здесь первое и второе уравнения имеют корни $\varphi = \varphi_\alpha$ с нечетными и четными α соответственно (см. (1.6)), а множество корней числителя P имеет вид $\{\sqrt[s+1]{(-1)^\alpha}\}$. Исключив из этого множества нули знаменателя P при $\varphi = \varphi_\alpha$, получим (4.7). $\square$

Отметим, что из ортогональности многочленов r_k, в частности, следует, что (вещественные) корни многочленов r_{s-1} и r_s попарно различны, так что $\deg\mathcal{R}_{s-1}(\omega; t) = s-1$ при любых ω, лежащих в достаточно малой окрестности множества Ω_s. Точнее, справедлива следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть $\omega_0 \in \Omega_s$. Тогда при достаточно малых $|\varepsilon|$ многочлен $\mathcal{R}_{s-1}(\omega_0+\varepsilon; t)$ имеет ровно $s-1$ различных корней $\{z_k(\varepsilon)\}$ и при $|\varepsilon| \to 0$ они стремятся к корням $\{z_k\}$ многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega_0; t)$ (то есть хаусдорфово расстояние между $\{z_k(\varepsilon)\}$ и $\{z_k\}$ стремится к нулю).*

4.4. О факторизации производящего многочлена. Пусть выполнено (1.5) и условия $(\mathcal{B})$ на σ_k. Из (4.4) получается:

$$G_{\mu s-1}(\omega,\mu;\, z) = (g_0 + g_1 z + \ldots + g_{\mu-1}z^{\mu-1})\cdot\mathcal{R}_{s-1}(\omega;\, z^\mu). \tag{4.10}$$

Покажем, что первый сомножитель может содержать лишь одно отличное от нуля слагаемое $g_{\mu-1}z^{\mu-1}$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 7. *В случае $n = \mu s - 1$, $\mu \geqslant 2$, $s \geqslant 2$, коэффициенты g_m производящего многочлена $G_n(\omega,\mu;\, z)$ равны нулю при $m = \overline{0,\mu-2}$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу, получающуюся удалением первой строки из матрицы в (3.2). Покажем, что ее столбцы $a_{k\mu}$ с номерами $k\mu$, $k = \overline{1,s}$, линейно зависимы. Отсюда и будет следовать утверждение леммы. Для этого запишем равную нулю линейную комбинацию $\sum x_{k\mu}a_{k\mu} = 0$

с неизвестными $x_{k\mu}$ в развернутом виде (сравним с (4.2), где $q=\mu$):

$$x_{(k+1)\mu}+\omega x_{k\mu}+x_{(k-1)\mu}=0, \quad x_0=0,\ x_\mu=1, \quad k=\overline{1,s-1}.$$

Отсюда и получается нетривиальная нулевая комбинация с числами $x_{k\mu}$, определяемыми рекуррентно, как и в (4.2). □

Из лемм 4 и 7 получается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $n=\mu s-1$, $\mu\geqslant 1$, $s\geqslant 2$ и выполнены условия $(\mathcal{B})$ на σ_k. Тогда коэффициенты производящего многочлена $G_n(\omega,\mu;\,z)$ имеют вид*

$$g_{\mu k-1}=g_{\mu-1}r_{k-1}, \qquad k=\overline{1,s},$$

остальные коэффициенты равны нулю и (4.10) *принимает вид*

$$G_n(\omega,\mu;\,z)=g_{\mu-1}(\omega)z^{\mu-1}\cdot\mathcal{R}_{s-1}(\omega;z^\mu). \tag{4.11}$$

Докажем вспомогательное утверждение о коэффициенте $g_{\mu-1}$.

Лемма 8. *В условиях предыдущей теоремы коэффициент $g_{\mu-1}(\omega)$ не равен тождественно нулю и является многочленом степени $s(\mu-1)$. В частности, $g_0=\pm1$.*

Доказательство. При $\omega\to\infty$ старшая относительно z степень определителя (3.2) равна $\omega^n(1+o(1))z^n$. Отсюда и из (4.11) получаем:

$$\omega^n(1+o(1))z^n=g_{\mu-1}(\omega)r_{s-1}(\omega)(1+o(1))z^n.$$

Сравнивая степени слева и справа, получаем нужное.

В случае $\mu=1$ (и условиях $(\mathcal{B})$ на σ_k) найдем алгебраическое дополнение к z^0 в (3.2). Его разложение по последней строке, содержащей единственный ненулевой элемент $\sigma_1=1$ в левом нижнем углу, дает определитель той же структуры, имеющий на единицу меньший размер. Далее все повторяется и по индукции находим $g_0=(-1)^{(n-1)n/2}\neq 0$. □

Замечание 3. Из (4.11) и теоремы Сильвестра–Любича, в частности, следует, что при $\mu\geqslant 2$ все решения задач $\mathcal{A}$ и $\mathcal{K}$ при условии (1.5) не являются $(\mathcal{B}'')$-регулярными (если они существуют).

