I. D. Suprunenko, T. S. Busel, A. A. Osinovskaya, Special factors in the restrictions of irreducible modules of classical groups to subsystem subgroups with two simple components, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2023, Volume 29, Number 4, 259–273

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-259-273

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 4 2023

УДК 512.743.7

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФАКТОРЫ В ОГРАНИЧЕНИЯХ НЕПРИВОДИМЫХ МОДУЛЕЙ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП НА ПОДСИСТЕМНЫЕ ПОДГРУППЫ С ДВУМЯ ПРОСТЫМИ КОМПОНЕНТАМИ[1]

И. Д. Супруненко, **Т. С. Бусел**, **А. А. Осиновская**

Исследуются неприводимые p-ограниченные модули классических алгебраических групп в нечетной характеристике p с большими относительно p старшими весами. Рассматриваются их ограничения на подсистемную подгруппу H максимального ранга с двумя простыми компонентами H_1 и H_2. При небольших ограничениях на ранги подгрупп H_1 и H_2 найдена нижняя оценка числа композиционных факторов (исследуемых модулей), которые являются p-большими для подгруппы H_1 и не слишком малы для H_2; эта оценка растет с ростом старшего веса. На этой основе получены нижние оценки для числа блоков Жордана максимальной размерности у образов определенных унипотентных элементов в соответствующих представлениях рассматриваемых групп.

Ключевые слова: классические алгебраические группы, модулярные представления, подсистемные подгруппы, ограничения, композиционные факторы, унипотентные элементы, блоки Жордана.

I. D. Suprunenko, T. S. Busel, A. A. Osinovskaya. Special factors in the restrictions of irreducible modules of classical groups to subsystem subgroups with two simple components.

For restrictions of p-restricted irreducible modules of classical algebraic groups in odd characteristic p with highest weights that are relatively large with respect to p to a subsystem subgroup H of maximal rank with two main components H_1 and H_2 under slight constraints restrictions on the ranks of the subgroups H_1 and H_2, a lower bound is found for the number of composition factors that are p-large for the subgroup H_1 and not too small for H_2; the bound grows as the highest weight increases. On this basis, lower bounds are obtained for the number of Jordan blocks of maximal size for the images of certain unipotent elements in the corresponding representations of the groups.

Keywords: classical algebraic groups, modular representations, restrictions, composition factors, unipotent elements, Jordan blocks.

MSC: 20G05

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-259-273

Введение

Ограничения представлений группы на ее подгруппы широко исследуются при решении самых различных задач теории представлений. Такой подход позволяет использовать индукцию по рангу или порядку группы и важен для изучения структуры подгрупп алгебраических и линейных групп. Подсистемные подгруппы, т. е. подгруппы, порожденные корневыми подгруппами, ассоциированными со всеми корнями некоторой подсистемы системы корней, — важный класс подгрупп полупростых алгебраических групп. В положительной характеристике p эта задача тесно связана с описанием характеров и размерностей неприводимых представлений, для которых в свою очередь в ближайшем будущем не ожидается решения. Поэтому целесообразно развивать методы исследования представлений, которые не требуют знания их характеров. Часто даже наличие одного фактора определенного вида позволяет выявить важные закономерности. При этом анализ ограничений представлений простых алгебраических групп на подсистемные подгруппы с двумя простыми компонентами дает информацию, которую вряд

[1]Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф21-054).

ли можно было бы получить, работая лишь с простыми подсистемными подгруппами. Исследование таких ограничений полезно для выяснения поведения определенных унипотентных элементов в соответствующих представлениях, что в свою очередь нужно для решения задач распознавания представлений и линейных групп по наличию матриц заданного вида.

При изучении ограничений неприводимых представлений алгебраических групп на замкнутые подгруппы особое место занимает решение проблемы неприводимости таких ограничений. В положительной характеристике эта проблема значительно сложнее, чем в нулевой. В основополагающей монографии Г. Зейца [11] она была решена для ограничений представлений простых классических алгебраических групп на связные замкнутые подгруппы, но не была указана одна серия неприводимых ограничений. Для исключительных алгебраических групп задача решена Д. Тестерман [16] для связных замкнутых подгрупп и С. Гхандур [7] — для несвязных замкнутых подгрупп положительной размерности. В [4; 5] Т. Бэрнесс, С. Гхандур, К. Мэрион и Д. Тестерман решили задачу для ограничений представлений простых классических алгебраических групп на максимальные несвязные замкнутые подгруппы положительной размерности. Наконец, М. Каваллин и Д. Тестерман [6], устранив пробел в [11], обнаружили новую серию неприводимых представлений групп типа D_{n+1}, ограничения которых на естественно вложенную подгруппу типа B_n неприводимы. В совокупности эти результаты позволили описать максимальные неприводимые подгруппы классических алгебраических групп в положительной характеристике. Информация об ограничениях представлений на подгруппы существенно использовалась при описании надгрупп унипотентных элементов определенного вида в простых алгебраических группах. Так, М. Либек, Г. Зейц и Д. Тестерман [9] описали неприводимые представления простых алгебраических групп в характеристике 0, образы которых содержат так называемые выделенные унипотентные элементы классических групп соответствующих размерностей. Для положительной характеристики аналогичные представления определены М. Корхоненом [8], учеником Тестерман, там же указаны максимальные связные замкнутые надгруппы таких элементов простых алгебраических групп в положительной характеристике.

Для формулировки задачи введем сначала обозначения.

Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 2$, G — классическая алгебраическая группа ранга r над полем K, ω_i и α_i — фундаментальные веса и простые корни группы G, их нумерация соответствует [1]. Предполагается, что веса и корни группы G рассматриваются относительно фиксированного максимального тора T группы G.

Для G-модуля M символом $\dim M$ обозначим размерность модуля M, $\omega(M)$ — старший вес модуля M, $\mathbf{X}(M)$ — множество весов модуля M, M_λ — весовое подпространство веса λ в M, а $M|H$ — ограничение G-модуля M на подгруппу $H \subset G$. Пусть $M(\omega)$ — неприводимый модуль группы G со старшим весом ω и $\omega|H$ — ограничение веса ω на тор $T \cap H$ подгруппы H.

Далее $\langle \omega, \alpha \rangle$ — значение веса ω на корне α в смысле [3, §1], $\mathfrak{X}_\alpha$ — корневая подгруппа, ассоциированная с корнем α, $\mathfrak{X}_{\pm i} = \mathfrak{X}_{\pm\alpha_i}$, $G(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ — подсистемная подгруппа в G, порожденная корневыми подгруппами $\mathfrak{X}_{\pm\beta_1}, \ldots, \mathfrak{X}_{\pm\beta_k}$. Корни $\beta_1, \ldots, \beta_k$ выбираются таким образом, что они составляют некоторую подсистему системы корней группы G. Положим $G(i_1, \ldots, i_k) = G(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k})$. Мы используем также "смешанные" обозначения $G(i_1, \ldots, i_k, \beta, i_{k+1}, \ldots, i_s)$.

Доминантный вес группы G называется p-ограниченным, если он является линейной комбинацией фундаментальных весов, все коэффициенты которой меньше p. Неприводимый модуль называется p-ограниченным, если его старший вес p-ограничен.

Для неприводимого модуля M группы G определим вес $\overline{\omega}(M)$ следующим образом: запишем старший вес $\omega(M)$ в виде линейной комбинации

$$\omega(M) = \sum_{k=0}^{j} p^k \lambda_k,$$

где λ_k — p-ограниченные доминантные веса, и положим $\overline{\omega}(M) = \sum_{k=0}^{j} \lambda_k$. Легко видеть, что $\overline{\omega}(M)$ определяется однозначно. Назовем неприводимый модуль группы G p-большим, если $\langle\overline{\omega}(M), \alpha_{\max}\rangle \geq p$ для максимального корня $\alpha_{\max}$.

В работе исследуются ограничения неприводимых p-ограниченных модулей классических алгебраических групп с p-большими старшими весами на подсистемные подгруппы H максимального ранга с двумя простыми компонентами H_1 и H_2 и находятся нижние оценки числа композиционных факторов, которые являются p-большими для подгруппы H_1 и не слишком малыми для H_2. На этой основе получены нижние оценки для числа блоков Жордана максимальной размерности у образов определенных унипотентных элементов в соответствующих представлениях рассматриваемых групп. Основные результаты сформулированы в разд. 2–4 — это теоремы 3–5 и следствия 2–6. Хотя общие схемы их доказательств совпадают, рассуждения приходится проводить по отдельности из-за различного строения систем корней.

