ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 11 Выпуск 3 (2010)

УДК 519.4

# ПРОБЛЕМА СОПРЯЖЕННОСТИ ПОДГРУПП В КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ ГРУППАХ КОКСТЕРА С ДРЕВЕСНОЙ СТРУКТУРОЙ

В. Н. Безверхний, О. В. Инченко (г. Тула)

Пусть $G$ конечно порожденная группа Кокстера с древесной структурой, заданная копредставлением

$$G = \langle a_1, ...a_n; (a_i)^2, (a_ia_j)^{m_{ij}}, i, j = \overline{1, n}\rangle$$

где $m_{ij}$ - число, соответствующее симметрической матрице Кокстера, причем, при $i \neq j$, $m_{ij} = m_{ji}$ и $m_{ij} \geqslant 2$.

Группе $G$ соответствует конечный связный дерево-граф $\Gamma$ такой, что если вершинам некоторого ребра $e$ графа $\Gamma$ соответствуют образующие $a_i$ и $a_j$, то ребру $e$ соответствует соотношение вида $(a_ia_j)^{m_{ij}} = 1$.

С другой стороны, группу $G$ можно представить как древесное произведение двупорожденных групп Кокстера объединенных по конечным циклическим подгруппам. При этом от графа $\Gamma$ группы $G$ перейдем к графу $\bar{\Gamma}$ следующим образом: вершинам некоторого ребра $\bar{e}$ графа $\bar{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Кокстера на двух образующих $G_{ij} = \langle a_i, a_j; (a_i)^2, (a_j)^2, (a_ia_j)^{m_{ij}}\rangle$ и $G_{ik} = \langle a_i, a_k; (a_i)^2, (a_k)^2, (a_ia_k)^{m_{ik}}\rangle$, а ребру $\bar{e}$ - циклическую подгруппу $\langle a_i \,|(a_i)^2\rangle$.

Рассмотрим свободное произведение $\bar{G}$ двупорожденных групп Кокстера $G_{ij} = \left\langle a_i, a_j;\ (a_i)^2, (a_j)^2, (a_ia_j)^{m_{ij}}\right\rangle$ и $G_{ik} = \left\langle a_i, a_k;\ (a_i)^2, (a_k)^2, (a_ia_k)^{m_{ik}}\right\rangle$, объединенных по циклической подгруппе $\left\langle a_i;\ (a_i)^2\right\rangle$:

$$\bar{G} = \langle a_i,\ a_j,\ a_i',\ a_k;\ (a_i)^2, (a_j)^2,\ (a_i')^2,\ (a_k)^2,\ (a_ia_j)^{m_{ij}},\ (a_i'a_k)^{m_{ik}},\ a_i = a_i'\rangle\ .$$

Слово из группы $\bar{G}$ можно представить единственным образом в виде:

$$g = l_{1g}l_{2g}..l_{ng}K_gr_{ng}..r_{1g} \tag{1}$$

где $r_{tg}$ и ${l_{sg}}^{-1}$ — представители правых классов смежности группы $G_{ij}$ по $\langle a_i \,|(a_i)^2\rangle$ и $G_{ik}$ по $\langle a_i' \,|(a_i')^2\rangle$, причем $r_{tg}, r_{t+1g}$ (аналогично $l_{sg}, l_{s+1g}$) принадлежат разным сомножителям группы $\bar{G}$. $K_g$ — ядро слова $g$.

Если $K_g$ не принадлежит объединяемой подгруппе, то слоги $l_{ng}$ и $r_{ng}$ принадлежат одному сомножителю группы $\bar{G}$, а $K_g$ - другому. В этом случае слоговая длина слова (1) равна $L(g) = 2n + 1$.

Определение 1. *Если в (1)* $l_{1g}l_{2g}..l_{ng} = (r_{ng}..r_{1g})^{-1}$, *то слово*

$$g = r_{1g}..r_{ng}K_g r_{ng}^{-1}..r_{1g}^{-1} \tag{2}$$

*называется трансформой.*

Если $K_g$ принадлежит объединяемой подгруппе, то в (1) слоги $l_{ng}$ и $r_{ng}$ принадлежат разным сомножителям группы $\bar{G}$. В этом случае слоговая длина слова

$$g = l_{1g}l_{2g}..l_{ng}h_g r_{ng}..r_{1g}, \tag{3}$$

где $h_g = K_g$, равна $L(g) = 2n$.

Слово вида (1) будем называть *нетрансформой* нечетной длины, слово вида (3) нетрансформой четной длины.

Определение 2. *Подслово* $l_{1g}l_{2g}..l_{ng}(r_{ng}..r_{1g})$ *называется левой (правой) половиной слов (1), (3). Подслово* $l_{1g}l_{2g}..l_{ng}K_g(K_g r_{ng}..r_{1g})$ *– закрытым начальным (конечным) отрезком.*

Определение 3. *Левая (правая) половина слова*

$$w_i = l_{1w_i}l_{2w_i}..l_{mw_i}K_{w_i}r_{mw_i}..r_{1w_i}$$

*называется изолированной в множестве* $\{w_j\}$, $j \in \overline{1,N}$, *если ни у одного из слов* $w_j^{\varepsilon}$, $\varepsilon = \pm 1$ *множества* $(\{w_j\} \setminus w_i) \cup \left(\left\{w_j^{-1}\right\} \setminus w_i^{-1}\right)$ *нельзя выделить* $l_{1w_i}l_{2w_i}..l_{mw_i}$ $(r_{mw_i}..r_{1w_i})$ *в качестве начального (конечного) подслова, то есть*

$$w_j^{\varepsilon} \neq l_{1w_i}l_{2w_i}..l_{mw_i}l_{m+1w_j}w_{jn}^{\varepsilon} \ \ (w_j^{\varepsilon} \neq w_{j1}^{\varepsilon}r_{m+1w_j}r_{mw_i}..r_{1w_i}).$$

Определение 4. *Конечное множество слов* $W = \{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ *группы* $\bar{G}$ *назовем специальным, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Левая половина нетрансформы из множества* $W$ *изолирована в нем. Если нетрансформа четной длины, то изолирована и левая и правая половины;*

2. *Длину нетрансформы* $w_{ic}$ *нельзя уменьшить, умножая слева и справа на слова из подгруппы, порожденной множеством* $(\{w_i\} \setminus w_{ic})$. *Длину произвольного элемента нельзя уменьшить, умножая на слово* $w$ *длины меньше* $L(w_{ic})$, *принадлежащее подгруппе* $\left\langle \{w_i\}_{i\in\overline{1,N}} \right\rangle$ *;*