Теорема 3. *При $n\geqslant 1$ и $\mu=1$ для $(\mathcal{B}'')$-регулярной разрешимости задачи* (1.4) (*а значит, и для разрешимости задачи $\mathcal{A}$*) *необходимо и достаточно условие $\omega\in\Omega_s$, где $s=n+1$. При*

$$\omega=-2\cos\varphi_\alpha, \quad \text{где} \quad \varphi_\alpha=\frac{\pi}{n+2}\alpha, \quad \alpha=\overline{1,n+1},$$

решение z_k $(k=\overline{1,n})$ системы (1.3) *составляет множество* (4.7) *и*

$$X_k=\frac{K}{n+2}\cdot\frac{z_k^2-2z_k\cos\varphi_\alpha+1}{z_k^{n+3}}=\frac{1}{n+2}\cdot(\omega+2\operatorname{Re}z_k)\,, \tag{4.12}$$

где $K = -\mathrm{sgn}(\sin(n+1)\varphi_\alpha)$, *причем* $\sum_{k=1}^{n} X_k = \omega$,

$$\text{все } X_k < 0, \text{ если } \quad \alpha = 1; \quad \text{все } X_k > 0, \text{ если } \quad \alpha = n+1. \tag{4.13}$$

Доказательство. Из леммы 8 и (4.11) имеем $G_n(\omega, 1;\, z) = \pm\mathcal{R}_n(\omega; z)$. Так что по лемме 5 все корни производящего многочлена различны и лежат на единичной окружности в том и только том случае, когда $\omega \in \Omega_{n+1}$. Поэтому первая часть теоремы получается из теоремы Сильвестра–Любича.

Значения X_k получаются из (2.4), если учесть, что знаменатель выражения (2.4) равен $z_k^2\mathcal{P}'(z_k)$, где $\mathcal{P} = \pm P/\delta$ — многочлен, определенный в (4.9) (с $s = n+1$ и $\varphi = \varphi_\alpha$). Числитель в (2.4) отличается знаком от свободного члена (± 1) многочлена $\mathcal{P}$ (по теореме Виета) и, следовательно, равен K (см. (4.8), где $\sin\varphi = \sin\varphi_\alpha > 0$). Во втором равенстве в (4.12) учитываем также, что $z_k^{n+2} = (-1)^\alpha$ (см. (4.7)) и $K = -\mathrm{sgn}(\sin(n+1)\varphi_\alpha) = (-1)^\alpha$.

Докажем (4.13). Рассмотрим случай $\alpha = 1$ и $\omega = -2\cos\varphi_1$. Покажем, что все X_k в (4.12) отрицательны. Действительно, в этом случае множество $\{z_k\}$ в (4.7) имеет вид

$$E = \left\{ e^{\pm\frac{2m+1}{n+2}\pi i} \right\}, \quad m = 1, \ldots, [n/2]$$

при четных n и $E \cup \{-1\}$ при нечетных. Таким образом, все $2\mathrm{Re}\, z_k < |\omega|$, $\omega + 2\,\mathrm{Re}\, z_k < 0$. В случае $\alpha = n+1$ выкладки аналогичны. □

§5. Разрешимая задача в нерегулярном случае

5.1. Регуляризация. Первый способ. Рассмотрим систему (1.4) в общем случае без каких-либо условий на $\{X_k\}$, $\{z_k\}$, $\{\sigma_k\}$, ω, считая лишь $z_k \neq 0$. Эта система может быть разрешимой, но не $(\mathcal{B}')$-регулярной (то есть некоторые X_k равны нулю). Сделав замену переменных как в (3.1), ее можно переписать в виде переопределенной совместной системы моментов с $m < n$:

$$\sum_{k=1}^{m} Z_k z_k^l = S_l, \qquad l = \overline{0, 2n-1}, \quad Z_k = X_k z_k^{-n+1}, \quad S_l = \sigma_{1-n+l}, \tag{5.1}$$

где все Z_k, z_k отличны от нуля, а z_k попарно различны (в противном случае чисто неизвестных в (5.1) будет меньше m). Отметим, что решение совместной системы (5.1) единственно. Действительно, достаточно взять подсистему уравнений с номерами $l = \overline{0, 2m-1}$ и воспользоваться теоремой Сильвестра–Любича.

Итак, пусть система (5.1) совместна при $m < n$. В этом случае производящий многочлен $G_n(\{\sigma_k\}; z)$, построенный по формуле (3.2), тождественно равен нулю. Это следует из леммы 2. Действительно, достаточно дополнить систему (5.1) до регулярной добавлением к ее обеим частям степенных слагаемых $Z_k z_k^l$ с малыми $Z_k = \varepsilon$:

$$\sum_{k=1}^{m} Z_k z_k^l + \varepsilon \sum_{k=m+1}^{n} z_k^l \equiv \xi_l(\varepsilon); \quad \xi_l(\varepsilon) = S_l + O(\varepsilon),$$

где все z_k различны и фиксированы. Тогда при $\varepsilon \to 0$ коэффициенты соответствующего производящего многочлена в силу (3.3) стремятся к нулю, они же в силу формулы (3.2) при $\xi_l(\varepsilon) \to S_l$ стремятся и к коэффициентам многочлена G_n. Отсюда получается нужное.