Заметим, что если $H \subset G$ — подсистемная подгруппа с двумя простыми компонентами H_1 и H_2, то каждый неприводимый модуль V группы H эквивалентен тензорному произведению $V_1 \otimes V_2$, где V_i — неприводимая компонента ограничения $V|H_i$, $i = 1, 2$.

Выберем максимальные подгруппы H следующим образом. Положим

$$\begin{array}{lll} H_1 \cong A_l(K), & H_2 \cong A_{r-l-1}(K) & \text{при } G = A_r(K), \\ H_1 \cong C_l(K), & H_2 \cong C_{r-l}(K) & \text{при } G = C_r(K), \\ H_1 \cong D_l(K), & H_2 \cong B_{r-l}(K) & \text{при } G = B_r(K), \\ H_1 \cong D_l(K), & H_2 \cong D_{r-l}(K) & \text{при } G = D_r(K). \end{array}$$

Введем подмножество весов группы H_2. Пусть

$$\Delta = \{0, p^j\omega_1, (p^j + p^k)\omega_1, p^j\omega_2, p^j\omega_{r-l-1}, p^j\omega_{r-l-2}, (p^j + p^k)\omega_{r-l-1}, p^j\omega_1 + p^k\omega_{r-l-1}\}$$

при $G = A_r(K)$ и $\Delta = \{0, p^j\omega_1, (p^j + p^k)\omega_1, p^j\omega_2\}$ в остальных случаях (здесь j и k — целые неотрицательные числа; они могут совпадать).

Лемма 1. *Пусть V — неприводимый модуль группы H_2 и $\omega(V) \notin \Delta$. Тогда*

$$\dim V > (r - l - 1)^3/8$$

при $G = A_r(K)$ и

$$\dim V > (r - l)^3$$

при $G = C_r(K)$ и $r - l > 8$, $G = B_r(K)$ и $r - l > 9$ или $D_r(K)$ и $r - l > 11$.

Для p-ограниченных представлений это доказано в работе Любека [10, теорема 5.1 и таблицы], для произвольных неприводимых представлений наше утверждение следует из цитированных выше результатов Любека и теоремы Стейнберга о тензорном произведении. Из тех же результатов вытекает, что $\dim V$ не больше некоторой квадратичной функции ранга группы H_2 при $\omega(V) \in \Delta$. Поэтому естественно считать неприводимые представления группы H_2 со старшими весами из Δ малыми.

1. Предварительные результаты

Приведем сначала несколько утверждений, используемых при доказательстве основных результатов разд. 2–4.

Используя формулы максимальных корней [1, таблицы I–IV], легко вычислить значение веса $\omega = a_1\omega_1 + \ldots + a_r\omega_r$ на максимальном корне $\alpha_{\max} \in G$ для группы G

$$\langle\omega, \alpha_{\max}\rangle = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{r} a_i & \text{при } G = A_r(K) \text{ или } C_r(K), \\ a_1 + a_r + 2\sum\limits_{i=2}^{r-1} a_i & \text{при } G = B_r(K), \\ a_1 + a_{r-1} + a_r + 2\sum\limits_{i=2}^{r-2} a_i & \text{при } G = D_r(K). \end{cases}$$

Теорема 1 [12]. *Пусть $S = G(i_1, \dots, i_k) \subseteq G$, M — неприводимый G-модуль со старшим весом ω, $v \in M$ — ненулевой вектор старшего веса. Тогда подпространство $KSv \subseteq M$ является неприводимым S-модулем со старшим весом $\omega|S$ и прямым слагаемым S-модуля M.*

Обозначим символом $\omega(m)$ вес весового вектора m. Тогда из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть $H \subset G$ — подсистемная подгруппа, M — G-модуль. Предположим, что весовой вектор $m \in M$ инвариантен относительно всех корневых подгрупп, ассоциированных с положительными корнями подгруппы H. Тогда модуль KHm, а значит, и ограничение $M|H$ имеют композиционный фактор со старшим весом $\omega(m)|H$.*

Следующая лемма активно используется при построении факторов в леммах 5–7. Для корня β группы G и натурального числа k символы X_β и $X_{\beta,k}$ обозначают корневой элемент алгебры Ли группы G, ассоциированный с β, и элемент гипералгебры группы G, ассоциированный с парой $(\beta,\ k)$, соответственно. При $k < p$ имеем $X_{\beta,k} = (X_\beta)^k/k!$. Если $\beta = \pm\alpha_i$, используем обозначения $X_{\pm i}$ и $X_{\pm i,k}$.

Лемма 2 [14, лемма 2.46]. *Пусть M — неразложимый G-модуль со старшим весом $\omega = \sum_{i=1}^r a_i\omega_i$ и $v \in M$ — ненулевой вектор старшего веса. Пусть $1 \le s,t \le r$ и $s,t < r$ при $G = D_r(K)$. Предположим, что $0 < a_t < p$. Пусть $b_k = -\langle\alpha_{k+1},\alpha_k\rangle$ и $c_k = -\langle\alpha_{k-1},\alpha_k\rangle$. Для целого d с $0 < d \le a_t$ определим вектор $v(s,t,d)$ следующим образом. Пусть $d_t = d$. Если $s < t$, положим $d_k = a_k + d_{k+1}b_k$ при $s \le k < t$. Если $s > t$, положим $d_k = a_k + d_{k-1}c_k$ при $s \ge k > t$. Теперь положим*

$$v(s,t,d) = X_{-s,d_s}\dots X_{-k,d_k}\dots X_{-t,d}v.$$

При $s = t$ положим $v(s,s,d) = X_{-s,d}v$. Тогда $v(s,t,d) \ne 0$ и $X_{i,b}v(s,t,d) = 0$ для положительного $i \ne s$ и $b > 0$. Следовательно, группа $\mathfrak{X}_i$ фиксирует $v(s,t,d)$.

Теорема 2 [13, теорема 1.1; 2, теорема 1]. *Образ унипотентного элемента в p-большом представлении группы G имеет не менее двух блоков Жордана размерности, равной порядку этого элемента.*

Ниже $cl(g)$ и $\overline{cl(g)}$ — класс сопряженных элементов, содержащий элемент g, и его замыкание в топологии Зарисского, $d_\varphi(g)$ — степень минимального многочлена образа элемента $g \in G$ в представлении φ.

Лемма 3 [15, лемма 2.14]. *Пусть $g, x \in G$ — унипотентные элементы, $x \in \overline{cl(g)}$, φ — рациональное представление группы G. Предположим, что $d_\varphi(g) = d_\varphi(x)$. Тогда элемент $\varphi(g)$ имеет не меньше блоков Жордана максимальной размерности, чем $\varphi(x)$.*

Обозначим символом $\mathbb{Z}^+$ множество неотрицательных целых чисел, а $|g|$ — порядок элемента $g \in G$.

Лемма 4 [14, лемма 4.1]. *Пусть $s \in \mathbb{Z}^+$, $g \in G$ — унипотентный элемент порядка p^{s+1}, $x \in G$ — элемент, имеющий в стандартной реализации группы G один блок размерности $p^s + 1$ и тривиальные блоки для $G = A_r(K)$ или $C_r(K)$, один блок размерности $p^s + 2$ и тривиальные блоки или два блока размерности $p^s + 1$ и тривиальные блоки для $G = B_r(K)$ или $D_r(K)$. Тогда $x \in \overline{cl(g)}$, если $|g| = |x|$.*

2. Случай $G = A_r(K)$

В этом разделе приведены результаты для специальной линейной группы G. Известно, что все подсистемные подгруппы, изоморфные H, сопряжены. Поэтому для поиска искомых факторов можно выбрать любую из них. Положим $t = r - k$ при $l = 2k$ и $t = r - k - 1$ при $l = 2k + 1$,

$$\begin{aligned} H_1 =& G(1, \dots, k, \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{t+1}, t + 2, \dots, r) \cong A_l(K), \\ H_2 =& G(k + 2, \dots, t) \cong A_{r-l-1}(K). \end{aligned}$$

Теорема 3. *Пусть $G = A_r(K)$, M — p-ограниченный неприводимый G-модуль со старшим весом $\sum_{i=1}^{r} a_i\omega_i$. Положим $s = \sum_{i=1}^{r} a_i$. Предположим, что $5 \leq l \leq r - 6$ и $s \geq 2p - 1$. Пусть*

$$N = \begin{cases} s - 2d - 3 & \text{при } \ s = 2p + d \ \text{ или } s = 3p + d < 4p - 4, \ \ 0 < d < p - 1, \\ s - 3 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Тогда в ограничении $M|H$ имеется не менее N композиционных факторов вида $M_{i1} \otimes M_{i2}$, где M_{i1} — p-большой H_1-модуль, а M_{i2} — неприводимый H_2-модуль с $\omega(M_{i2}) \notin \Delta$, $1 \leq i \leq N$.