3. *Пусть* $w_{i0}^{\varepsilon} = l_{1w_0}l_{2w_0}..l_{nw_0}K_{w_0}r_{nw_0}..r_{j+1w_0}r_{jw_0}..r_{1w_0}$, $(\varepsilon = \pm 1,\ j < n)$ *- нетрансформа из множества* $\{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ *и*

   $\left\{w_{\alpha_i}^{\varepsilon_i} = l_{1w_{\alpha_i}}l_{2w_{\alpha_i}}..l_{nw_{\alpha_i}}K_{w_{\alpha_i}}r_{nw_{\alpha_i}}..r_{jw_0}..r_{1w_0}\right\}_{i=\overline{1,k}}$, $(\varepsilon_i = \pm 1)$ *подмножество нетрансформ из множества* $(\{w_i\} \setminus w_{i0}) \cup \left(\left\{w_i^{-1}\right\} \setminus w_{i0}^{-1}\right)$, *правые половины которых оканчиваются подсловом* $r_{jw_0}..r_{1w_0}$, *тогда если подгруппа*

   $\left\langle \{w_i\}_{i\in\overline{1,N}} \right\rangle \cap r_{1w_0}^{-1}..r_{jw_0}^{-1}Dr_{jw_0}..r_{1w_0} = B$, *где*

$$D = \begin{cases} G_{ij}, \text{ если } r_{j+1w_0} \in G_{ij}; \\ G_{ik}, \text{ если } r_{j+1w_0} \in G_{ik}. \end{cases}$$

*не единична, то* $L(w_{io}u) \geqslant L(w_{io})$, *где* $u \in B$, $L(w_{io}uw_{\alpha_i}^{\varepsilon_i}) \geqslant L(w_{io})$;

4. *Пусть* $w_i = l_{1w_i}..l_{sw_i}l_{s+1w_i}..l_{nw_i}K_{w_i}r_{nw_i}..r_{s+1w_i}r_{sw_i}..r_{1w_i}$ *и* $w_j = l_{1w_j}..l_{sw_j}l_{s+1w_j}..l_{mw_j}K_{w_j}r_{mw_j}..r_{s+1w_j}r_{sw_j}..r_{1w_j}$ *слова из* $\{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ *не обязательно различны,* $m \leqslant n$, $s \leqslant m$, *тогда не существует слова* $g \neq 1$ *длины меньше* $2s$ *из подгруппы* $\left\langle\{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}\right\rangle$ *такого, что если* $l_{1w_i}..l_{sw_i} \neq l_{1w_j}..l_{sw_j}$, *то*

$$gw_i = l_{1w_j}..l_{sw_j}l'_{s+1w_i}..l'_{nw_i}K'_{w_i}r_{nw_i}..r_{s+1w_i}r_{sw_i}..r_{1w_i}\ ,$$

*либо если* $r_{sw_i}..r_{1w_i} \neq r_{sw_j}..r_{1w_j}$, *то*

$$w_ig = l_{1w_i}..l_{sw_i}l_{s+1w_i}..l_{nw_i}K'_{w_i}r'_{nw_i}..r'_{s+1w_i}r_{sw_j}..r_{1w_j},$$

*либо если* $r_{1w_i}^{-1}..r_{sw_i}^{-1} \neq l_{1w_j}..l_{sw_j}$, *то*

$$gw_i^{-1} = l_{1w_j}..l_{sw_j}\left(r'_{s+1w_i}\right)^{-1}..\left(r'_{nw_i}\right)^{-1}\left(K'_{w_i}\right)^{-1}l_{nw_i}^{-1}..l_{1w_i}^{-1}\ ,$$

*либо если* $l_{sw_i}^{-1}..l_{1w_i}^{-1} \neq r_{sw_j}..r_{1w_j}$, *то*

$$w_i^{-1}g = r_{1w_i}^{-1}..r_{nw_i}^{-1}\left(K'_{w_i}\right)^{-1}\left(l'_{nw_i}\right)^{-1}..\left(l'_{s+1,w_i}\right)^{-1}r_{sw_j}.r_{1w_j}\ .$$

Лемма 1. *[2] Всякое конечное множество слов* $\{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ *группы* $\bar{G} = G_{ij} \underset{\langle a_i | a_i^2\rangle}{*} G_{ik}$ *можно через конечное число шагов преобразовать в специальное.*

Пусть $W$ – специальное множество слов. Разобьем его на подмножества следующим образом: подмножеству $M_0$ принадлежат все нетрансформы, а подмножествам $M_i$ трансформы с одинаковыми крыльями, принадлежащие одной подгруппе, сопряженной некоторой группе $G_{ij}$ или $G_{ik}$. Каждое из этих подмножеств порождает подгруппу $(M_i)$, $i = \overline{0,k}$, имеющую вид:

$$(M_i) = r_{1i}^{-1}..r_{ni}^{-1}C_ir_{ni}..r_{1i}.$$

Здесь $C_i$ - подгруппы из $G_{ij}$ или $G_{ik}$, порожденные ядрами трансформ. Упорядочим подгруппы $(M_i)$ по длинам крыльев трансформ. Получим ряд

$$(M_1) \leqslant (M_2) \leqslant ... \leqslant (M_k)\,. \tag{4}$$

Лемма 2. *[2] Ряд (4) можно преобразовать в ряд*

$$(M_1') \leqslant (M_2') \leqslant ... \leqslant (M_k'), \tag{4'}$$

*обладающий следующими свойствами:*

1. $gp\left((M_0),(M_1),...,(M_k)\right) = gp\left((M_0'),(M_1'),...,(M_k')\right)$;
2. *Если подгруппе* $\left(M_j'\right) = r_{1x}^{-1}..r_{nx}^{-1}C_j'r_{nx}..r_{1x}$, $1 \leqslant j \leqslant k'$ *принадлежит трансформа* $u = r_{1x}^{-1}..r_{nx}^{-1}hr_{nx}..r_{1x}$, *где* $h$ *принадлежит объединяемой подгруппе, то среди подгрупп ряда* $(4')$ *имеется подгруппа*