Далее, при малых $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon_k \in (0, \varepsilon)$ дополним систему (5.1) до регулярной добавлением к ее обеим частям степенных слагаемых ε_k^l:

$$\sum_{k=1}^{m} Z_k z_k^l + \sum_{k=1}^{n-m} \varepsilon_k^l \equiv \xi_l; \quad \xi_l = \xi_l(\{\varepsilon_k\}) = S_l + O(\varepsilon),$$

где все z_k и ε_k попарно различны и отличны от нуля. Для этой системы построим производящий многочлен по формуле (3.3):

$$G_n(\{\xi_l\}; z) = (-1)^n K(\{\varepsilon_k\}) \cdot \prod_{k=1}^{m} Z_k \cdot \prod_{k<j} (z_k - z_j)^2 \cdot \prod_{k=1}^{m} (z - z_k) \cdot \prod_{k=1}^{n-m} (z - \varepsilon_k),$$

где

$$K(\{\varepsilon_k\}) = \prod_{k<j} (\varepsilon_k - \varepsilon_j)^2 \cdot \prod_{k=1}^{m} \prod_{j=1}^{n-m} (z_k - \varepsilon_j)^2.$$

Положим

$$\begin{aligned} G_n^*(z) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{G_n(\{\xi_l\}; z)}{\prod\limits_{k<j} (\varepsilon_k - \varepsilon_j)^2} \\ &= (-1)^n \prod_{k=1}^{m} Z_k \cdot \prod_{k<j} (z_k - z_j)^2 \cdot \prod_{k=1}^{m} z_k^{2(n-m)} \cdot z^{n-m} \prod_{k=1}^{m} (z - z_k). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Если переопределенная система* (5.1) *совместна* (*при отличных от нуля* z_k), *то необходимо* $G_n(\{\sigma_k\}; z) \equiv 0$, *кроме того*, z_k *являются ненулевыми корнями многочлена* $G_n^*(z)$.

Отсюда получается следующий **алгоритм** решения нерегулярных совместных систем (5.1) с отличными от нуля z_k.

Надо заменить S_l на $S_l + \sum_{k=1}^{s} \varepsilon_k^l$, $l = \overline{0, 2n-1}$, где s — наименьшее натуральное число, при котором соответствующий производящий многочлен отличен от тождественного нуля. Затем, вычислив предел (5.2), найти многочлен $G_n^*(z)$ и его ненулевые корни z_k. Неизвестные Z_k находятся из системы линейных относительно Z_k уравнений (5.1).

5.2. Регуляризация. Второй способ. Приведем некоторые условия ($\mathcal{B}$)-разрешимости системы (5.1) (а значит, разрешимости задачи $\mathcal{A}$ в случае (1.5).

Теорема 5. *При $n = s\mu - 1$, $\mu \geqslant 2$, $s \geqslant 2$ для ($\mathcal{B}$)-разрешимости переопределенной системы* (5.1) *необходимо $g_{\mu-1}(\omega) = 0$.*

Доказательство следует непосредственно из теорем 2 и 4. Мы докажем, что условие $g_{\mu-1}(\omega) = 0$ является и достаточным в случае $\mu = 2$. Для этого понадобится следующая лемма.

Лемма 9. *В условиях теоремы* 2 *имеем $g_{\mu-1}(\omega) = (-1)^{s+1} r_s(\omega)$ при $\mu = 2$, то есть*

$$G_n(\omega, 2;\, z) = (-1)^{s+1} r_s(\omega) \cdot z \cdot \mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^2), \quad n = 2s - 1. \tag{5.3}$$

Доказательство. Минор M_n (размера $n \times n$, $n = 2s-1$), дополнительный к z^1 в (3.2), имеет структуру, позволяющую упростить его путем определенного “прореживания”.

На шаге $k = 1$ строка минора M_n с номером $n - 1$ содержит единственный ненулевой элемент с номером $(n-1, 3)$, равный единице. Через M_{n-1} обозначим дополнительный к ней минор (размера $(n-1) \times (n-1)$). Далее выполняются сходные операции. На шаге $k \geqslant 2$ строка $(n-2k+1)$ минора M_{n-k+1} содержит единственный ненулевой элемент с номером $(n - 2k + 1, 2 + k)$, равный единице. Через M_{n-k} обозначим дополнительный к ней минор. На последнем шаге $k = s - 1$ строка минора M_{s+1} с номером 2 содержит единственный ненулевой элемент с номером $(2, s + 1)$, равный единице. Через M_s обозначим дополнительный к ней минор. Учтем знаки, с которыми берутся миноры в указанном разложении и, просуммировав номера $1 + \sum_{k=1}^{s-1}((n-2k+1) + (2+k))$, получим $g_1(\omega) = -(-1)^{s(s-1)/2} M_s$.