В качестве следствия теоремы 3 получены также нижние оценки числа блоков Жордана максимальной размерности в образах унипотентных элементов из подгруппы H_1 в неприводимых представлениях, удовлетворяющих условиям теоремы 3.

Следствие 2. *В условиях теоремы 3 пусть φ — представление группы G, реализующееся в модуле M. Тогда для любого унипотентного элемента $x \in H_1$ образ $\varphi(x)$ имеет не менее $N(r - l - 1)^3/4$ блоков Жордана максимальной размерности, равной порядку этого элемента.*

Используя информацию о замыканиях классов сопряженных унипотентных элементов группы G в топологии Зарисского, удается распространить эти оценки на определенные унипотентные элементы, не лежащие в собственных подсистемных подгруппах.

Следствие 3. *Пусть представление φ удовлетворяет условиям следствия 2. Если $5 \leq p^t \leq r - 6$, то $\varphi(g)$ имеет не менее $N(r - p^t - 1)^3/4$ блоков Жордана размерности p^{t+1} для любого элемента $g \in G$ порядка p^{t+1}. При $r \geq 11$ образ $\varphi(g)$ имеет не менее $N(r-6)^3/4$ блоков Жордана размерностей p и 9 соответственно для элементов $g \in G$ порядка p и элементов порядка 9 при $p = 3$.*

О доказательствах результатов этого раздела. Пусть M — модуль, удовлетворяющий условиям теоремы 3, U_H — подгруппа, порожденная всеми корневыми подгруппами группы H, ассоциированными с положительными корнями. Если $m \in M$ — ненулевой весовой вектор, инвариантный относительно U_H, то пусть $F(m)$ — неприводимый H-модуль, изоморфный фактор-модулю модуля KHm по его единственному максимальному подмодулю. Для фиксированных чисел a и b обозначим

$$\mathbf{X}(M)_{a,b} = \{\lambda \in \mathbf{X}(M) \mid \lambda = \omega(M) - a\alpha_{k+1} - b\alpha_{t+1} - \sum_{i \neq k+1, t+1} c_i\alpha_i\},$$

$$M_{a,b} = \{\oplus M_\lambda \mid \lambda \in \mathbf{X}(M)_{a,b}\}.$$

Для доказательства теоремы 3 явно построим модули, ограничение которых на подгруппу H_1 является p-большим, а на подгруппу H_2 — ограничение модулем с не слишком малым старшим весом. Для этого построим множество Σ, состоящее из N различных пар (a, b) со следующими свойствами: для любой пары $(a, b) \in \Sigma$ существует ненулевой весовой вектор $m_{a,b} \in M_{a,b}$, инвариантный относительно U_H; модуль $F(m_{a,b}) \cong F_1 \otimes F_2$, где F_1 — p-большой H_1-модуль, F_2 — неприводимый H_2-модуль с $\omega(F_2) \notin \Delta$; при этом различным парам соответствуют неизоморфные модули $F(m_{a,b})$.

Построение этого множества опирается на следующую лемму.

Лемма 5. 1) *Пусть* $k+1 \le i < t+1$, $a_i > 0$, $b \in \mathbb{Z}^+$, $0 < b \le a_i$. *Положим* $\lambda(k+1, k+1, b) = \omega(M) - b\alpha_{k+1}$. *При* $i > k+1$ *положим* $c_i = b$, $c_j = a_j + c_{j+1}$ *при* $k+1 \le j < i$ *и* $\lambda(k+1, i, b) = \omega(M) - \sum_{f=k+1}^{i} c_f \alpha_f$.

2) *Пусть* $1 \le i < k+1$, $a_i > 0$, $b \in \mathbb{Z}^+$, $0 < b \le a_i$. *Положим* $c_i = b$, $c_j = a_j + c_{j-1}$ *при* $i < j \le k+1$ *и* $\lambda(k+1, i, b) = \omega(M) - \sum_{f=i}^{k+1} c_f \alpha_f$.

3) *Пусть* $t+1 \le i \le r$, $a_i > 0$, $b \in \mathbb{Z}^+$, $0 < b \le a_i$. *Положим* $\lambda(t+1, t+1, b) = \omega(M) - b\alpha_{t+1}$. *При* $i > t+1$ *положим* $c_i = b$, $c_j = a_j + c_{j+1}$ *при* $t+1 \le j < i$ *и* $\lambda(t+1, i, b) = \omega(M) - \sum_{f=t+1}^{i} c_f \alpha_f$.

4) *Пусть* $1 \le i < k+1 < j < t+1$, $a_i a_j > 0$, $b, d \in \mathbb{Z}^+$, $0 < b \le a_i$, $0 < d \le a_j$. *Положим* $c_i = b$, $c_f = a_f + c_{f-1}$ *при* $i < f \le k$, $c_j = d$, $c_f = a_f + c_{f+1}$ *при* $j > f \ge k+2$, $c_{k+1} = a_{k+1} + c_k + c_{k+2}$ *и* $\lambda(k+1, i, j, b, d) = \omega(M) - \sum_{f=i}^{j} c_f \alpha_f$.

5) *Пусть* $k+1 < i < t+1 < j \le r$, $a_i a_j > 0$, $b, d \in \mathbb{Z}^+$, $0 < b \le a_i$, $0 < d \le a_j$. *Положим* $c_i = b$, $c_f = a_f + c_{f-1}$ *при* $i < f \le t$, $c_j = d$, $c_f = a_f + c_{f+1}$ *при* $j > f \ge t+2$, $c_{t+1} = a_{t+1} + c_t + c_{t+2}$ *и* $\lambda(t+1, i, j, b, d) = \omega(M) - \sum_{f=i}^{j} c_f \alpha_f$.

Пусть $\lambda = \lambda(m, i, b)$ *или* $\lambda(m, i, j, b, d)$ *удовлетворяет условиям одного из пп.* 1)–5). *Тогда* $\lambda \in \mathbf{X}(M)$, *и подпространство* M_λ *состоит из векторов, инвариантных относительно* U_H.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы следует из многократного применения леммы 2 к соотвествующим группам. Выпишем явно веса, получившиеся в лемме 5. Положим при $s = 1, 2$

$$\mu_s = \begin{cases} \lambda(m, i, b)|H_s, & \text{для веса } \lambda(m, i, b) \text{ из пп. 1)–3) леммы 5,} \\ \lambda(m, i, j, b, d)|H_s, & \text{для веса } \lambda(m, i, j, b, d) \text{ из пп. 4) и 5).} \end{cases}$$

1. Сначала рассмотрим вес ω. Тогда

$$\mu_1 = \omega|H_1 = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \ldots + a_k\omega_k + (a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{t+1})\omega_{k+1} + a_{t+2}\omega_{k+2} + a_r\omega_l,$$
$$\mu_2 = \omega|H_2 = a_{k+2}\omega_1 + \ldots + a_t\omega_{r-l-1}.$$

2. Пусть $i = k+1$, $0 < b \le a_{k+1} \ne 0$. Тогда

$$\mu_1 = a_1\omega_1 + \ldots + (a_k + b)\omega_k + (a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{t+1} - b)\omega_{k+1} + a_{t+2}\omega_{k+2} + \ldots + a_r\omega_l,$$
$$\mu_2 = (a_{k+2} + b)\omega_1 + a_{k+3}\omega_2 + \ldots + a_t\omega_{r-l-1}.$$

3. Пусть $k+1 < i < t+1$, $0 < b \le a_i \ne 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu_1 = {} & a_1\omega_1 + \ldots + (a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{i-1} + b)\omega_k \\ & + (a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{t+1} - b)\omega_{k+1} + a_{t+2}\omega_{k+2} + \ldots + a_r\omega_l, \\ \mu_2 = {} & a_{k+1}\omega_1 + \ldots + a_{i-2}\omega_{i-k-2} + (a_{i-1} + a_i - b)\omega_{i-k-1} + (a_{i+1} + b)\omega_{i-k} \\ & + a_{i+2}\omega_{i-k+1} + \ldots + a_{t+1}\omega_{r-l-1}. \end{aligned}$$

4. Пусть $1 \le i < k+1$, $0 < b \le a_i \ne 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu_1 = {} & a_1\omega_1 + \ldots + (a_{i-1} + b)\omega_{i-1} + (a_i + a_{i+1} - b)\omega_i + a_{i+2}\omega_{i+1} + \ldots + a_k\omega_{k-1} \\ & + a_{k+1}\omega_k + (a_{k+2} + a_{k+3} + \ldots + a_{t+1})\omega_{k+1} + a_{t+2}\omega_{k+2} + \ldots + a_r\omega_l, \\ \mu_2 = {} & (a_{k+2} + a_{k+1} + \ldots + a_{i+1} + b)\omega_1 + a_{k+3}\omega_2 + \ldots + a_t\omega_{r-l-1}. \end{aligned}$$