   $$(M_l') = r_{1x}^{-1}..r_{n-1,x}^{-1}C_l'r_{n-1,x}..r_{1x}$$

   *содержащая* $u$;
3. *Если для некоторой трансформы* $u = r_{1x}^{-1}..r_{nx}^{-1}K_xr_{nx}..r_{1x}$, *принадлежащей подгруппе* $\left(M_j'\right) = r_{1x}^{-1}..r_{nx}^{-1}C_j'r_{nx}..r_{1x}$, *и нетрансформы*
   $y = l_{1y}^{-1}..l_{n_1y}^{-1}K_yl_{n_1y}..l_{1y}$ *из* $M_0$, $n_1 \geqslant n$, *(левая половина* $y$ *изолирована) выполняется соотношение* $L(y^{-1}uy) \leqslant L(y)$, *то существует подгруппа* $(M_s')$ *ряда* $(4')$, *содержащая трансформу* $y^{-1}\left(r_{1x}^{-1}..r_{nx}^{-1}K_xr_{nx}..r_{1x}\right)y$, *а если* $L(yuy^{-1}) < L(y)$, *то существует подгруппа* $(M_s')$ *ряда* $(4')$, *содержащая трансформу* $y\left(r_{1x}^{-1}..r_{nx}^{-1}K_xr_{nx}..r_{1x}\right)y^{-1}$;
4. *Если* $\left(M_j'\right) = r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}C_j'r_{n_1x}..r_{1x}$, $(M_s') = r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}r_{n_1+1,y}^{-1}..r_{n_2y}^{-1}C_s'r_{n_2y}..r_{1x}$ - *подгруппы ряда* $(4')$, $n_2 > n_1$, *и подгруппа* $\left(M_j'\right)$ *содержит трансформу* $u = r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}hr_{n_1x}..r_{1x}$, *либо* $u' = r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}Kr_{n_1x}..r_{1x}$, *где* $K = r_{n_1+1,y}^{-1}hr_{n_1+1,y}$, *то существует подгруппа ряда* $(4')$ $(M_k') = r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}r_{n_1+1,y}^{-1}C_k'r_{n_1+1,y}..r_{1x}$, *содержащая в первом случае трансформу* $u$, *во втором -* $u'$;
5. *Если* $(M_s') = r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}C_s'r_{n_1x}..r_{1x}$ *подгруппа из ряда* $(4')$ *и*
   $y^{\varepsilon} = l_{1y}^{-1}..l_{n_2y}^{-1}Kr_{n_2y}..r_{n_1+1,y}r_{n_1x}..r_{1x}$, $(\varepsilon = \pm 1)$ *- элемент специального множества, причем подслово* $r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}r_{n_1+1,y}^{-1}$ *не является изолированной левой половиной некоторой нетрансформы* $w^{\varepsilon}$, $\varepsilon = \pm 1$, *и, если подгруппа* $(M_s')$ *содержит трансформу* $r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}hr_{n_1x}..r_{1x}$ *либо трансформу*
   $r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}Kr_{n_1x}..r_{1x}$, *где* $K = r_{n_1+1,y}^{-1}hr_{n_1+1,y}$, *то существует подгруппа ряда* $(4')$
   $\left(M_j'\right) = r_{1x}^{-1}..r_{n_1x}^{-1}r_{n_1+1,y}^{-1}C_j'r_{n_1+1,y}..r_{1x}$, *содержащая эту трансформу.*

Лемма 3. *[2] Подгруппа* $(M_0)$, *порожденная нетрансформами специального множества – свободна и не содержит трансформ.*

Подгруппу, порожденную специальным множеством $\{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ обозначим через $gp\,(M_0,S)$. Она представляет собой $HNN$ – группу с основой $S$, являющуюся древесным произведением, правильной системой проходных букв которой служат элементы из $M_0$. Подгруппы $(M_0)$ и $\left(M_j'\right)$, $j = \overline{1,k}$, ряда $(4')$ будем называть порождающими подгруппами $\langle w_1,..,w_n\rangle = gp\,(M_0,S)$.

Определение 5. *Произведение* $u_1..u_k$ *назовем "словом" подгруппы* $\langle w_1,..,w_n\rangle = gp\,(M_0,S)$ *группы* $\bar{G} = G_{ij} \underset{\langle a_i | a_i^2\rangle}{*} G_{ik}$, *если*

1. $u_i \neq 1$;
2. $u_i \in \left\{M_0 \cup M_0^{-1}\right\}$ *либо* $u_i$ *принадлежат некоторой подгруппе из ряда* $(4')$;
3. $u_i \neq u_{i+1}^{-1}$ ;
4. $u_i$ *и* $u_{i+1}$ *не содержатся в одной подгруппе ряда* $(4')$;
5. *в* $u_1..u_k$ *нет произведения* $u_iu_{i+1}u_{i+2}$ $(i = \overline{1,k-2})$, *где* $u_i = u_{i+2}^{-1}$, $u_i \in \left\{M_0 \cup M_0^{-1}\right\}$, $u_{i+1} \in \left(M_j'\right)$ *и* $u_iu_{i+1}u_{i+2} \in (M_s')$; $\left(M_j'\right)$, $(M_s')$ - *из ряда* $(4')$.

Лемма 4. *[2] Всякое произведение* $w_{i1}^{\varepsilon_1}w_{i2}^{\varepsilon_2}..w_{in}^{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_j = \pm 1$, *где* $w_{ij}$ - *образующие подгруппы* $\left\langle \{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}\right\rangle$, *через конечное число шагов можно привести к слову* $u_{i1}..u_{ik}$, $k \leqslant n$, *подгруппы* $gp\,(M_0,S) = \left\langle \{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}\right\rangle$.

Определение 6. *Будем говорить, что между словами* $v_1$ *и* $v_2$ *имеет место касание первого, второго или третьего рода, если длина произведения* $v_1v_2$ *соответственно больше, равна или меньше максимальной из длин* $L(v_1)$, $L(v_2)$.

Определение 7. *Слово* $u_1..u_k$ *является простым, если* $L(u_1..u_k) = \max\{L(u_1),..,L(u_k)\}$.

Лемма 5. *[2] Если* $u_1..u_k$ - *слово подгруппы* $gp\,(M_0,S)$, *то* $L(u_1..u_k) \geqslant L(u_i)$, $i = \overline{1,k}$.

Следствие 1. *[2] Если в слове* $u_1..u_k$ *выполнить сокращения в группе* $\bar{G}$, *то в нем сокращение не затронет, по крайней мере, левую половину* $u_1$.

