Заседания Московского математического общества, *УМН*, 1978, том 33, выпуск 5, 161–166

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

ЗАСЕДАНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 7 февраля 1978 г.

1. А. И. Кострикин «Проблемы конечности в теории групп и теории колец».

Проблемы конечности в широком смысле слова типичны для математики. Даже в пределах алгебры трудно перечислить все те теоремы, которые формулируются (могут быть сформулированы) как утверждения о конечности изучаемых объектов или связанных с ними числовых параметров. В докладе прослежена эволюция проблем бернсайдовского типа (включая проблему А. Г. Куроша), их роль в развитии алгебры и современное состояние.

2. Л. А. Скорняков «Курош как руководитель семинара по общей алгебре».

В докладе освещены некоторые из направлений алгебраических исследований, интерес к которым в Советском Союзе возник под влиянием деятельности А. Г. Куроша как руководителя семинара: теория радикала, неассоциативные кольца, категории, универсальные алгебры.

3. Воспоминания об А. Г. Куроше.

Заседание 14 февраля 1978 г.

1. В. Ф. Лазуткин «Выпуклый биллиард и собственные функции оператора Лапласа».

Как выглядят собственные функции с большими номерами для оператора Лапласа в области R^n? В случае $n > 1$ до недавнего времени практически ничего не было известно, исключая несколько явно решаемых случаев. Эта задача является трудной уже в случае выпуклой области с гладкой границей. В докладе рассказано о результатах, полученных ленинградскими математиками в этой задаче. Для отдельных серий собственных чисел и собственных функций, имеющих положительную плотность в множестве всех собственных чисел, указаны асимптотические формулы, связанные с устойчивыми периодическими и квазипериодическими траекториями биллиардного шара, отражающегося от стенки, расположенной вдоль границы области. Такой биллиард, вообще говоря, не является вполне интегрируемой системой, что и объясняет возникающие здесь трудности. Для этих серий справедлива асимптотическая оценка, аналогичная известной оценке Г. Вейля.

Заседание 28 февраля 1978 г.

1. Ю. И. Манин «Калибровочные поля и алгебраическая геометрия».

В последние годы в физике интенсивно разрабатываются модели фундаментальных взаимодействий, основанные на понятии калибровочного поля. Классическое (неквантовое) калибровочное поле есть связность на главном или векторном расслоении над пространством-временем, что открывает дорогу современным дифференциально-геометрическим и алгебро-геометрическим методам исследования. В докладе рассказано о последних работах Атьи, Дринфельда и докладчика, посвященных описанию одного класса калибровочных полей — инстантонных полей Янга — Миллса.

Заседание 14 марта 1978 г.

1. К. Аомото (Япония) «Вариационная формула Адамара и уравнение Шрёдингера для эвклидовой модели многообразия».

В течение последних десяти лет были сформулированы так называемые модели «струн» для описания дуальных резонансных моделей в теории элементарных частиц. В этих моделях функции Грина описываются с помощью функций Неймана из классической теории потенциала. Доклад посвящен выводу уравнения Шрёдингера для моделей струн и его обобщению на случай многомерных многообразий на основании классической вариационной формулы Адамара.

Заседание 21 марта 1978 г.

1. В. П. Паламодов «Каустики, лакуны и деформация комплексных пространств».

Развивая идеи И. Г. Петровского, Л. Гординг недавно предложил метод исследования C^∞-лакун (резких фронтов) для фундаментальных решений линейных гиперболических уравнений с переменными коэффициентами, основанный на рассмотрении парных интегралов Фурье — Хёрмандера. Метод Хёрмандера — Гординга открывает возможность приложения теории деформаций особых точек комплексных пространств к детальному исследованию решений в окрестности многомерных каустик. Оказывается, что закон преобразования лакун для волны, проходящей через каустику, выражается через геометрию ее фронта, а сингулярность диффузного фронта — в терминах касательной «супералгебры» Ли соответствующей особой точки комплексного пространства.

Заседание 28 марта 1978 г.

1. В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский «Регулярные представления алгебр с общими соотношениями коммутации».

Исследуются алгебры, задаваемые набором соотношений специального вида. Рассматриваемый класс алгебр включает в себя, в частности, алгебры Ли, алгебры Йордана, супералгебры Ли и их обобщения, алгебры с нелинейными коммутационными соотношениями, «возмущения» алгебр Ли. Для этих алгебр строится регулярное представление, обобщающее регулярное представление в теории алгебр Ли, и устанавливается условие, играющее роль тождества Якоби. Развиваемая новая техника базируется на сопоставлении исходной некоммутативной алгебре коммутативной алгебры функций (символов) и использовании разложений символов в ряды Тейлора и Ньютона. Эта техника может быть полезной и в классической ситуации алгебр Ли, а также находит применения в задачах математической физики для получения точных и асимптотических решений.