5. Пусть $i = t+1$, $0 < b \le a_{t+1} \ne 0$. Тогда

$$\mu_1 = a_1\omega_1 + \ldots + a_k\omega_k + (a_{k+1} + \ldots + a_t + a_{t+1} - b)\omega_{k+1} + (a_{t+2} + b)\omega_{k+2} + \ldots + a_r\omega_l,$$
$$\mu_2 = a_{k+2}\omega_1 + \ldots + a_{t-1}\omega_{r-l-2} + (a_t + b)\omega_{r-l-1}.$$

6. Пусть $t+1 < i \le r$, $0 < b \le a_i \ne 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu_1 &= a_1\omega_1 + \ldots + a_k\omega_k + (a_{k+1} + \ldots + a_t)\omega_{k+1} + a_{t+1}\omega_{k+2} + \ldots + a_{i-2}\omega_{l-r+i-1}\\ &\quad + (a_{i-1} + a_i - b)\omega_{l-r+i} + (a_{i+1} + b)\omega_{l-r+i+1} + a_{i+2}\omega_{l-r+i+2} + \ldots + a_r\omega_l,\\ \mu_2 &= a_{k+2}\omega_1 + \ldots + a_{t-1}\omega_{r-l-2} + (a_t + a_{t+1} + \ldots + a_{i-1} + b)\omega_{r-l-1}.\end{aligned}$$

7. Пусть $1 \le i < k+1 < j < t+1$, $a_ia_j \ne 0$, $0 < b \le a_i$, $0 < d \le a_j$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu_1 &= a_1\omega_1 + \ldots + a_{i-2}\omega_{i-2} + (a_{i-1} + b)\omega_{i-1} + (a_i + a_{i+1} - b)\omega_i + a_{i+2}\omega_{i+1} + \ldots + a_k\omega_{k-1}\\ &\quad + (a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{j-1} + d)\omega_k\\ &\quad + (a_j + a_{j+1} + \ldots + a_t + a_{t+1} - d)\omega_{k+1} + a_{t+2}\omega_{k+2} + \ldots + a_r\omega_l,\\ \mu_2 &= (a_{i+1} + \ldots + a_k + a_{k+1} + b)\omega_1 + a_{k+2}\omega_2 + \ldots\\ &\quad + a_{j-2}\omega_{j-l-2} + (a_j + a_{j-1} - d)\omega_{j-l-1} + (a_{j+1} + d)\omega_{j-l} + a_{j+2}\omega_{j-l+1} + \ldots + a_t\omega_{r-l-1}.\end{aligned}$$

8. Пусть $k+1 < i < t+1 < j \le r$, $a_ia_j \ne 0$, $b, d \in \mathbb{Z}^+$, $0 < b \le a_i$, $0 < d \le a_j$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu_1 &= a_1\omega_1 + \ldots + a_k\omega_k + (a_{k+1} + \ldots + a_i - b)\omega_{k+1}\\ &\quad + (b + a_{i+1} + \ldots + a_{t+1})\omega_{k+2} + a_{t+2}\omega_{k+3} + \ldots + a_{i-2}\omega_{l-r+i-1}\\ &\quad + (a_{i-1} + a_i - b)\omega_{l-r+i} + (a_{i+1} + b)\omega_{l-r+i+1} + a_{i+2}\omega_{l-r+i+2} + \ldots + a_r\omega_l\\ &\quad + \ldots + a_r\omega_l,\\ \mu_2 &= a_{k+1}\omega_1 + \ldots + a_{i-2}\omega_{i-k-2} + (a_{i-1} + a_i - b)\omega_{i-k-1} + (a_{i+1} + b)\omega_{i-k}\\ &\quad + a_{i+2}\omega_{i-k+1} + \ldots + a_t\omega_{r-l-2} + (a_{t+1} + \ldots + a_{j-1} + d)\omega_{r-l-1}.\end{aligned}$$

Как было сказано выше, векторы, соответствующие весам $\lambda(m,n,b)$ или $\lambda(m,n,s,b,d)$, являются инвариантными относительно корневых подгрупп, порождающих подгруппы H_1 и H_2. Тогда по следствию 1 существуют факторы вида $M_1 \otimes M_2$ со старшими весами вида $\mu_1 \otimes \mu_2$, где μ_1 — p-большой, а $\mu_2 \notin \Delta$. Это завершает доказательство теоремы 3. □

Следствие 2 вытекает из теоремы 2 и леммы 1. □

Для доказательства следствия 3 используем леммы 3 и 4. □

3. Случай $G = C_r(K)$

В этом разделе приведены результаты для симплектической группы G.

Далее $G = C_r(K)$, $H_1 = G(1, \ldots, l-1, 2\alpha_l + 2\alpha_{l+1} + \ldots + 2\alpha_{r-1} + \alpha_r)$, $H_2 = G(l+1, \ldots, r)$.

Теорема 4. *Пусть $3 \le l \le r-3$, M — p-ограниченный неприводимый G-модуль со старшим весом $\sum_{i=1}^r a_i\omega_i$. Предположим, что $\sum_{i=1}^{r-1} a_i > p+1$, и положим $Q = \sum_{i=1}^{r-1} a_i - p - 1$. Тогда в ограничении $M|H$ имеется не менее Q композиционных факторов вида $M_{i1} \otimes M_{i2}$, где M_{i1} — p-большой H_1-модуль, а M_{i2} — неприводимый H_2-модуль с $\omega(M_{i2}) \notin \Delta$, $1 \le i \le Q$.*

Эта теорема позволяет получить нижние оценки числа блоков Жордана максимальной размерности в образах унипотентных элементов из подгруппы H_1 в соответствующих представлениях.

Следствие 4. *В условиях теоремы 4 пусть $r - l > 8$ и пусть φ — представление группы G, реализующееся в модуле M. Тогда для любого унипотентного элемента $x \in H_1$ образ $\varphi(x)$ имеет не менее $2Q(r-l)^3$ блоков Жордана максимальной размерности, равной порядку этого элемента.*

Как и в случае специальной линейной группы, удается распространить эти оценки и на ряд унипотентных элементов, не лежащих в собственных подсистемных подгруппах.

Следствие 5. *Пусть представление φ удовлетворяет условиям следствия 4. Если $3 \le (p^t+1)/2 \le r-7$, то $\varphi(z)$ имеет не менее $2Q(r-(p^t+1)/2)^3$ блоков Жордана размерности p^{t+1} для любого элемента $z \in G$ порядка p^{t+1}. При $r \ge 10$ образ $\varphi(z)$ имеет не менее $2Q(r-7)^3$ блоков Жордана размерностей p и 9 соответственно для элементов $z \in G$ порядка p и элементов порядка 9 при $p=3$.*

О доказательствах результатов этого раздела. Используем обозначения U_H и $F(m)$, введенные в разд. 2 при обсуждении доказательства теоремы 3. Пусть M — модуль, удовлетворяющий условиям теоремы 4. Для фиксированного $a \in \mathbb{Z}^+$ обозначим символом $\mathbf{X}(M)_a$ множество весов модуля M вида $\omega(M) - a\alpha_l - \sum_{i\neq l} c_i\alpha_i$. Положим $M_a = \oplus M_\lambda \mid \lambda \in \mathbf{X}(M)_a$. В доказательстве теоремы 4 подпространства M_a играют такую же роль, что и подпространства $M_{a,b}$ в доказательстве теоремы 3. Строится множество Σ_2, состоящее из Q различных чисел a со следующими свойствами: для любого $a \in \Sigma_2$ существует ненулевой весовой вектор $m_a \in M_a$, инвариантный относительно U_H; модуль $F(m_a) \cong F_1 \otimes F_2$, где F_1 — p-большой H_1-модуль, F_2 — неприводимый H_2-модуль с $\omega(F_2) \notin \Delta$; при этом $F(m_a) \ncong F(m_c)$ при $a \neq c$.

Как и выше, нахождение искомых модулей опирается на множество Σ_2. В свою очередь при построении множества Σ_2 существенно используется следующая лемма.