Следствие 2. *[2] Всякое слово подгруппы* $gp\,(M_0,S)$ *может быть представлено в виде произведения простых слов, между которыми имеет место касание первого рода.*

Лемма 6. *[2] Пусть* $\{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}$ - *специальное множество слов группы* $\bar{G}$ *и* $N = \left\langle \{w_i\}_{i\in\overline{1,N}}\right\rangle$ - *подгруппа в* $\bar{G}$. *И пусть* $w_i^{\varepsilon} = l_{1w_i}...l_{nw_i}K_{w_i}r_{nw_i}...r_{1w_i}$ $(\varepsilon = \pm 1)$ – *элемент специального множества,* $v = l_{1w_i}..l_{tw_i}$, $1 \leqslant t \leqslant n$ - *начальное подслово левой половины* $w_i^{\varepsilon}$, *причем,* $v$ *не является изолированной левой половиной* $w_i^{\varepsilon}$. *Тогда, если* $A_{iv} = N \cap l_{1w_i}...l_{tw_i}A_jl_{tw_i}^{-1}...l_{1w_i}^{-1} \neq E$, *где*

$$A_j = \begin{cases} G_{ij}, \text{если } l_{tw_i} \in G_{ik}; \\ G_{ik}, \text{если } l_{tw_i} \in G_{ij}, \end{cases}$$

*то ряд* $(4')$ *содержит подгруппу* $(M_s) = A_{iv}$.

Пусть $H$ - конечно порожденная подгруппа группы $\bar{G}$ порождена двумя различными специальными множествами, то есть $H = gp\,(M_0, S)$ и $H = gp\,(M'_0, S')$, где основа $S$ порождена подгруппами ряда

$$(M_1) \leqslant (M_2) \leqslant ... \leqslant (M_k)\,, \tag{5}$$

а $S'$ порождена подгруппами ряда

$$(M'_1) \leqslant (M'_2) \leqslant ... \leqslant (M'_k)\,, \tag{5'}$$

где $(M_i) = v_i^{-1} C_i v_i$ , $C_i \in G_{ij}$ или $C_i \in G_{ik}$; $\left(M'_j\right) = g_j^{-1} C'_j g_j$ , $C'_j \in G_{ij}$ или $C'_j \in G_{ik}$ .

Лемма 7. *Всякое слово $w$ подгруппы $H = gp\,(M_0, S)$ группы*

$$\bar{G} = G_{ij} \underset{\left\langle a_i \middle| a_i^2 \right\rangle}{*} G_{ik},$$

*являющееся в своей несократимой записи трансформой $w = g^{-1}ag$, где $a \in G_{ij}$ или $a \in G_{ik}$, $g^{-1} = g_1^{-1} g_2^{-1} .. g_n^{-1}$, имеет следующую запись в $u$ – символах подгруппы $gp\,(M_0, S)$: $g^{-1}ag = u_1^{-1} u_2^{-1} .. u_n^{-1} u_0 u_n .. u_1$, где правая часть равенства есть слово и $u_0$ - трансформа, принадлежащая некоторой подгруппе $(M_i)$, $i = \overline{1, k}$ ряда (5).*

Доказательство.

Пусть $w = g^{-1}ag$ слово подгруппы $H = gp\,(M_0, S)$. Покажем, что сопряжением словом из $gp\,(M_0, S)$ можно выбрать слово $g$ таким, что $g^{-1}ag = u_1 u_2 .. u_n$, где $u_1 u_2 .. u_n$ - простое слово.

Пусть $g^{-1}ag = v_1 v_2 .. v_k$, где $v_i$ - простые слова и между $v_i$ и $v_{i+1}$, $i = \overline{1, k-1}$ имеет место касание первого рода. Пусть $k \geqslant 2$ и $L(v_1) \leqslant L(v_k)$. Покажем, что в этом случае $L(g) > \left[\frac{L(v_1)}{2}\right]$.

Если $L(v_1) = 2m_1 + 1$, $L(v_2) = 2m_2 + 1$, то есть $v_1 = b_1 b_2 .. b_{m_1} b_0 b'_{m_1} .. b'_1$ и $v_2 = (b'_1)^{-1} (b'_2)^{-1} .. \left(b'_{m_2}\right)^{-1} b'_0 b''_{m_2} .. b''_1$, тогда сокращение между $v_1$ и $v_2$ не затронет $b_0$ и $b'_0$. Если $L(v_1) = 2m_1 + 1$, а $L(v_2) = 2m_2$, то есть

$$v_2 = (b'_1)^{-1} (b'_2)^{-1} .. \left(b'_{m_2}\right)^{-1} h b''_{m_2} .. b''_1,$$

то сокращение не затронет $b''_{m_2}$. Аналогично, если

$$L(v_1) = 2m_1, \quad v_1 = b_1 b_2 .. b_{m_1} h b'_{m_1} .. b'_1,$$

то сокращение не затронет $b_{m_1}$.

Таким образом, начальный отрезок слова $v_1$ и начальное подслово $g_{\text{л}}^{-1}$ слова $g^{-1} = g_{\text{л}}^{-1} g_{\text{пр}}^{-1}$ лежат в одном смежном классе, следовательно, сопрягая $g^{-1}ag$ словом $v_1$ уменьшаем слоговую длину $g^{-1}$. И можно полагать, что $g^{-1}ag = u_1 u_2 .. u_n$, где $u_1 u_2 .. u_n$ - простое слово.

В [2] показано, что простое слово $u_1 .. u_k$ подгруппы $gp\,(M_0, S)$ может быть одного из следующих видов:

a) слово $u_1..u_k$ содержит нетрансформу максимальной длины, то есть $L(u_i) > L(u_j)$, $1 \leqslant j \leqslant i-1$, $i+1 \leqslant j \leqslant k$, $u_i$ - нетрансформа;

b) слово $u_1..u_k$ содержит нетрансформу $u_i$ и трансформу $u_{i+1}$ максимальной длины, то есть $L(u_i) = L(u_{i+1}) = L(u_i u_{i+1})$, $L(u_i) > L(u_j)$, $1 \leqslant j \leqslant i-1$, $i+2 \leqslant j \leqslant k$;

c) слово $u_1..u_k$ содержит нетрансформы $u_i$ и $u_{i+2}$, и трансформу $u_{i+1}$ со свойствами: $L(u_i) = L(u_{i+2})$, $L(u_i) = L(u_i u_{i+1}) = L(u_i u_{i+1} u_{i+2})$, $L(u_i) > L(u_j)$, $1 \leqslant j \leqslant i-1$, $i+3 \leqslant j \leqslant k$, причем длина слова $u_{i+1}$ может оказаться меньше длины $u_i$, $0 \leqslant L(u_{i+1}) \leqslant L(u_i)$;

d) слово $u_1..u_k$ содержит трансформу $u_i$ максимальной длины.

Выясним, какой вид имеет, интересующее нас слово $g^{-1}ag = u_1 u_2..u_n$.

Пусть слово $u_1 u_2..u_n$ является словом вида (a), то есть $u_1 u_2..u_n = u_1..u_{i-1} u_i u_{i+1}..u_n$, где $u_i$ - нетрансформа максимальной длины. Тогда $L(u_1 u_2..u_{i-1}) < L(u_i)$ и $L(u_{i+1}..u_n) < L(u_i)$.