Заметим, что полученный определитель M_s зеркально симметричен к трехдиагональному определителю J_s Якоби с постоянными элементами ω на главной диагонали и единицами на двух прилегающих диагоналях (то есть столбцы определителей M_s, J_s расположены в обратном порядке, элементы $\alpha_{k,l}$ определителя J_s имеют вид $\alpha_{k,k} = \omega$, $\alpha_{k,k+1} = 1$, $\alpha_{k+1,k} = 1$, а остальные элементы равны нулю). Очевидно, $M_s = (-1)^{s(s-1)/2} J_s$, так что $g_1 = -J_s$. Для J_k хорошо известна рекуррентная формула (см., напр., [19]):

$$J_k = \omega J_{k-1} - J_{k-2}, \qquad J_{-1} = 0, \quad J_0 = 1, \quad k = \overline{1, s}.$$

Учитывая (4.3), (4.6), видим, что

$$J_s(\omega) = r_s(-\omega) = (-1)^s r_s(\omega) = -g_1(\omega). \qquad \square$$

Теорема 6. *При* $\mu = 2$, $n = s\mu - 1$ $(s \geqslant 2)$ *для* $(\mathcal{B})$*-разрешимости системы* (5.1) (*а значит и для разрешимости задачи* $\mathcal{A}$ *необходимо и достаточно условие* $\omega \in \Omega_s$. *При этом* $m = n - 1$, *все* z_k *попарно различны и являются корнями многочлена* $\mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^2)$, *а* Z_k *отличны от нуля и находятся из первых* m *уравнений системы* (5.1) (*явные формулы имеют вид* (1.8), (1.9) *и получены в разделе* 5.3).

Доказательство. Необходимость условия $r_s(\omega) = 0$ вытекает из леммы 8 и теоремы 5. Докажем достаточность. Пусть ω — корень многочлена r_s, тогда $r_{s-1}(\omega) \neq 0$ (учитываем ортогональность многочленов) и из (4.3) получаем

$$\omega = -r_{s-2}(\omega)/r_{s-1}(\omega), \quad \omega \in \Omega_s. \tag{5.4}$$

Рассмотрим варьированную задачу (3.1), заменив ω на $\omega + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. В силу (5.4) и леммы 6 при $\varepsilon \to 0$ корни многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega + \varepsilon; z^2)$ стремятся к корням z_j $(j = \overline{2, 2s-1})$ многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^2)$.

Корни z_j попарно различны и лежат на единичной окружности; они составляют множество (4.7), где следует заменить t_k на t_k^2 (см. также (1.8) при $\mu = 2$). Поэтому многочлен $G_n(\omega + \varepsilon, 2;\, z)$ при достаточно малых ε имеет $n = 2s - 1$ различных корней $\xi_k(\varepsilon)$ $(k = \overline{1, n})$, один из которых, пусть ξ_1, равен нулю (см. (5.3)). Остальные корни $\xi_k(\varepsilon) \to z_k$ $(k = \overline{2, n})$ при $\varepsilon \to 0$. В частности, из (4.7) следует, что $|\xi_k(\varepsilon) - \xi_m(\varepsilon)| \geqslant \mathrm{const} > 0$, $k \neq m$, при достаточно малых ε.

Получается $(\mathcal{B}')$-регулярная система (3.1). Совершая предельный переход при $\varepsilon \to 0$, видим, что $Z_k(\varepsilon) \to Z_k = Z_k(0)$ с некоторыми конечными $Z_k(0)$, поскольку определитель Вандермонда первых n уравнений системы (3.1) отделен от нуля и стремится к отличной от нуля константе.

Остается показать, что $Z_1(0) = 0$. Найдем $Z_1(\varepsilon)$ из первых n уравнений варьированной системы (3.1), воспользовавшись формулой (2.3). Тогда $Z_1(\varepsilon) = (\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{S})$, где $\mathcal{S} = (S_0, \ldots, S_{n-1})$ и $S_{n-1} = \omega + \varepsilon$, $S_{n-3} = 1$ (остальные S_k равны нулю). Положим

$$\rho_2^{(1)}(\{z_k\}) = \sum_{2 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant n} z_{j_1} z_{j_2}, \qquad \rho_2^{(1)}(\{\xi_k\}) = \sum_{2 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant n} \xi_{j_1} \xi_{j_2}, \quad \xi_k = \xi_k(\varepsilon).$$

Из (5.4) имеем $\rho_2^{(1)}(\{z_k\}) = -\omega$, откуда с учетом (2.3) при $\varepsilon \to 0$ находим:

$$Z_1(\varepsilon) = \frac{\rho_2^{(1)}(\{\xi_k\}) + (\omega + \varepsilon)}{\prod\limits_{k=2}^{n} (\xi_1 - \xi_k)} = \frac{\varepsilon + (\rho_2^{(1)}(\{\xi_k\}) - \rho_2^{(1)}(\{z_k\}))}{\prod\limits_{k=2}^{n} (\xi_1 - \xi_k)} \to 0.$$

Итак, варьированная система (3.1) в пределе дает $(\mathcal{B})$-разрешимую систему (5.1) с $m = n - 1$. Остается заметить, что правая часть подсистемы из первых m уравнений системы (5.1) содержит лишь один отличный от нуля элемент $S_{n-3} = 1$, поэтому по формулам Крамера все $Z_k \neq 0$ как отношения определителей типа Вандермонда. $\square$