Заседание 4 апреля 1978 г.

1. В. В. Никулин «Целочисленные квадратичные формы и вещественная алгебраическая геометрия».

Один из вопросов 18-й проблемы Гильберта состоял в том, чтобы найти топологическую классификацию вещественных гладких поверхностей 4-й степени. Такая классификация была недавно завершена В. М. Харламовым, которому удалось также существенно продвинуться в исследовании расположения компонент поверхности в трехмерном пространстве. Открытым оставался лишь вопрос о том, может ли такая поверхность состоять из двух торов, ровно один из которых стягивается в точку. В докладе приведена классификация поверхностей, соответствующая разбиению пространства поверхностей на связные компоненты. В частности, дано трицательный ответ (В. М. Харламов, В. В. Никулин) на оставшийся открытым вопрос о расположении торов. Более общим образом будет приведена алгебраическая классификация поляризованных вещественных К-3 поверхностей.

2. Председательствующий на заседании вице-президент ММО В. И. Арнольд объявляет, что премия Общества молодым математикам за 1977 присуждена В. М. Харламову за цикл работ по вещественным алгебраическим многообразиям.

Заседание 11 апреля 1978 г.

1. Б. С. Кашин «О некоторых новых результатах в теории функций».

Доклад посвящен результатам, полученным в последнее время в теории общих ортогональных рядов и теории приближения. В частности, рассказано: О задачах единственности представления функций ортогональными рядами; о тех «хороших» свойствах случайных ортонормированных систем, которые отсутствуют у классических ортонормированных систем; о новых оценках поперечников конечномерных множеств и компактных классов гладких функций.

Заседание 18 апреля 1978 г.

1. М. А. Шубин «Новые аспекты теории индекса эллиптических операторов».

Классическая теория индекса состоит в вычислении

$$\operatorname{ind} A = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A,$$

где A — эллиптический оператор на компактном многообразии. В последние годы она была распространена на ряд ситуаций, когда индекс нужно понимать иначе и он оказывается вещественным числом, функцией или даже обобщенной функцией (операторы с почти периодическими и случайными коэффициентами, трансверсально эллиптические операторы и т. п.). В докладе рассказано об этих новых аспектах теории индекса с аналитической точки зрения.

Заседание 25 апреля 1978 г.

1. Р. Л. Добрушин, Я. Г. Синай «Автомодельные распределения вероятностей».

Автомодельные распределения вероятностей — это вероятностные меры в функциональных пространствах, инвариантные относительно действия группы подобия. В случае пространств функций одного переменного такие распределения появились в работах А. Н. Колмогорова в 1940 г., посвященных проблемам турбулентности. В последнее время интерес к этим распределениям возрос в связи с теорией фазовых переходов второго ряда в статистической механике и проблемами нарушения непрерывной симметрии в квантовой теории поля. В докладе рассказано о последних математических результатах, полученных в этой области.

Заседание 23 мая 1978 г.

1. Р. Финн (США) «Некоторые математические проблемы теории капиллярности.»

Рассматривается поверхность коразмерности единица, пересекающая заданную поверхность под фиксированными углом, причем средняя кривизна рассматриваемой поверхности либо постоянна, либо пропорциональна расстоянию до некоторой плоскости. Такая поверхность возникает в физических задачах как свободная поверхность между двумя несмешивающимися жидкостями, ограниченными (частично) твердыми стенками в отсутствии тяготения либо в однородном гравитационном поле. Показано, что такие поверхности могут зависеть разрывно от граничных условий и формы границы. В некоторых случаях поверхность существует глобально, хотя известно, что ее конфигурация неустойчива. Для таких задач доказываются принципы сравнения и априорные оценки высоты. Некоторые из этих оценок не зависят от кривизны границы и в некотором смысле являются асимптотически точными. Применяемый метод приводит также к новым оценкам градиента поверхности постоянной средней кривизны.

2. Вейсс (ФРГ) «Гильбертовы многообразия и их роль в топологии».

В докладе дан краткий обзор теории гильбертовых многообразий с точки зрения взаимоотношений этой теории с другими областями топологии. Приведены примеры гильбертовых многообразий и обсуждены их применения в топологии. Рассказаны некоторые предположения о будущем этого предмета.