Так как длина слова $g^{-1}ag$ - нечетна, и $g^{-1}ag = u_1 u_2..u_n$, то $L(g^{-1}ag) = L(u_i)$ и длина $L(u_i)$ также нечетна. Тогда получаем, что умножением слова $u_i$ слева на слово $u_{i+1}..u_n u_1..u_{i-1}$ левую половину нетрансформы $u_i$ можно перевести в левую половину нетрансформы $u_i^{-1}$, $L(u_{i+1}..u_n u_1..u_{i-1}) < L(u_i)$. Но, на основании определения 4(4), это невозможно. Тогда левые половины слов $u_i$ и $u_i^{-1}$ равны, следовательно, $u_i$ - трансформа. Получили противоречие. Таким образом, слово $u_1 u_2..u_n$ не является словом вида (a). Рассуждая аналогично, можно показать, что слово $u_1 u_2..u_n$ не может иметь вид (b).

Пусть слово $u_1 u_2..u_n$ имеет вид (c), то есть

$$u_1 u_2..u_n = u_1..u_{i-1}(u_i u_{i+1} u_{i+2}) u_{i+3}..u_n,$$

где $u_i$ и $u_{i+2}$ - нетрансформы, $u_{i+1}$- трансформа, $L(u_i) = L(u_{i+2})$, $L(u_i) = L(u_i u_{i+1}) = L(u_i u_{i+1} u_{i+2})$, $L(u_i) > L(u_j)$, $1 \leqslant j \leqslant i-1$, $i+3 \leqslant j \leqslant k$. $L(u_i) = L(u_{i+2}) = L(u_i u_{i+1} u_{i+2}) = L(g^{-1}ag)$. Нетрансформы $u_i$ и $u_{i+2}$ имеют нечетную длину. Пусть $u_i \neq u_{i+2}^{-1}$, тогда левая половина $u_i$ не равна левой половине $u_{i+2}^{-1}$ и так как $L(u_1 u_2..u_{i-1}) < L(u_i)$ и $L(u_{i+3}..u_n) < L\left(u_i\right)$, то в силу соотношения $g^{-1}ag = u_1 u_2..u_n$ левую половину $u_i$ можно перевести в левую половину $u_{i+2}^{-1}$ умножением на слово $u_{i+3}..u_n u_1..u_{i-1}$, $L\left(u_{i+3}..u_n u_1..u_{i-1}\right) < L\left(u_i\right)$. Но это противоречит определению 4(4), следовательно, левые половины $u_i$ и $u_{i+2}^{-1}$ равны. Тогда $u_i = u_{i+2}^{-1}$, что противоречит нашему предположению. Таким образом, слово $u_1 u_2..u_n$ может иметь вид (c), но при этом нетрансформы $u_i$ и $u_{i+2}^{-1}$ равны.

Пусть $g^{-1}ag = u_1..u_{i-1}(u_i u_{i+1} u_{i+2}) u_{i+3}..u_n$, $u_i = u_{i+2}^{-1}$ нетрансформы, $L(u_i) > L(u_j)$, $1 \leqslant j \leqslant i-1$, $i+3 \leqslant j \leqslant k$, $0 \leqslant L\left(u_{i+1}\right) \leqslant L\left(u_i\right)$.

Покажем, что $u_1..u_{i-1} u_i = \left(u_{i+2} u_{i+3}..u_n\right)^{-1}$. $(u_1..u_{i-1} u_i) = L\left(u_i\right)$, $L\left(u_{i+2}..u_n\right) = L\left(u_{i+2}\right)$, $\quad L\left(u_1..u_{i-1}\right) < L\left(u_i\right)$, $L\left(u_{i+3}..u_n\right) < L\left(u_{i+2}\right)$.

Из основного равенства $g^{-1}ag = u_1..u_{i-1}u_i..u_n$, получаем, что $u_1..u_{i-1}u_i = g^{-1}K_1g_1$, где $K_1$ — ядро слова, $L(g) = L(g_1)$, $u_{i+2}..u_n = g_1^{-1}K_1g$, $g_1$ — правая половина $u_i = u_{i+2}^{-1}$. Сопряжем слово $g^{-1}ag$ словом $u_1..u_{i-1}u_i$. Получим $u_i^{-1}..u_1^{-1}(g^{-1}ag)u_1..u_i = g_1^{-1}K_1^{-1}g(g^{-1}ag)g^{-1}K_1g_1 = g_1^{-1}K_1^{-1}aK_1g_1 = g_1^{-1}K'g_1$, где $K' = K_1^{-1}aK_1$, $L\left(g_1^{-1}K'g_1\right) \leqslant L(u_i)$.

Таким образом, $g_1^{-1}K'g_1 = u_{i+1}u_{i+2}..u_nu_1u_2..u_i$ и так как $g_1^{-1}$ является неизолированной левой половиной $u_i$ и $g_1^{-1}K'g_1 \in gp(M_0, S)$, то на основании леммы 6, существует подгруппа ряда (5) $(M_j) = g_1^{-1}A_jg_1$, содержащая трансформу $g_1^{-1}K'g_1$. Таким образом, $g_1^{-1}K'g_1 = u_0$, где $u_0 \in (M_j)$. Отсюда следует, что $g^{-1}ag = u_1^{-1}u_2^{-1}..u_n^{-1}u_0u_n..u_1$ и произведение $u_1^{-1}u_2^{-1}..u_n^{-1}u_0u_n..u_1$ - слово.

Рассмотрим случай, когда $u_1u_2..u_n$ - слово вида (d). Трансформа $u_i$ принадлежит некоторой подгруппе $(M_j)$ ряда (5). $L(u_i) > L(u_j)$, $j \neq i$, $L(u_1..u_{i-1}) < L(u_i)$, $L(u_{i+1}..u_n) < L(u_i)$ и $L(u_1..u_{i-1})$, $L(u_{i+1}..u_n)$ - нечетные числа.