Лемма 6. 1) *Пусть $l \le i < r$, $a_i > 0$, $b \in \mathbb{Z}^+$, $0 < b \le a_i$. Положим $\lambda(l,l,b) = \omega(M) - b\alpha_l$. При $i > l$ положим $c_i = b$, $c_f = a_f + c_{f+1}$ при $l \le f < i$ и $\lambda(l,i,b) = \omega(M) - \sum_{f=l}^{i} c_f\alpha_f$.*

2) *Пусть $1 \le i < l$, $a_i > 0$, $b \in \mathbb{Z}^+$, $0 < b \le a_i$. Положим $c_i = b$, $c_f = a_f + c_{f-1}$ при $i < f \le l$ и $\lambda(l,i,b) = \omega(M) - \sum_{f=i}^{l} c_f\alpha_f$.*

3) *Пусть $1 \le i < l < j < r$, $a_ia_j > 0$, $b,d \in \mathbb{Z}^+$, $0 < b \le a_i$, $0 < d \le a_j$. Положим $c_i = b$, $c_f = a_f + c_{f-1}$ при $i < f < l$, $c_j = d$, $c_f = a_f + c_{f+1}$ при $j > f > l$, $c_l = a_l + c_{l-1} + c_{l+1}$ и $\lambda(l,i,j,b,d) = \omega(M) - \sum_{f=i}^{j} c_f\alpha_f$.*

Пусть $\lambda = \lambda(l,i,b)$ или $\lambda(l,i,j,b,d)$ удовлетворяет условиям одного из пп. 1)–3). Тогда $\lambda \in \mathbf{X}(M)$, и подпространство M_λ состоит из векторов, инвариантных относительно U_H.

Применив явно данную лемму и снова для краткости обозначив при $s = 1,2$

$$\mu_s = \begin{cases} \lambda(l,i,b)|H_s & \text{для веса } \lambda(l,i,b) \text{ из пп. 1) и 2) предложения 6,} \\ \lambda(l,i,j,b,d)|H_s & \text{для веса } \lambda(l,i,j,b,d) \text{ из п. 3),} \end{cases}$$

построим веса представления в ограничении на подсистемную подгруппу $H = H_1 \times H_2$.

1. Пусть $b = 0$. Тогда

$$\mu_1 = \omega|H_1 = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \ldots + a_{l-1}\omega_{l-1} + (a_l + a_{l+1} + \ldots + a_r)\omega_l,$$
$$\mu_2 = \omega|H_2 = a_{l+1}\omega_1 + \ldots + a_r\omega_{r-l}.$$

2. Пусть $i = l$, $0 < b \le a_l \neq 0$. Тогда

$$\mu_1 = a_1\omega_1 + \ldots + (a_{l-1} + b)\omega_{l-1} + (a_l + a_{l+1} + \ldots + a_r - b)\omega_l,$$
$$\mu_2 = (a_{l+1} + b)\omega_1 + \ldots + a_r\omega_{r-l}.$$

3. Пусть $1 < i < l$, $0 < b \le a_i \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu_1 &= a_1\omega_1 + \ldots + (a_{i-1} + b)\omega_{i-1} + (a_i + a_{i+1} - b)\omega_i \\ &\quad + a_{i+2}\omega_{i+1} + \ldots + a_l\omega_{l-1} + (a_{l+1} + \ldots + a_r)\omega_l, \\ \mu_2 &= (a_{l+1} + a_l + \ldots + a_{i+1} + b)\omega_1 + \ldots + a_r\omega_{r-l}.\end{aligned}$$

4. Пусть $i = 1$, $0 < b \leq a_1 \neq 0$. Тогда

$$\mu_1 = (a_1 + a_2 - b)\omega_1 + a_3\omega_2 + \ldots + a_l\omega_{l-1} + (a_{l+1} + \ldots + a_r)\omega_l,$$
$$\mu_2 = (a_{l+1} + a_l + \ldots + a_{i+1} + b)\omega_1 + \ldots + a_r\omega_{r-l}.$$

5. Пусть $l < j \leq r-1$, $0 < d \leq a_j \neq 0$. Тогда

$$\mu_1 = a_1\omega_1 + \ldots + (a_{l-1} + a_l + \ldots + a_{j-1} + d)\omega_{l-1} + (a_j + a_{j+1} + \ldots + a_r - d)\omega_l,$$
$$\mu_2 = a_l\omega_1 + \ldots + a_{j-2}\omega_{j-l-1} + (a_j + a_{j-1} - d)\omega_{j-l} + (a_{j+1} + d)\omega_{j+1-l} + \ldots + a_r\omega_{r-l}.$$

6. Пусть $1 \leq i < l < j \leq r-1$, $a_ia_j \neq 0$, $0 < b \leq a_i$, $0 < d \leq a_j$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu_1 = {} & a_1\omega_1 + \ldots + a_{i-2}\omega_{i-2} + (a_{i-1} + b)\omega_{i-1} + (a_i + a_{i+1} - b)\omega_i + a_{i+2}\omega_{i+1} + \ldots \\ & + (a_l + a_{l+1} + \ldots + a_{j-1} + d)\omega_{l-1} + (a_j + a_{j+1} + \ldots + a_r - d)\omega_l, \\ \mu_2 = {} & (a_l + a_{l+1} + \ldots + a_{j-1} + d)\omega_1 + a_{l+1}\omega_2 + \ldots + a_{j-2}\omega_{j-l-1} \\ & + (a_j + a_{j-1} - d)\omega_{j-l} + (a_{j+1} + d)\omega_{j-l+1} + \ldots + a_r\omega_{r-l}.\end{aligned}$$

Заметим, что веса $\mu_2 \notin \Delta$ при $j \neq l+1$. Также при $a_{l+2} + \ldots + a_r \neq 0$ веса μ_2 из пп. 2–4 не принадлежат множеству Δ.

Ясно, что векторы, соответствующие весам $\lambda(l,i,b)$ или $\lambda(l,i,j,b,d)$, являются инвариантными относительно корневых подгрупп, порождающих подгруппы H_1 и H_2. Тогда по следствию 1 существуют факторы вида $M_1 \otimes M_2$ со старшими весами вида $\mu_1 \otimes \mu_2$, где μ_1 p-большой, а $\mu_2 \notin \Delta$. Отсюда следует утверждение теоремы 4. □

Следствие 4 вытекает из теоремы 2 и леммы 1. □

Для доказательства следствия 5 используем леммы 3 и 4. □

4. Случай $G = B_r(K)$ и $D_r(K)$

В этом разделе группа G — спинорная группа.

Для $G = B_r(K)$ положим

$$H_1 = G(1, \ldots, l-1, \alpha_l + 2\alpha_{l+1} \ldots + 2\alpha_{r-1} + 2\alpha_r) \cong D_l(K),$$
$$H_2 = G(l+1, \ldots, r) \cong B_{r-l}(K).$$

Если $G = D_r(K)$, то

$$H_1 = G(1, \ldots, l-1, \alpha_l + 2\alpha_{l+1} \ldots + 2\alpha_{r-2} + \alpha_{r-1} + \alpha_r) \cong D_l(K),$$
$$H_2 = G(l+1, \ldots, r) \cong D_{r-l}(K).$$

Теорема 5. *Пусть $3 \leq l \leq r-3$ при $G = B_r(K)$ и $4 \leq l \leq r-4$ при $G = D_r(K)$, M — p-ограниченный неприводимый G-модуль со старшим весом $\sum_{i=1}^r a_i\omega_i$. Предположим, что $\sum_{i=1}^{r-1} a_i > p+1$, и положим $Q = \sum_{i=1}^{r-1} a_i - p - 1$. Тогда в ограничении $M|H$ имеется не менее Q композиционных факторов вида $M_{i1} \otimes M_{i2}$, где M_{i1} — p-большой H_1-модуль, а M_{i2} — неприводимый H_2-модуль с $\omega(M_{i2}) \notin \Delta$, $1 \leq i \leq Q$.*

Эта теорема позволяет получить нижние оценки числа блоков Жордана максимальной размерности в образах унипотентных элементов из подгруппы H_1 в соответствующих представлениях.

Следствие 6. *В условиях теоремы 5 пусть $r - l > 9$ для $G = B_r(K)$, $r - l > 11$ для $G = D_r(K)$, и пусть φ — представление группы G, реализующееся в модуле M. Тогда для любого унипотентного элемента $x \in H_1$ образ $\varphi(x)$ имеет не менее $2Q(r-l)^3$ блоков Жордана максимальной размерности, равной порядку этого элемента.*

О доказательствах результатов этого раздела. Напомним, что $3 \le l \le r-3$ при $G = B_r(K)$ и $4 \le l \le r-4$ при $G = D_r(K)$. Используем обозначения U_H и $F(m)$, введенные в разд. 2. Как и в разд. 3, введем $\mathbf{X}(M)_a$ и M_a и построим множество Σ_2, состоящее из различных чисел a со следующими свойствами: для любого $a \in \Sigma_2$ существует ненулевой весовой вектор $m_a \in M_a$, инвариантный относительно U_H; модуль $F(m_a) \cong F_1 \otimes F_2$, где F_1 — p-большой H_1-модуль, F_2 — неприводимый H_2-модуль с $\omega(F_2) \notin \Delta$; при этом $F(m_a) \ncong F(m_c)$ при $a \neq c$.