Заседание 30 мая 1978 г.

1. П. С. Александров «О некоторых основных моментах развития теоретико-множественной топологии».

2. Секретарь Общества сообщает, что к опубликованию в УМН приняты следующие резюме докладов, принятых правлением Общества.

1°. Г. Р. Белицкий «О стабильной эквивалентности ростков функций».

Согласно [1], [2], если конечно определенные ростки функций от одинакового числа переменных стабильно эквивалентны относительно группы преобразований координат в прообразе, то они эквивалентны. Для подгруппы преобразований с единичным линейным приближением удается получить более полный результат. Здесь K — поле вещественных или комплексных чисел.

Теорема. *Пусть F, H: $(K^n, 0) \to (K^p, 0)$ — два формальных отображения, каждое из которых является прямой суммой отображений от меньшего числа переменных:*

$$F(x) = \sum_{i=1}^{q} F_i(x_i), \qquad H(x) = \sum_{i=1}^{q} H_i(x_i), \qquad x = (x_1 \ldots x_q) \in K^n.$$

Если F и H эквивалентны, то при каждом $i = 1, \ldots, q$ формальные отображения $F_i(x_i)$ и $H_i(x_i)$ также эквивалентны.

Доказательство основано на приведении к нормальной форме. В силу теоремы Артина, аналогичный результат справедлив и для ростков аналитических отображений. В частности, имеет место

Следствие. *Пусть F и H — стабильно эквивалентные ростки аналитических функций от одинакового числа переменных. Тогда F и H эквивалентны.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Арнольд, Критические точки гладких функций и их нормальные формы, УМН 30 : 5 (185) (1975), 3—65.

[2] В. И. Арнольд, Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, F_k и лагранжевы особенности, Функц. анализ 6 : 4 (1972), 3—25.

Поступило в Правление общества 18 февраля 1978 г.

2°. Б. Д. Котляр «Укладки прямоугольных параллелотопов».

Рассматривается задача о заполнении прямоугольного параллелотопа $P \subset \mathbb{R}^n$, длины ребер равны $a_i \in \mathbb{N}$ $(i = 1, \ldots, n)$ «брусками», т. е. параллелотопами, длины ребер которых равны 1 для $(n-1)$-го ребер и $k \in \mathbb{N}$ для одного ребра. Вопрос об условиях, при которых возможна укладка таких брусков, полностью заполняющая параллелотоп P, решен в работах [1], [2] (см. также [3], гл. 2, и следствие 1 настоящей работы). Ниже рассматривается вопрос о максимальном числе брусков, для которых возможна укладка параллелотопа, включая случай, когда полное заполнение невозможно. Пусть m означает максимальное число параллелотопов размером $1 \times \ldots \times 1 \times k$, которые можно уложить (без перекрытий) и параллелотоп P размером $a_1 \times \ldots \times a_n$ так, что ребра брусков параллельны ребрам P. Пусть $r_i \equiv a_i \pmod{k}$, $0 \leqslant r_i < a_i$.

Теорема 1. *Число брусков m при плотнейшей укладке параллелотопа удовлетворяет неравенствам*

$$(1)\qquad \frac{1}{k}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} r_i\right) \leqslant m \leqslant \frac{1}{k}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i - \left(\sin\frac{\pi}{k}\right)^{-n} \prod_{i=1}^{n} \sin\frac{\pi r_i}{k}\right).$$

Следствие 1. (де Брейн [1], Клэрнер [2] — случай $n=2$, Сойфер [4] — три доказательства в случае $n=2$). *Для того чтобы существовала укладка брусков, полностью заполняющая параллелотоп P, необходимо и достаточно, чтобы существовал номер i ($i = 1, \ldots, n$) такой, что a_i кратно k.*

Отметим, что левое неравенство в [1] и достаточность в следствии 1 являются очевидными утверждениями.

Рассмотрим укладку параллелотопа P «кирпичами», т. е. параллелотопами размером $k_1 \times \ldots \times k_n$, $k_j \in \mathbb{N}$ ($j = 1, \ldots, n$); будем считать допустимой любую ориентацию кирпичей, при которой вершины каждого кирпича имеют целые координаты, если вершины исходного параллелотопа также имеют целые координаты. Пусть $r_{j,s} \equiv a_j \pmod{k_s}$, $0 \leqslant r_{j,s} < k_s$.