Пусть $u_i = v_1^{-1}..v_m^{-1}K_iv_m..v_1$, $g^{-1}ag = g_1g_2..g_kKg_k^{-1}..g_1^{-1}$. Если $L(u_1..u_{i-1}) \leqslant L(u_{i+1}..u_n)$, то $u_1..u_{i-1} = g_1..g_tK_1v_t..v_1$, $u_{i+1}..u_n = v_1^{-1}..v_t^{-1}..v_s^{-1}K_2g_s^{-1}..g_1^{-1}$. Сопрягая $g^{-1}ag$ словом $u_1..u_{i-1}$, получаем $(g')^{-1}Kg' = u_iu_{i+1}..u_nu_1..u_{i-1}$, где $(g')^{-1}$ совпадает с левой половиной $u_i$ и $(g')^{-1}Kg' \in gp(M_0, S)$, поэтому на основании леммы 6, $(g')^{-1}Kg' \in (M_j)$, где $(M_j)$ - подгруппа ряда (5). Следовательно, $(g')^{-1}Kg' = u_0$, $u_0 \in (M_j)$ и $g^{-1}ag = u_1^{-1}u_2^{-1}..u_n^{-1}u_0u_n..u_1$.

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть группа $H$ порождена двумя различными специальными множествами $H = gp(M_0, S)$ и $H = gp(M_0', S')$, где $S$ - древесное произведение подгрупп ряда (5), $S'$ -древесное произведение подгрупп ряда* $(5')$. *Тогда для каждой подгруппы $(M_i) = v_i^{-1}C_iv_i$, $C_i \notin \langle a_i | a_i^2 \rangle$ из (5) существует подгруппа $\left(M_j'\right)$ из* $(5')$ *и слово $w_{ij} \in H$ такие, что $(M_i) \subseteq w_{ij}^{-1}\left(M_j'\right)w_{ij}$.*

Доказательство.

Если подгруппа $(M_i)$ порождена трансформами длины единица, то есть $(M_i) = A_i \subset gp(M_0', S')$, то на основании леммы 6 среди подгрупп ряда (5) содержится подгруппа $(M_j) = A_j{}'$, также порожденная трансформами длины единица так, что $A_i \subseteq A_j'$. Рассуждая аналогично, получим $A_j' \subseteq A_i$, и тогда $A_i = A_j'$ и $w_{ij} = 1$.

Пусть $(M_i) = v_i^{-1}C_iv_i$, где $v_i^{-1}$ - левая половина трансформ, порождающих подгруппу $(M_i)$,

и пусть образующими $(M_i)$ являются $v_i^{-1}K_1v_i$, $v_i^{-1}K_2v_i$,..,$v_i^{-1}K_mv_i$, где $v_i^{-1} = r_1^{-1}r_2^{-1}..r_{k_i}^{-1}$. Будем полагать, что среди элементов $v_i^{-1}K_jv_i$ существует такой, что ядро $K_j$ не сопряжено с объединяемой подгруппой. Пусть $L\left(v_i^{-1}K_jv_i\right) = 2k_i + 1$. Так как $v_i^{-1}K_jv_i \in gp(M_0', S')$, то, на основании леммы 7,

$$v_i^{-1}K_jv_i = u_1^{-1}u_2^{-1}..u_n^{-1}u_{0j}'u_n..u_1, \tag{6}$$

где $1 \leqslant j \leqslant m$, $u_1^{-1}u_2^{-1}..u_n^{-1}u_{0j}'u_n..u_1$ - слово, $u_{0j}'$ - трансформа, принадлежащая некоторой подгруппе $\left(M_j'\right)$ ряда $(5')$.

Покажем, что слова, стоящие справа в соотношении (6) являются простыми. Предположим, что это не так, тогда слово $v_i^{-1}K_jv_i$ равно произведению простых слов $v_i^{-1}K_jv_i = w_1'w_2'..w_t'$, и между $w_i'w_{i+1}'$, $1 \leqslant i \leqslant t-1$, имеет место касание первого рода. Так как $w_i' \in gp\left(M_0', S'\right)$ и $w_i' \in gp\left(M_0, S\right)$, то в подгруппе $gp\left(M_0, S\right)$ слово $w_1'w_2'..w_t'$ будет также представлено в виде произведения не менее чем $t$ простых слов. Но тогда длину крыльев трансформ $v_i^{-1}K_jv_i$ можно укоротить, умножая на слова длины меньше $2k_i$, что невозможно.

Покажем теперь, что трансформы $u_{0j}'$ при любом $j$ все принадлежат одной подгруппе $(M_s')$ ряда $(5')$. Для этого необходимо показать, что все слова (6) одновременно являются словами вида (c) или (d).

Допустим противное. Пусть $v_i^{-1}K_{j1}v_i = u_{1j_1}^{-1}u_{2j_1}^{-1}..\ u_{nj_1}^{-1}u_{0j_1}u_{nj_1}\ ..\ u_{1j_1}$ есть слово вида (c), а $v_i^{-1}K_{j2}v_i = u_{1j_2}^{-1}u_{2j_2}^{-1}\ ..u_{nj_2}^{-1}u_{0j_2}u_{nj_2}..u_{1j_2}$ - слово вида (d). Тогда $L\left(u_{nj_1}\right) > L\left(u_{sj_1}\right)$, $s \neq n$, $L\left(u_{0j_1}\right) \leqslant L\left(u_{nj_1}\right)$, $u_{nj_1}$ - нетрансформа с изолированной правой половиной, $L\left(u_{1j_1}^{-1}u_{2j_1}^{-1}..u_{n-1j_1}^{-1}\right) < L\left(u_{nj_1}\right)$, а трансформа $u_{0j_2}$ удовлетворяет условию $L\left(u_{0j_2}\right) > L\left(u_{sj_2}\right)$, при $s \neq 0$, $L\left(u_{1j_2}^{-1}u_{2j_2}^{-1}..u_{nj_2}^{-1}\right) < L\left(u_{0j_2}\right)$ и так как слова $u_{1j_1}^{-1}u_{2j_1}^{-1}..u_{n-1j_1}^{-1}$ и $u_{1j_2}^{-1}u_{2j_2}^{-1}..u_{nj_2}^{-1}$ принадлежат одновременно подгруппе $gp\left(M_0, S\right)$ и имеют длину меньше $2k_i+1$, то, сопрягая этими элементами трансформы $v_i^{-1}K_jv_i$ мы не уменьшим их длины. А из строения этих слов следует, что их длины не увеличатся. Поэтому можно изолированную левую половину $u_{nj_1}^{-1}$ перевести умножением в левую половину трансформы $u_{0j_2}$, что противоречит определению 4(4).

Предположим, что все слова в (6) имеют вид (c). Тогда $u_{sj_1} = u_{sj_2}$, $s = \overline{1, n}$, иначе возникает противоречие с определением 4(4). Трансформы $u_{0j}$ принадлежат некоторой подгруппе $\left(M_j'\right)$ ряда $(5')$, причем если $u_{nj} = \left(g'\right)^{-1}K_jg''$, где $\left(g'\right)^{-1}$ - неизолированная левая половина, то $(M_s') = \left(g'\right)^{-1}C_sg'$.