Построение множества Σ_2 опирается на следующую лемму.

Лемма 7. 1) *Пусть $l \le i < r$, $a_i > 0$, $b \in \mathbb{Z}^+$, $0 < b \le a_i$. Положим $\lambda(l,l,b) = \omega(M) - b\alpha_l$. При $i > l$ положим $c_i = b$, $c_f = a_f + c_{f+1}$ при $l \le f < i$ и $\lambda(l,i,b) = \omega(M) - \sum_{f=l}^{i} c_f\alpha_f$.*

2) *Пусть $1 \le i < l$, $a_i > 0$, $b \in \mathbb{Z}^+$, $0 < b \le a_i$. Положим $c_i = b$, $c_f = a_f + c_{f-1}$ при $i < f \le l$ и $\lambda(l,i,b) = \omega(M) - \sum_{f=i}^{l} c_f\alpha_f$.*

3) *Пусть $1 \le i < l < j < r$, $a_ia_j > 0$, $b,d \in \mathbb{Z}^+$, $0 < b \le a_i$, $0 < d \le a_j$. Положим $c_i = b$, $c_f = a_f + c_{f-1}$ при $i < f < l$, $c_j = d$, $c_f = a_f + c_{f+1}$ при $j > f > l$, $c_l = a_l + c_{l-1} + c_{l+1}$ и $\lambda(l,i,j,b,d) = \omega(M) - \sum_{f=i}^{j} c_f\alpha_f$.*

Пусть $\lambda = \lambda(l,i,b)$ или $\lambda(l,i,j,b,d)$ удовлетворяет условиям одного из пп. 1)–3). Тогда $\lambda \in \mathbf{X}(M)$ и подпространство M_λ состоит из векторов, инвариантных относительно U_H.

Как и выше, выпишем явно веса, которые получаются в ограничениях на подгруппы H_1 и H_2. Положим при $s = 1,2$

$$\mu_s = \begin{cases} \lambda(l,i,b)|H_s & \text{для веса } \lambda(l,i,b) \text{ из пп. 1) и 2) леммы 7,} \\ \lambda(l,i,j,b,d)|H_s & \text{для веса } \lambda(l,i,j,b,d) \text{ из п. 3).} \end{cases}$$

Так как строение корней групп $G = B_r(K)$ и $G = D_r(K)$ различно, применим лемму 7 к каждой группе по отдельности. Пусть сначала $G = B_r(K)$.

1. Пусть $b = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \omega|H_1 = a_1\omega_1 + \ldots + a_{l-1}\omega_{l-1} + (a_l + 2a_{l+1} + \ldots + 2a_{r-1} + a_r)\omega_l, \\ \mu_2 &= \omega|H_2 = a_{l+1}\omega_1 + a_{l+2}\omega_2 + \ldots + a_r\omega_{r-l}. \end{aligned}$$

2. Пусть $i = l$, $0 < b \le a_l \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu_1 &= a_1\omega_1 + \ldots + a_{l-2}\omega_{l-2} + (a_{l-1} + b)\omega_{l-1} + (a_l + 2a_{l+1} + \ldots + 2a_{r-1} + a_r)\omega_l, \\ \mu_2 &= (b + a_{l+1})\omega_1 + a_{l+2}\omega_2 + \ldots + a_r\omega_{r-l}. \end{aligned}$$

3. Пусть $1 \le i < l$, $0 < b \le a_i \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu_1 &= a_1\omega_1 + \ldots + a_{i-2}\omega_{i-2} + (a_{i-1} + b)\omega_{i-1} + (a_i + a_{i+1} - b)\omega_i + a_{i+2}\omega_{i+1} + \ldots \\ &\quad + a_l\omega_{l-1} + (b + a_{i+1} + \ldots + a_l + 2a_{l+1} + \ldots + 2a_{r-1} + a_r)\omega_l, \\ \mu_2 &= (b + a_{i+1} + \ldots + a_{l+1})\omega_1 + a_{l+2}\omega_2 + \ldots + a_r\omega_{r-l}. \end{aligned}$$

4. Пусть $l < j < r-1$, $0 < d \le a_j \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu_1 &= a_1\omega_1 + \ldots + a_{l-2}\omega_{l-2} + (a_{l-1} + a_l + \ldots + a_{j-1} + d)\omega_{l-1} \\ &\quad + (a_l + \ldots + a_{j-1} - d + 2a_j + \ldots + 2a_{r-1} + a_r)\omega_l, \\ \mu_2 &= a_l\omega_1 + \ldots + a_{j-2}\omega_{j-l-1} + (a_{j-1} + a_j - d)\omega_{j-l} + (d + a_{j+1})\omega_{j-l+1} \\ &\quad + a_{j+2}\omega_{j-l+2} + \ldots + a_r\omega_{r-l}. \end{aligned}$$

5. Пусть $j = r-1$, $0 < d \le a_{r-1} \ne 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu_1 &= a_1\omega_1 + \ldots + a_{l-2}\omega_{l-2} + (a_{l-1} + a_l + \ldots + a_{r-2} + d)\omega_{l-1}\\ &\quad + (a_l + \ldots + a_{r-2} + 2a_{r-1} + a_r)\omega_l,\\ \mu_2 &= a_l\omega_1 + \ldots + a_{r-3}\omega_{r-l-2} + (a_{r-2} + a_{r-1} - d)\omega_{r-l-1} + (2d + a_r)\omega_{r-l}.\end{aligned}$$

6. Пусть $1 \le i < l-1$, $l+1 < j < r-1$, $0 < b \le a_i \ne 0$, $0 < d \le a_j \ne 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu_1 &= a_1\omega_1 + \ldots + a_{i-2}\omega_{i-2} + (a_{i-1} + b)\omega_{i-1} + (a_i + a_{i+1} - b)\omega_i + a_{i+2}\omega_{i+1} + \ldots\\ &\quad + a_{l-1}\omega_{l-2} + (a_l + \ldots + a_{j-1} + d)\omega_{l-1}\\ &\quad + (b + a_{i+1} + \ldots + a_{j-1} - d + 2a_j + \ldots + 2a_{r-1} + a_r)\omega_l,\\ \mu_2 &= (b + a_{i+1} + \ldots + a_l)\omega_1 + a_{l+1}\omega_2 + \ldots + a_{j-2}\omega_{j-l-1} + (a_{j-1} + a_j - d)\omega_{j-l}\\ &\quad + (d + a_{j+1})\omega_{j-l+1} + a_{j+2}\omega_{j-l+2} + \ldots + a_r\omega_{r-l}.\end{aligned}$$

7. Пусть $1 \le i < l-1$, $j = l+1$, $0 < b \le a_i \ne 0$, $0 < d \le a_{l+1} \ne 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu_1 &= a_1\omega_1 + \ldots + a_{i-2}\omega_{i-2} + (a_{i-1} + b)\omega_{i-1} + (a_i + a_{i+1} - b)\omega_i + a_{i+2}\omega_{i+1} + \ldots\\ &\quad + a_{l-1}\omega_{l-2} + (a_l + d)\omega_{l-1} + (b + a_{i+1} + \ldots + a_l - d + 2a_{l+1} + \ldots + 2a_{r-1} + a_r)\omega_l,\\ \mu_2 &= (b + a_{i+1} + \ldots + a_l + a_{l+1} - d)\omega_1 + (d + a_{l+2})\omega_2 + a_{l+3}\omega_3 + \ldots + a_r\omega_{r-l}.\end{aligned}$$

8. Пусть $i = l-1$, $l+1 < j < r-1$, $0 < b \le a_{l-1} \ne 0$, $0 < d \le a_j \ne 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu_1 &= a_1\omega_1 + \ldots + a_{l-3}\omega_{l-3} + (a_{l-2} + b)\omega_{l-2} + (a_l + \ldots + a_{j-1} + d)\omega_{l-1}\\ &\quad + (b + a_l + \ldots + a_{j-1} - d + 2a_j + 2a_{j+1} + \ldots + 2a_{r-1} + a_r)\omega_l,\\ \mu_2 &= (b + a_l)\omega_1 + a_{l+1}\omega_2 + \ldots + a_{j-2}\omega_{j-l-1} + (a_{j-1} + a_j - d)\omega_{j-l} + (d + a_{j+1})\omega_{j-l+1}\\ &\quad + a_{j+2}\omega_{j-l+2} + \ldots + a_r\omega_{r-l}.\end{aligned}$$