5.3. Регуляризация. Третий способ. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим систему (3.1) с условиями $(\mathcal{B})$ на $S_k = \sigma_{1-n+k}$. Проведем ее регуляризацию, заменив $S_{2n-1} = \sigma_n = 0$ на $\sigma_n = \varepsilon$ с некоторым параметром $\varepsilon \in \mathbb{C}$ (остальные S_k не изменяются). В определителе (3.2) при этом изменится только один элемент в правом нижнем углу. Учитывая (4.11) и то, что новый производящий многочлен $\widehat{G}(\varepsilon, \omega, \mu; z)$ зависит от ε линейно, получим:

$$\widehat{G}(\varepsilon, \omega, \mu; z) = \varepsilon \mathcal{T}(\omega, \mu; z) + g_{\mu-1}(\omega) z^{\mu-1} \cdot \mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^{\mu}). \tag{5.5}$$

Найдем явный вид многочлена $\mathcal{T}(z) = \mathcal{T}(\omega, \mu; z)$.

Лемма 10. *Верна формула*:

$$\mathcal{T}(z) = \gamma(\omega) z^{(s-1)\mu} \mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^{-\mu}), \quad \mu \geqslant 2, \tag{5.6}$$

где $\gamma(\omega)$ — некоторый многочлен, отличный от тождественного нуля. В частности, при $\gamma(\omega) \neq 0$ многочлен $\mathcal{T}(z)$ имеет корни, обратные по отношению к корням многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^{\mu})$.

Доказательство. Многочлен $\mathcal{T}$ является алгебраическим дополнением в определителе (3.2) к элементу, находящемуся в правом нижнем углу. Его матрицу обозначим через $B = (b_{j,k})$ $(k = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n})$. Построим далее матрицу $A = (a_{j,k})$, у которой столбцы и строки зеркально симметричны по отношению к столбцам и строкам матрицы B (поворот матрицы B на 180°; точнее, $a_{j,k} = b_{n+1-j,n+1-k}$). Заметим, что если перенести последнюю строку (со степенями z^j) матрицы A на первое место и формально заменить в ней z^k на z^{n-1-k} $(k = \overline{0, n-1})$, то получится матрица той же структуры, что в (3.2), но на единицу меньшего размера (при условии $(\mathcal{B})$ на σ_k). Это означает, что $\det A = (-1)^{n-1} z^{n-1} G_{n-1}(\omega, \mu; 1/z)$.

Далее, коэффициенты $\widetilde{g}_{m+k\mu}$ многочлена $G_{n-1}(\omega, \mu; \xi)$, $\xi = 1/z$, равны нулю при $m = \overline{0, \mu-3}$, $k \in \mathbb{N}$. Это доказывается как и в лемме 7, но в данном случае линейно зависимы столбцы с номерами $k\mu - 1$, $k = \overline{1,s}$. Отсюда и из равенств (4.4) аналогично (4.11) для коэффициентов многочлена G_{n-1} получаем $\widetilde{g}_{\mu k-2} = \widetilde{g}_{\mu-2} r_{k-1}$ при $k = \overline{1,s}$ и, следовательно,

$$\det A = (-1)^{n-1} \xi^{1-n} G_{n-1}(\omega, \mu; \xi) = (-1)^{n-1} \widetilde{g}_{\mu-2} \xi^{1-n} \xi^{\mu-2} \cdot \mathcal{R}_{s-1}(\omega; \xi^{\mu}),$$

где $\widetilde{g}_{\mu-2}(\omega)$ — многочлен, не равный тождественно нулю (поскольку при $\omega \to \infty$ старшее слагаемое в $G_{n-1}(\omega, \mu; \xi)$ имеет вид $\pm\omega^{n-1}(1 + o(1))\xi^{n-1}$). Учитывая, что $\mathcal{T}$ отличается от $\det A$ только знаком, получаем нужное. $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 1 в случае $\mu \geqslant 2$ (случай $\mu = 2$ см. также в теореме 6).

Доказательство. Пусть $n = s\mu - 1$ $(s \geqslant 2,\ \mu \geqslant 2)$, $\omega \in \Omega_s$. Тогда $r_s(\omega) = 0$, $r_{s-1}(\omega) \neq 0$ (учитываем ортогональность многочленов). Выберем последовательность $\{\omega_k\}$, $\omega_k \to \omega$ так, чтобы $g_{\mu-1}(\omega_k) \neq 0$, $\gamma(\omega_k) \neq 0$, $r_{s-1}(\omega_k) \neq 0$. По лемме 6 корни многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega_k; z^\mu)$ сходятся к корням многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^\mu)$ (попарно различным и лежащим на единичной окружности симметрично относительно действительной оси, см. (4.7)). Из (5.6) следует, что корни многочлена $\mathcal{T}(\omega, \mu; z)$ также сходятся к корням многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^\mu)$. Далее, положим $\alpha_k = g_{\mu-1}(\omega_k) r_{s-1}(\omega_k)$, $N_k(z) = \mathcal{R}_{s-1}(\omega_k; z^\mu)/r_{s-1}(\omega_k)$, так что (см. (5.5))

$$\widehat{G}_k(z) := \widehat{G}(\varepsilon_k, \omega_k, \mu; z) = \varepsilon_k \mathcal{T}(\omega_k, \mu; z) + \alpha_k z^{\mu-1} \cdot N_k(z),$$