Каждое слово $u_{1j_s}^{-1}u_{2j_s}^{-1}..u_{n-1j_s}^{-1}u_{nj_s}^{-1} = v_i^{-1}K_s'g'$. Поэтому, сопрягая левую и правую половину равенства (6) словом $u_{1j_1}^{-1}u_{2j_1}^{-1}..u_{nj_1}^{-1}$, получим

$$
\begin{gathered}
u_{1j_1}u_{2j_1}..u_{nj_1}\left(v_i^{-1}K_jv_i\right)u_{nj_1}^{-1}..u_{2j_1}^{-1}u_{1j_1}^{-1} = g'^{-1}\tilde{K}_jg'\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant m,\\
\left(g'\right)^{-1}\tilde{K}_1g' = u_{0j_1},\\
\left(g'\right)^{-1}\tilde{K}_sg' = u_{nj_1}..u_{1j_1}u_{1j_s}^{-1}u_{2j_s}^{-1}..u_{nj_s}^{-1}u_{0j_s}u_{1j_s}u_{2j_s}..u_{nj_s}u_{nj_1}^{-1}..u_{2j_1}^{-1}u_{1j_1}^{-1}, \quad 1 < j \leqslant m,\\
u_{nj_1}..u_{1j_1}u_{1j_s}^{-1}u_{2j_s}^{-1}..u_{nj_s}^{-1} = \left(g'\right)^{-1}K_s''g',
\end{gathered}
$$

где $\left(g'\right)^{-1}K_s''g' \in (M_s')$. Отсюда $u_{1j_s}^{-1}u_{2j_s}^{-1}..u_{nj_s}^{-1} = u_{1j_1}^{-1}u_{2j_1}^{-1}..u_{nj_1}^{-1}\left(\left(g'\right)^{-1}K_s''g'\right)$.

В результате, используя полученные равенства и заменяя в равенствах (6) подслова $u_{1j_s}^{-1}u_{2j_s}^{-1}..u_{nj_s}^{-1}$ соответственно равным словом $u_{1j_1}^{-1}u_{2j_1}^{-1}..u_{nj_1}^{-1}\left(\left(g_1\right)^{-1}K_s''g'\right)$, получим

$$
v_i^{-1}K_sv_i = u_{1j_1}^{-1}u_{2j_1}^{-1}..u_{nj_1}^{-1}u_{0j_s}'u_{1j_1}u_{2j_1}..u_{nj_1}\,,
$$

где $u_{0j_s}' = \left(\left(g'\right)^{-1}K_s''g_1\right)u_{0j_s}'\left(\left(g_1\right)^{-1}\left(K_s''\right)^{-1}g'\right) \in (M_s')$.

Пусть теперь все слова, стоящие в правых частях равенств (6), являются словами вида (d). Тогда $L\left(u_{1j}^{-1}u_{2j}^{-1}..u_{nj}^{-1}\right) < L\left(u_{0j}\right)$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Пусть $u_{0j} = r_1^{-1}..r_{k_i}^{-1}K_j r_{k_i}..r_1$. Рассмотрим произведение: $u_{01}u_{n1}..u_{11}u_{1j}^{-1}u_{2j}^{-1}..u_{nj}^{-1}u_{0j}$, $1 < j \leqslant m$. Так как его длина не превосходит $L\left(u_{0j}\right) = 2k_i + 1$, то ввиду того, что $u_{01}u_{n1}..u_{11}u_{1j}^{-1}u_{2j}^{-1}..u_{nj}^{-1}u_{0j}$ - простые слова с максимальными элементами $u_{01}$ и $u_{0j}$, $L\left(u_{01}\right) = L\left(u_{0j}\right)$, $u_{n1}..u_{11}u_{1j}^{-1}u_{2j}^{-1}..u_{nj}^{-1} = r_1^{-1}..r_{k_i}^{-1}h_j r_{k_i}..r_1$, где $h_j$ принадлежит некоторой объединяемой подгруппе. Поэтому $u_{1j}^{-1}u_{2j}^{-1}..u_{nj}^{-1} = u_{11}^{-1}..u_{n1}^{-1}u'_{0j}$, где $u'_{0j} \in (M'_s)$, $L\left(u'_{0j}\right) < 2k_i + 1$. Но тогда равенства (6) примут следующий вид:

$$v_i^{-1}K_1v_i = u_{11}^{-1}u_{21}^{-1}..u_{n1}^{-1}u_{01}u_{n1}u_{n-1,1}..u_{11},$$
$$v_i^{-1}K_jv_i = u_{11}^{-1}u_{21}^{-1}..u_{n1}^{-1}u''_{0j}u_{n1}u_{n-1,1}..u_{11},$$

где $1 < j \leqslant m$, $u''_{0j} = u'_{0j}u_{0j}\left(u'_{0j}\right)^{-1} \in (M'_s)$.

Таким образом, мы показали, что для каждой подгруппы $(M_i)$ ряда (5) существует подгруппа ряда $(5')$ и слова $w_{ij} \in H$ такие, что $(M_i) \subseteq w_{ij}^{-1}\left(M'_j\right)w_{ij}$.

Лемма 9. *Пусть группа $H$ порождена двумя различными специальными множествами $H = gp\left(M_0, S\right)$ и $H = gp\left(M'_0, S'\right)$, где $S$ - древесное произведение подгрупп ряда (5), $S'$ - древесное произведение подгрупп ряда $(5')$. Тогда для каждой подгруппы $(M_i) = v_i^{-1}C_iv_i$, $C_i \notin \langle a_i | a_i^2\rangle$ из (5) существует подгруппа $\left(M'_j\right)$ из $(5')$ и $w_{ij} \in H$ такие, что $(M_i) = w_{ij}^{-1}\left(M'_j\right)w_{ij}$.*

Доказательство. На основании леммы 8 для каждой подгруппы $(M_i)$ ряда (5) существует подгруппа ряда $(5')$ и слова $w_{ij} \in H$ такие, что

$$(M_i) \subseteq w_{ij}^{-1}\left(M'_j\right)w_{ij}. \tag{7}$$

Аналогичные соотношения имеют место для подгрупп ряда $(5')$, то есть

$$\left(M'_j\right) \subseteq w_{ji}^{-1}\left(M_i\right)w_{ji}. \tag{8}$$

Используя соотношения (7) и (8), можно построить цепочку вложенных подгрупп наименьшей длины:

$$w_1^{-1}\left(M_{p_1}\right)w_1 \subseteq \left(w'_1\right)^{-1}\left(M'_{q_1}\right)w'_1 \subseteq w_2^{-1}\left(M_{p_2}\right)w_2 \subseteq ..$$
$$... \subseteq \left(w'_s\right)^{-1}\left(M'_{q_s}\right)w'_s \subseteq \left(M_{p_1}\right), \tag{9}$$

где $w_i$, $w'_i$ - элементы подгруппы $H$, $\left(M_{p_j}\right)$, $j = \overline{1,s}$ подгруппы ряда (5), $\left(M'_{q_j}\right)$, $j = \overline{1,s}$, - подгруппы ряда $(5')$.