Следствие 2. *При укладке кирпичами параллелотопа P объем V незаполненной части параллелотопа удовлетворяет неравенству*

$$V \geqslant \max_{\{s \mid k_s > 1\}} \left\{\left(\sin\frac{\pi}{k_s}\right)^{-n} \prod_{j=1}^{n} \sin\frac{\pi r_{j,s}}{k_s}\right\}.$$

В случае $n = 2$ можно дать другую оценку сверху для числа m, являющуюся эффективной во многих случаях; ниже рассматривается заполнение прямоугольника размером $a_1 \times a_2$, $a_i \in \mathbb{N}$, «полосками», т. е. прямоугольниками размером $1 \times k$, $k \in \mathbb{N}$, причем стороны полоски параллельны сторонам прямоугольника.

Теорема 2. *Число полосок m при плотнейшей укладке прямоугольника удовлетворяет неравенствам*

$$(2)\qquad \frac{1}{k}(a_1a_2 - r_1r_2) \leqslant m \leqslant \frac{1}{k}(a_1a_2 - r_1r_2) + \max\{r_1 + r_2 - k;\ 0\}.$$

Отметим, что теоремы 1 и 2 дают гораздо более точные оценки, чем те что вытекают из [1] и [2]. И левое и правое неравенства в (1) и (2) точны в том смысле, что существуют параллелотопы, на которых они обращаются в равенства.

ЛИТЕРАТУРА

[1] N. G. de Bruijn, Filling boxes with bricks, Amer. Math. Nonthly 76 : 1 (1969).

[2] D. A. Klarner, Packing a rectangle with congruent N-ominoes, J. Combitorial Theory 7 : 2 (1969), 107—115 (русск. перевод: Дополнение к книге С. В. Голомб, Полимино, «Мир», М., 1975, 192—203).

[3] Т. Саати, Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы, М., «Мир», 1973.

[4] А. Ю. Сойфер, Клетчатые доски и полимино, «Квант», № 11 (1972), 3—10.

Поступило в Правление общества 2 сентября 1976 г.

3°. Е. А. Шварцман. «О разрешимости нелинейных уравнений».

Рассматривается уравнение

$$(1)\qquad \Phi x = y,$$

где Φ — непрерывный оператор, действующий из открытого подмножества D банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 и дифференцируемый по Гато для всякого $x \in D$. Пусть при всех $x \in D$ $\Phi'(x)E_1 = E_2$ и выполнено условие: для любого $h \in E_1$ и всякой окрестности $U_h \subset E_1$ существует окрестность $V_x \subset D$ такая, что для каждого $z \in V_x$ существует $h_z \in U_h$, для которого $\Phi'(z)\, h_z = \Phi'(x)h$.

Теорема. *В указанных предположениях на некотором открытом множестве* G, $\{(x, \Phi x)\colon x \in D\} \subset G \subset E_1 \times E_2$, *определен непрерывный оператор* $\pi\colon G \to D$ *такой, что для всех* $(x, y) \in G$

(2) а) $\Phi\pi(x, y) = y$, б) $\pi(x, \Phi x) = x$.

В частности, при каждом $x \in D$ *оператор* $\pi(x, \cdot)$ *является правым обратным к* Φ.

Следствие. *В условиях теоремы* Φ *открыт и если* $\Phi^{-1}(y) \neq \varnothing$, *то* $\Phi^{-1}(y)$ *является окрестностным ретрактом и, в частности, кусочно-линейно связно.*

Доказательство теоремы основано на следующей лемме.

Тройку (Φ, f, ξ), где $\Phi\colon D \to E_2$, $f\colon D \times E_2 \to D$ — непрерывные операторы и $\xi\colon D \to (0, \infty)$, назовем правильной, если: (α1) $f(x, y) = x$ тогда и только тогда, когда $y = \Phi x$; (α2) для каждого $x \in D$ существует окрестность $V_x \subset D$, для которой $\inf \{\xi(z); z \in V_x\} > 0$; ($\alpha$3) для всех $x \in D$, $y \in E_2$ выполнено

$$\| y - \Phi f(x, y) \|_2 \leqslant \| y - \Phi x \|_2 - \xi(x) \| x - f(x, y) \|_1.$$

Лемма. *Пусть* (Φ, f, ξ) — *правильная тройка. Тогда на открытом множестве* G, $\{(x, \Phi x)\colon x \in D\} \subset G \subset E_1 \times E_2$ *определен непрерывный оператор* $\pi\colon G \to D$ *такой, что для всех* $(x, y) \in G$ *имеет место* (2).

Автор благодарен Б. Н. Садовскому за постоянное внимание и поддержку.

Поступило в Правление общества 20 марта 1978 г.