причем параметр ε_k выбран из условия $\varepsilon_k \mathcal{T}(\omega_k, \mu; z) = -2^{-1}\alpha_k M_k(z)$, где M_k— унитарные многочлены (с единичными старшими коэффициентами). Тогда

$$\widehat{G}_k(z) \cdot \alpha_k^{-1} = (z^{\mu-1} - 2^{-1}) N_k(z) + 2^{-1}(N_k(z) - M_k(z)),$$

где M_k, N_k— унитарные многочлены степени $\mu(s-1)$, корни которых при $k \to \infty$ сходятся к корням многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^\mu)$. Значит, $N_k(z) - M_k(z)$ равномерно стремится к нулю на любом компактном множестве. Поэтому по теореме Руше многочлены $\widehat{G}_k$ при достаточно больших $k \geqslant k_0$ имеют $n = s\mu - 1$ различных корней, которые сходятся к $\sqrt[\mu-1]{1/2}$ и корням многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^\mu)$. Пусть для определенности корни $z_1^{(k)}, \ldots, z_{\mu-1}^{(k)}$ сходятся к $\sqrt[\mu-1]{1/2}$, а остальные корни $z_\mu^{(k)}, \ldots, z_n^{(k)}$ сходятся к корням $z_1, \ldots, z_m$, $m = n - (\mu - 1)$, многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^\mu)$.

Получается последовательность $(\mathcal{B}')$-регулярных систем (3.1) с производящими многочленами $\widehat{G}_k$ и решениями $\{Z_j^{(k)}\}$, $\{z_j^{(k)}\}$. Покажем, что $Z_j^{(k)} \to 0$ при $k \to \infty$ для номеров $j = \overline{1, \mu - 1}$. Действительно, возьмем, к примеру, $j = 1$. Первые n уравнений варьированной системы (3.1) имеют вид:

$$\left\{\begin{array}{ccc} Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n & = & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ Z_1 z_1^{n-\mu-1} + Z_2 z_2^{n-\mu-1} + \ldots + Z_n z_n^{n-\mu-1} & = & S_{n-1-\mu} = 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ Z_1 z_1^{n-1} + Z_2 z_2^{n-1} + \ldots + Z_n z_n^{n-1} & = & S_{n-1} = \omega_k, \end{array}\right. \tag{5.7}$$

где все не указанные S_k равны нулю. По формуле (2.3) (где следует заменить формально σ_k на S_{k-1}, $k = 1, \ldots, n$, для решений системы (5.7) находим:

$$Z_1^{(k)} = \frac{\omega_k + (-1)^\mu \rho_\mu(z_2^{(k)}, \ldots, z_n^{(k)})}{\prod\limits_{j=2}^{n}(z_1^{(k)} - z_j^{(k)})} = \frac{b_k + a_k}{\prod\limits_{j=2}^{n}(z_1^{(k)} - z_j^{(k)})},$$

где

$$b_k = \omega + (-1)^\mu \rho_\mu(z_\mu^{(k)}, \ldots, z_n^{(k)}),$$
$$a_k := (\omega_k - \omega) + (-1)^\mu \sum_{l=1}^{\mu-2} \rho_l(z_2^{(k)}, \ldots, z_{\mu-1}^{(k)})\rho_{\mu-l}(z_\mu^{(k)}, \ldots, z_n^{(k)}).$$

При $\mu = 2$ последняя сумма считается равной нулю. По теореме Виета для многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^\mu)$ имеем (см. (5.4)):

$$\omega + (-1)^\mu \rho_\mu(z_1, \ldots, z_m) = 0, \quad \rho_{\mu-l}(z_1, \ldots, z_m) = 0, \quad l = \overline{1, \mu-2}.$$

Поэтому, учитывая, что $z_{\mu+j-1}^{(k)} \to z_j$ и $|z_1^{(k)} - z_j^{(k)}| \geqslant \mathrm{const} > 0$ при $j \neq 1$, получаем $b_k \to 0$, $a_k \to 0$, $Z_1^{(k)} \to 0$ $(k \to \infty)$.

По тем же формулам получается и сходимость $Z_{j+\mu-1}^{(k)}$ к некоторым конечным Z_j, $j = \overline{1,m}$ $(m = n - (\mu - 1))$. Для определения Z_j остается решить первые m уравнений предельной системы вида (5.1). В такой системе столбец свободных членов содержит единственный ненулевой элемент $S_{n-1-\mu} = 1$, находящийся на предпоследнем месте. По формуле (2.3) получается:

$$Z_k = -\frac{\sum\limits_{j\neq k} z_j}{\prod\limits_{j\neq k}(z_k - z_j)} = \frac{z_k}{\prod\limits_{j\neq k}(z_k - z_j)}, \quad k = \overline{1,m},$$

во втором равенстве учитывается, что $\sum_{j=1}^m z_j = 0$ (многочлен $\mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^\mu)$ степени $n - \mu + 1$ не содержит слагаемого с $z^{n-\mu}$ при $\mu \geqslant 2$).