9. Пусть $i = l-1$, $j = l+1$, $0 < b \le a_{l-1} \ne 0$, $0 < d \le a_{l+1} \ne 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu_1 &= a_1\omega_1 + \ldots + a_{l-3}\omega_{l-3} + (a_{l-2} + b)\omega_{l-2} + (a_l + d)\omega_{l-1}\\ &\quad + (b + a_l - d + 2a_{l+1} + \ldots + 2a_{r-1} + a_r)\omega_l,\\ \mu_2 &= (b + a_l + a_{l+1} - d)\omega_1 + (d + a_{l+2})\omega_2 + a_{l+3}\omega_3 + \ldots + a_r\omega_{r-l}.\end{aligned}$$

10. Пусть $1 \le i < l$, $j = r-1$, $0 < b \le a_i \ne 0$, $0 < d \le a_{r-1} \ne 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu_1 &= a_1\omega_1 + \ldots + a_{i-2}\omega_{i-2} + (a_{i-1} + b)\omega_{i-1} + (a_i + a_{i+1} - b)\omega_i + a_{i+2}\omega_{i+1} + \ldots\\ &\quad + a_{l-1}\omega_{l-2} + (a_l + \ldots + a_{r-2} + d)\omega_{l-1} + (b + a_{i+1} + \ldots + a_{r-2} + 2a_{r-1} + a_r)\omega_l,\\ \mu_2 &= (b + a_{i+1} + \ldots + a_l)\omega_1 + a_{l+1}\omega_2 + \ldots + a_{r-3}\omega_{r-l-2}\\ &\quad + (a_{r-2} + a_{r-1} - d)\omega_{r-l-1} + (2d + a_r)\omega_{r-l}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что веса $\mu_2 \notin \Delta$ при $j \ne l+1$. Также при $a_{l+2} + \ldots + a_r \ne 0$ веса μ_2 из пп. 2–3 не принадлежат множеству Δ.

Пусть теперь $G = D_r(K)$.

1. Пусть $b = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \omega|H_1 = a_1\omega_1 + \ldots + a_{l-1}\omega_{l-1} + (a_l + 2a_{l+1} + \ldots + 2a_{r-2} + a_{r-1} + a_r)\omega_l,\\ \mu_2 &= \omega|H_2 = a_{l+1}\omega_1 + a_{l+2}\omega_2 + \ldots + a_r\omega_{r-l}.\end{aligned}$$

2. Пусть $i = l$, $0 < b \le a_l \ne 0$. Тогда

$$\mu_1 = a_1\omega_1 + \ldots + a_{l-2}\omega_{l-2} + (a_{l-1} + b)\omega_{l-1} + (a_l + 2a_{l+1} + \ldots + 2a_{r-2} + a_{r-1} + a_r)\omega_l,$$
$$\mu_2 = (b + a_{l+1})\omega_1 + a_{l+2}\omega_2 + \ldots + a_r\omega_{r-l}.$$

3. Пусть $1 \le i < l$, $0 < b \le a_i \ne 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu_1 = {} & a_1\omega_1 + \ldots + a_{i-2}\omega_{i-2} + (a_{i-1} + b)\omega_{i-1} + (a_i - b + a_{i+1})\omega_i + a_{i+2}\omega_{i+1} + \ldots \\ & + a_l\omega_{l-1} + (b + a_{i+1} + \ldots + a_l + 2a_{l+1} + \ldots + 2a_{r-2} + a_{r-1} + a_r)\omega_l, \\ \mu_2 = {} & (b + a_{i+1} + \ldots + a_{l+1})\omega_1 + a_{l+2}\omega_2 + \ldots + a_r\omega_{r-l}.\end{aligned}$$

4. Пусть $l < j < r - 2$, $0 < d \le a_j \ne 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu_1 = {} & a_1\omega_1 + \ldots + a_{l-2}\omega_{l-2} + (a_{l-1} + a_l + \ldots + a_{j-1} + d)\omega_{l-1} \\ & + (a_l + \ldots + a_{r-2} + a_{r-1} + a_r - d)\omega_l, \\ \mu_2 = {} & a_l\omega_1 + \ldots + a_{j-2}\omega_{j-l-1} + (a_{j-1} + a_j - d)\omega_{j-l} + (d + a_{j+1})\omega_{j-l+1} \\ & + a_{j+2}\omega_{j-l+2} + \ldots + a_r\omega_{r-l}.\end{aligned}$$

5. Пусть $j = r - 2$, $0 < d \le a_{r-2} \ne 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu_1 = {} & a_1\omega_1 + \ldots + a_{l-2}\omega_{l-2} + (a_{l-1} + a_l + \ldots + a_{r-3} + d)\omega_{l-1} \\ & + (a_l + \ldots + a_{r-1} + a_r - d)\omega_l, \\ \mu_2 = {} & a_l\omega_1 + \ldots + a_{r-4}\omega_{r-l-3} + (a_{r-3} + a_{r-2} - d)\omega_{r-l-2} \\ & + (d + a_{r-1})\omega_{r-l-1} + (d + a_r)\omega_{r-l}.\end{aligned}$$

6. Пусть $j = r - 1$, $0 < d \le a_{r-1} \ne 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu_1 = {} & a_1\omega_1 + \ldots + a_{l-2}\omega_{l-2} + (a_{l-1} + a_l + \ldots + a_{r-2} + d)\omega_{l-1} \\ & + (a_l + \ldots + a_{r-1} + a_r - d)\omega_l, \\ \mu_2 = {} & a_l\omega_1 + \ldots + a_{r-3}\omega_{r-l-2} + (a_{r-2} + a_{r-1} - d)\omega_{r-l-1} + (a_{r-2} + d + a_r)\omega_{r-l}.\end{aligned}$$

7. Пусть $1 \le i < l < j < r - 2$, $0 < b \le a_i \ne 0$, $0 < d \le a_j \ne 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu_1 = {} & a_1\omega_1 + \ldots + a_{i-2}\omega_{i-2} + (a_{i-1} + b)\omega_{i-1} + (a_i + a_{i+1} - b)\omega_i + a_{i+2}\omega_{i+1} + \ldots \\ & + (a_l + \ldots + a_{j-1} + d)\omega_{l-1} \\ & + (b + a_{i+1} + \ldots + a_{j-1} - d + 2a_j + \ldots + 2a_{r-2} + a_{r-1} + a_r)\omega_l, \\ \mu_2 = {} & (b + a_{i+1} + \ldots + a_l)\omega_1 + \ldots + a_{j-2}\omega_{j-l-1} + (a_{j-1} + a_j - d)\omega_{j-l} \\ & + (d + a_{j+1})\omega_{j-l+1} + a_{j+2}\omega_{j-l+2} + \ldots + a_r\omega_{r-l}.\end{aligned}$$

8. Пусть $1 \le i < l$, $j = r - 2$, $0 < b \le a_i \ne 0$, $0 < d \le a_{r-2} \ne 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu_1 = {} & a_1\omega_1 + \ldots + a_{i-2}\omega_{i-2} + (a_{i-1} + b)\omega_{i-1} + (a_i + a_{i+1} - b)\omega_i + a_{i+2}\omega_{i+1} + \ldots \\ & + (a_l + \ldots + a_{r-3} + d)\omega_{l-1} \\ & + (b + a_{i+1} + \ldots + a_{r-3} - d + 2a_{r-2} + a_{r-1} + a_r)\omega_l, \\ \mu_2 = {} & (b + a_{i+1} + \ldots + a_l)\omega_1 + \ldots + a_{r-4}\omega_{r-l-3} + (a_{r-3} + a_{r-2} - d)\omega_{r-l-2} \\ & + (d + a_{r-1})\omega_{r-l-1} + (d + a_r)\omega_{r-l}.\end{aligned}$$

9. Пусть $1 \le i < l$, $j = r - 1$, $0 < b \le a_i \ne 0$, $0 < d \le a_{r-1} \ne 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu_1 = {} & a_1\omega_1 + \ldots + a_{i-2}\omega_{i-2} + (a_{i-1} + b)\omega_{i-1} + (a_i + a_{i+1} - b)\omega_i + a_{i+2}\omega_{i+1} + \ldots \\ & + (a_l + \ldots + a_{r-2} + d)\omega_{l-1} + (b + a_{i+1} + \ldots + a_r)\omega_l, \\ \mu_2 = {} & (b + a_{i+1} + \ldots + a_l)\omega_1 + \ldots + a_{r-3}\omega_{r-l-2} + (a_{r-2} + a_{r-1} - d)\omega_{r-l-1} \\ & + (a_{r-2} + d + a_r)\omega_{r-l}.\end{aligned}$$

Заметим, что веса $\mu_2 \notin \Delta$ при $j \neq l+1$. Также при $a_{l+2} + \ldots + a_r \neq 0$ веса μ_2 из пп. 2–3 не принадлежат множеству Δ.