Пусть $\omega = -2\cos\varphi_\alpha$. Тогда $z_1, \ldots, z_m$, являясь корнями $\mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^\mu)$, находятся по формулам (1.8) (см. (4.7)).

Далее, заметим, что знаменатель d_k в Z_k равен $(\mathcal{P}(z^\mu))'$ при $z = z_k$, где $\mathcal{P}(t)$ получается делением на $\pm\delta$ из многочлена, определенного в (4.9) при $\varphi = \varphi_\alpha$. Отсюда

$$d_k = \frac{(s+1)\mu z_k^{\mu s+\mu-1}}{z_k^{2\mu} - 2z_k^\mu \cos\varphi_\alpha + 1}, \quad X_k = \frac{z_k}{d_k} = \frac{1}{(s+1)\mu}\frac{z_k^{2\mu} - 2z_k^\mu\cos\varphi_\alpha + 1}{z_k^\mu},$$

и получено (1.9). Итак, в пределе получаем (5.1) при $l = \overline{0, 2n-2}$ и $m = n+1-\mu$. Последнее равенство в (5.1) здесь приходится исключить, поскольку из приведенного доказательства предел $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k$ не определяется. Но оно легко проверяется непосредственной подстановкой решения (на этом техническом шаге не останавливаемся).

Неравенства (1.10) следуют непосредственно из формул (1.8) и (1.9) (см. также доказательство теоремы 3). $\square$

Замечание 4. В силу равенства $z_k^\theta = (-1)^\alpha$, $\theta := (s+1)\mu = n+\mu+1$, нулевые степенные суммы $\sum_k X_k z_k^\beta$ в (1.3) порядка β остаются нулевыми при замене β на $\beta + \theta\, k$, $k \in \mathbb{N}$.

Следовательно, отличными от нуля могут быть лишь степенные суммы порядка (1.11). Из этого следует (см. представление АФО в (2.2)), что формула (1.2) при $\mu \geqslant 2$ верна и для сходящихся тригонометрических рядов, в которых отсутствуют гармоники с номерами (1.11).

Утверждения теоремы 1 доказаны при $\mu \geqslant 2$. При $\mu = 1$ их доказательство дано в теореме 3, а при $\mu = 2$ получены более точные результаты в теореме 6 (за исключением явных формул решения).

5.4. Доказательство следствий теоремы 1. Применим (1.12) в случае $\omega = \omega_{s,1}$ и $\omega = \omega_{s,s} = -\omega_{s,1}$. Тогда, учитывая, что все X_k одного знака (см. (1.10)), по неравенству Минковского получим (1.13):

$$\| \pm a_0\, \omega + \tau_\mu \|_p = \| H_m(T_n, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; t) \|_p \leqslant \|T_n\|_p \left| \sum_{j=1}^{n} X_j \right| = |\omega| \|T_n\|_p,$$

где $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L_p[0,2\pi]}$, $m = n-\mu+1$. Другие неравенства в следствии 3, очевидно, получаются из (1.12) при $\omega = \pm\omega_{s,s}$. Утверждение о множителе ω следует из примера $(\alpha + \cos t)^n$, $\alpha > 0$. Здесь легко проверить, что $a_0 \sim \alpha^n$ при $\alpha \to +\infty$ и, значит, отношение левой и правой частей в первом неравенстве стремится к единице.

Первое неравенство в (1.14) получается так (при $\omega = \omega_{s,s}$ все $X_j > 0$):

$$a_0\, \omega + \tau_\mu(t) = H_m(T_n, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; t) \geqslant \min_x T_n(x) \sum_{j=1}^{n} X_j = \omega \min_x T_n(x).$$

Остается выбрать t так, чтобы первое выражение в цепочке принимало наименьшее значение. Из первого неравенства в (1.14), очевидно, следует второе.

Равенство в (1.14) для многочлена (1.15) следует из того, что в правой части (1.12) при $t = 0$ все слагаемые обнуляются. Наконец, (1.16) имеет место для многочленов $S_n(t) = (1+\cos t)^n$, $n > 2\mu$. Действительно, сделав замену $e^{it} = z$, $\cos t = 2^{-1}(z+z^{-1})$, по теореме о вычетах найдем:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_n(t)\,dt = \frac{1}{n!2^n}\left((z+1)^{2n}\right)^{(n)}\Big|_{z=0} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n};$$

$$a_\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S_n(t)\cos\mu t\,dt = \frac{1}{(n+\mu)!2^n}\left((z^{2\mu}+1)(z+1)^{2n}\right)^{(n+\mu)}\Big|_{z=0}$$

$$= \frac{1}{(n+\mu)!2^n}\left(\frac{(2n)!}{(n-\mu)!} + \sum_{\alpha=0}^{2\mu}(-1)^\alpha C_{2\mu}^\alpha \frac{(2n+\alpha)!}{(n+\alpha-\mu)!}\right)$$

$$= \frac{2^{1-n}}{(n+\mu)!}\frac{(2n)!}{(n-\mu)!} = \frac{4}{2^n}\frac{(2n-1)!}{((n-1)!)^2}\frac{\prod_{k=1}^{\mu-1}(n-k)}{\prod_{k=1}^{\mu}(n+k)},$$

$$\frac{a_\mu}{2a_0} = \frac{\prod_{k=0}^{\mu-1}(n-k)}{\prod_{k=1}^{\mu}(n+k)} \to 1, \quad n\to\infty.$$

При вычислении a_μ для нахождения производной учтено равенство

$$(z^{2\mu}+1)(z+1)^{2n} = ((\zeta-1)^{2\mu}+1)\zeta^{2n} = \zeta^{2n} + \sum_{\alpha=0}^{2\mu}(-1)^\alpha C_{2\mu}^\alpha \zeta^{2n+\alpha}, \quad \zeta = z+1,$$

кроме того, в четвертом равенстве факториальная сумма вычисляется по формуле из [20, 513 с., формула 7].

Список литературы

[1] Grenander U., Szego G., *Toeplitz forms and their applications*, 2nd ed., Chelsea Publ. Co., New York, 1984.

[2] Pisarenko V. F., *The retrieval of harmonics from a covariance function*, Geophys. J. R. Astr. Soc. **33** (1973), 347–366.

[3] Beylkin G., Monzón L., *On generalized gaussian quadratures for exponentials and their applications*, Appl. and Comput. Harmon. Anal. **12** (2002), no. 3, 332–373.

[4] Суетин П. К., *Классические ортогональные многочлены*, 3-е изд., перераб. и доп., ФИЗМАТЛИТ, М., 2005.

[5] Prony R., *Sur les lois de la Dilatabilité des fluides élastiques et sur celles de la Force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alkool, à différentes températures*, J. de l'Ecole Polytech. **2** (1795), no. 4, 28–35.

[6] Полиа Г., Сеге Г., *Задачи и теоремы из анализа.* Ч. 2, Наука, М., 1978.

[7] Гашков С. Б., *Неравенство Фейера–Эгервари–Сасса для неотрицательных тригонометрических многочленов*, Мат. просвещение **9** (2005), 69–75.

[8] Стечкин С. Б., *О некоторых экстремальных свойствах положительных тригонометрических полиномов*, Мат. заметки **7** (1970), №4, 411–422.

[9] Арестов В. В., *Об экстремальных свойствах неотрицательных тригонометрических полиномов*, Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН **1** (1992), 50–70.

[10] Белов А. С., *Некоторые свойства и оценки для неотрицательных тригонометрических полиномов*, Известия РАН. Сер. мат. **67** (2003), №4, 3–20.

[11] Белов А. С., *Об оценках сверху частных сумм тригонометрического ряда через оценки снизу*, Мат. сб. **183** (1992), №11, 55–74.

[12] Danchenko V. I., Danchenko D. Ya., *Extraction of pairs of harmonics from trigonometric polynomials by phase-amplitude operators*, J. Math. Sci. (N. Y.) **232** (2018), no. 3, 322–337.

[13] Chunaev P., Danchenko V., *Approximation by amplitude and frequency operators*, J. Approx. Theory **207** (2016), 1–31.

[14] Данченко В. И., Додонов А. Е., *Оценки экспоненциальных сумм. Приложения*, Пробл. мат. анал. **67** (2012), 23–30.

[15] Sylvester J. J., *On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants*, Phil. Magazine **2** (1851), 391–410.

[16] Kung J. P. S., *Canonical forms of binary forms: variations on a theme of Sylvester*, Invariant Theory and Tableaux (Minneapolis, MN, 1988), IMA Vol. Math. Appl., vol. 19, Springer, New York, 1990, pp. 46–58.

[17] Lyubich Y. I., *The Sylvester–Ramanujan system of equations and the complex power moment problem*, Ramanujan J. **8** (2004), no. 1, 23–45.

[18] Boley D., Luk F., Vandevoorde D., *Vandermonde factorization of a Hankel matrix*, Scientific Computing (Hong Kong, 1997), Springer, Singapore, 1997, pp. 27–39.

[19] Прасолов В. В., *Задачи и теоремы линейной алгебры*, Наука, М., 1996.

[20] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., *Интегралы и ряды. Элементарные функции*. Т. 1, 2-е изд., исправ., ФИЗМАТЛИТ, М., 2002.

ФГБОУ ВО Владимирский
государственный университет
им. А.Г. и Н.Г. Столетовых,
ул. Горького, 87
600000, Владимир, Россия
E-mail: darya.vasilchenkova@mail.ru
E-mail: vdanch2012@yandex.ru

Поступило 24 сентября 2018 г.