Как и в предыдущем разделе, для доказательства теоремы 5 и следствия 6 используем следствие 1, теорему 2 и лемму 1, а также леммы 3 и 4. $\square$

Таким образом, получены нижние оценки числа композиционных факторов ограничений представлений классических алгебраических групп на подсистемные подгруппы H_1 и H_2, а также нижние оценки числа блоков Жордана максимальной размерности образов определенных унипотентных элементов в соответствующих представлениях рассматриваемых групп. Эти результаты могут быть использованы для решения задач распознавания представлений и линейных групп по наличию матриц определенного вида.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли: гл. IV-VI. М.: Мир, 1972. 334 с.
2. **Супруненко И.Д.** О поведении унипотентных элементов в модулярных представлениях классических групп с большими старшими весами // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 1. С. 27–32.
3. **Стейнберг Р.** Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975. 264 с.
4. **Burness T.C., Ghandour S., Marion C., Testerman D.M.** Irreducible almost simple subgroups of classical algebraic groups // Memoirs of the AMS. 2015. Vol. 236. 110 p. ISBN: 978-1-4704-1046-9
5. **Burness T.C., Ghandour S., Testerman D.M.** Irreducible geometric subgroups of classical algebraic groups // Memoirs of the AMS. 2015. Vol. 239. 100 p. ISBN: 978-1-4704-1494-8
6. **Cavallin M., Testerman D.M.** A new family of irreducible subgroups of the orthogonal algebraic groups // Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B. 2019. Vol. 6, no. 2. P. 45–79. doi: 10.1090/btran/28
7. **Ghandour S.** Irreducible disconnected subgroups of exceptional algebraic groups // J. Algebra. 2010. Vol. 323. P. 2671–2709. doi: 10.1016/j.jalgebra.2010.02.018
8. **Korhonen M.** Reductive overgroups of distinguished unipotent elements in simple algebraic groups. Ph.D. Thesis. Lausanne: EPFL, 2017. 241 p. doi: 10.5075/epfl-thesis-8362
9. **Liebeck M.W., Seitz G.M., Testerman D.M.** Distinguished unipotent elements and multiplicity-free subgroups of simple algebraic groups // Pacific J. Math. 2015. Vol. 279, no. 1–2. P. 357–382. doi: 10.2140/pjm.2015.279.357
10. **Lubeck F.** Small degree representations of finite Chevalley groups in defining characteristic // LMS J. Comput. Math. 2001. Vol. 4. P. 135–169. doi: 10.1112/S1461157000000838
11. **Seitz G.M.** The maximal subgroups of classical algebraic groups // Memoirs of the AMS. 1987. Vol. 365. 286 p. ISBN: 978-1-4704-0781-0 .
12. **Smith S.** Irreducible modules and parabolic subgroups // J. Algebra. 1982. Vol. 75. P. 286–289. doi: 10.1016/0021-8693(82)90076-X
13. **Suprunenko I.D.** On Jordan blocks of elements of order p in irreducible representations of classical groups with p-large highest weights // J. Algebra. 1997. Vol. 191. P. 589–627. doi: 10.1006/jabr.1996.6916
14. **Suprunenko I.D.** The minimal polynomials of unipotent elements in irreducible representations of the classical groups in odd characteristic // Memoirs of the Amer. Math. Soc. 2009. Vol. 200, no. 939. 154 p. ISBN: 978-1-4704-0553-3 .
15. **Suprunenko I.D.** Special composition factors in restrictions of representations of special linear and symplectic groups to subsystem subgroups with two simple components // Тр. Ин-та математики. 2018. Т. 26, № 1. С. 113–133.
16. **Testerman D.M.** Irreducible subgroups of exceptional algebraic groups // Memoirs of the AMS. 1988. Vol. 390. 190 p.

Поступила 30.06.2023
После доработки 10.10.2023
Принята к публикации 16.10.2023

Супруненко Ирина Дмитриевна

д-р физ.-мат. наук, главный науч. сотрудник
Институт математики НАН Беларуси
г. Минск
e-mail: anna@im.bas-net.by

Бусел Татьяна Сергеевна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики НАН Беларуси
г. Минск
e-mail: tbusel@gmail.com

Осиновская Анна Александровна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики НАН Беларуси
г. Минск
e-mail: anna@im.bas-net.by

REFERENCES

1. Bourbaki N. *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4,5 et 6.* Berlin: Springer, 2007, 282 p. ISBN: 978-3-540-34490-2 . Translated to Russian under the title "Gruppy i algebry Li": gl. IV-VI. Moscow: Mir Publ., 1972, 334 p.
2. Suprunenko I.D. On the behaviour of unipotent elements in modular representations of classical groups with large highest weights. *Dokl. Natsional'noi Akademii Nauk Belarusi*, 2009, vol. 53, no. 1, pp. 27–32 (in Russian).
3. Steinberg R. *Lectures on Chevalley groups.* Ser. University Lecture Series. 2016. 160 p. ISBN: 978-1-4704-3105-1 .
4. Burness T.C., Ghandour S., Marion C., Testerman D.M. Irreducible almost simple subgroups of classical algebraic groups. *Memoirs of the AMS*, 2015, vol. 236, 110 p. ISBN: 978-1-4704-1046-9
5. Burness T.C., Ghandour S., Testerman D.M. Irreducible geometric subgroups of classical algebraic groups. *Memoirs of the AMS*, 2015, vol. 239, 100 p. ISBN: 978-1-4704-1494-8
6. Cavallin M., Testerman D.M. A new family of irreducible subgroups of the orthogonal algebraic groups. *Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B.*, 2019, vol. 6, no. 2, pp. 45–79. doi: 10.1090/btran/28
7. Ghandour S. Irreducible disconnected subgroups of exceptional algebraic groups. *J. Algebra*, 2010, vol. 323, pp. 2671–2709. doi: 10.1016/j.jalgebra.2010.02.018
8. Korhonen M. *Reductive overgroups of distinguished unipotent elements in simple algebraic groups.* Ph.D. Thesis, Lausanne: EPFL, 2017, 241 p. doi: 10.5075/epfl-thesis-8362
9. Liebeck M.W., Seitz G.M., Testerman D.M. Distinguished unipotent elements and multiplicity-free subgroups of simple algebraic groups. *Pacific J. Math.*, 2015, vol. 279, no. 1–2, pp. 357–382. doi: 10.2140/pjm.2015.279.357
10. Lubeck F. Small degree representations of finite Chevalley groups in defining characteristic. *LMS J. Comput. Math.*, 2001, vol. 4, pp. 135–169. doi: 10.1112/S1461157000000838
11. Seitz G.M. The maximal subgroups of classical algebraic groups. *Memoirs of the AMS.*, 1987, vol. 365, 286 p. ISBN: 978-1-4704-0781-0 .
12. Smith S. Irreducible modules and parabolic subgroups. *J. Algebra*, 1982, vol. 75, pp. 286–289. doi: 10.1016/0021-8693(82)90076-X
13. Suprunenko I.D. On Jordan blocks of elements of order p in irreducible representations of classical groups with p-large highest weights. *J. Algebra*, 1997, vol. 191, pp. 589–627. doi: 10.1006/jabr.1996.6916
14. Suprunenko I.D. The minimal polynomials of unipotent elements in irreducible representations of the classical groups in odd characteristic. *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, 2009, vol. 200, no. 939, 154 p. ISBN: 978-1-4704-0553-3 .
15. Suprunenko I.D. Special composition factors in restrictions of representations of special linear and symplectic groups to subsystem subgroups with two simple components. *Tr. Instituta Matematiki*, 2018, vol. 26, no. 1, pp. 113–133.

16. Testerman D.M. Irreducible subgroups of exceptional algebraic groups. *Memoirs of the AMS*, 1988, vol. 390, 190 p.

Received June 30, 2023
Revised October 10, 2023
Accepted October 16, 2023

Funding Agency: This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. F21-054).

Irina Dmitrievna Suprunenko, Dr. Phys.-Math. Sci., Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, 220072 Belarus, e-mail: anna@im.bas-net.by .

Tatiana Sergeevna Busel, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, 220072 Belarus, e-mail: tbusel@gmail.com .

Anna Aleksandrovna Osinovskaya, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, 220072 Belarus, e-mail: anna@im.bas-net.by .

Cite this article as: I. D. Suprunenko, T. S. Busel, A. A. Osinovskaya. Special factors in the restrictions of irreducible modules of classical groups to subsystem subgroups with two simple components. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 259–273 .