Из соотношений (9) следует, $w_1^{-1}\left(M_{p_1}\right)w_1s \subseteq \left(M_{p_1}\right)$. Подгруппа $\left(M_{p_1}\right) = v_{p_1}^{-1}C_{p_1}v_{p_1}$, где $C_{p_1} \in G_{ij}$ или $C_{p_1} \in G_{ik}$, Группы $G_{ij}$ и $G_{ik}$ - конечны, и соотношениях (9) всюду знак $\subseteq$ нужно заменить равенством.

Таким образом, лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Пусть $H_1 = gp(M_0, S_1)$ и $H_2 = gp(M_0', S_1')$ две конечно порожденные подгруппы группы $\bar{G}$. Основа $S$ подгруппы $H_1$ порождена подгруппами ряда*

$$(M_1) \leqslant (M_2) \leqslant \ldots \leqslant (M_{k_1}), \tag{10}$$

*основа $S'$ подгруппы $H_2$ порождена подгруппами ряда*

$$(M_1') \leqslant (M_2') \leqslant \ldots \leqslant \left(M_{k_2}'\right) \tag{10'}$$

*Тогда, если $H_1$ и $H_2$ сопряжены в $\bar{G}$, то есть существует $z \in \bar{G}$ такое, что $z^{-1}H_1z = H_2$, то существует $w \in gp(M_0', S')$, такое, что $w^{-1}z^{-1}(M_j)zw = (M_s')$, $j = \overline{1, k_1}$, $s = \overline{1, k_2}$, где $(M_j)$ - подгруппа ряда (10), $(M_s')$ - подгруппа ряда (10′).*

Доказательство. По условию леммы подгруппы $H_1 = gp(M_0, S_1)$ и $H_2 = gp(M_0', S_1')$ сопряжены, то есть существует слово $z \in \bar{G}$ такое, что

$$z^{-1}gp(M_0, S_1)z = gp(M_0', S_1').$$

В результате множество нетрансформ $M_0$ и множество подгрупп ряда (10) подвергнутся преобразованию: $z^{-1}M_0z$, $\{z^{-1}(M_j)z\}_{j=\overline{1,k_1}}$. Приведем образующие подгруппы $z^{-1}gp(M_0, S_1)z$ к специальным образующим. На каждом шаге указанного процесса подгруппы $z^{-1}(M_j)z$, порожденные трансформами одного вида, переходят в сопряженные и, кроме того, чтобы выполнялись условия (2), (3), (4) леммы 2, порождающие подгруппы сопряженные с $z^{-1}(M_j)z$ могут пополняться трансформами. Допустим, что для подгруппы $z^{-1}gp(M_0, S_1)z$ специальное множество построено:

$$z^{-1}gp(M_0, S_1)z = gp(M_0'', S_1''),$$

где подгруппа $S_1''$ порождена подгруппами

$$(M_1'') \leqslant (M_2'') \leqslant \ldots \leqslant \left(M_{k_1'}''\right). \tag{11}$$

Из алгоритма построения подгрупп ряда (11) следует, что каждая подгруппа $z^{-1}(M_j)z$ сопряжена либо некоторой подгруппе ряда (11), либо подгруппе некоторой группы ряда (11). Теперь сопрягаем подгруппу $gp(M_0'', S_1'')$ словом $z$, получаем $gp(M_0, S_1) = zgp(M_0'', S_1'')z^{-1}$. Соответственно сопрягаются подгруппы ряда (11) и слова из $M_0''$. Подвергнем множество образующих подгруппы $zgp(M_0'', S_1'')z^{-1}$ преобразованиям, переводящим их в специальное множество. Через конечное число шагов получим:

$$zgp(M_0'', S_1'')z^{-1} = gp(M_0''', S_1'''),$$

где подгруппа $S_1'''$ порождена подгруппами

$$(M_1''') \leqslant (M_2''') \leqslant \ldots \leqslant \left(M_{k_1'''}'''\right). \tag{12}$$

Каждая подгруппа $z^{-1}(M''_j)z$ сопряжена либо некоторой подгруппе ряда (12), либо подгруппе некоторой подгруппы ряда (12). Таким образом, для подгрупп рядов (10), (11) и (12) имеет место следующее соотношение:

$$\tilde{w}_{ij}^{-1}z^{-1}(M_i)z\tilde{w}_{ij} \subseteq (M''_j),$$

где $(M_i)$ - произвольная подгруппа ряда (10), $(M''_j)$ - некоторая подгруппа ряда (11), $\tilde{w}_{ij} \in z^{-1}gp(M_0, S_1)z = gp(M''_0, S''_1)$, поэтому $\tilde{w}_{ij} = z^{-1}w_{ij}z \in gp(M_0, S_1)$.

С другой стороны, каждая подгруппа $(M''_j)$ ряда (11) сопряжена с некоторой подгруппой из $(M'''_s)$, то есть $\tilde{w}_{js}^{-1}z(M''_j)z^{-1}\tilde{w}_{js} \subseteq (M'''_s)$, где $\tilde{w}_{js} \in gp(M_0, S_1)$. Поэтому имеем:

$$\tilde{w}_{js}^{-1}z\tilde{w}_{ij}^{-1}z^{-1}(M_i)z\tilde{w}_{ij}z^{-1}\tilde{w}_{js} \subseteq \tilde{w}_{js}^{-1}z(M''_j)z^{-1}\tilde{w}_{js} \subseteq (M'''_s), \tag{13}$$

где произведение $\tilde{w}_{js}^{-1}z\tilde{w}_{ij}^{-1}z^{-1} = \tilde{w}_{js}^{-1}z(z^{-1}w_{ij}z)z^{-1} = \tilde{w}_{js}^{-1}w_{ij} \in gp(M_0, S_1)$.

Учитывая, что $gp(M'_0, S'_1) = gp(M''_0, S''_1)$ и $gp(M'''_0, S'''_1) = gp(M_0, S_1)$, можно расширить цепочки вида (13), добавляя подгруппы ряда $(10')$ и заканчивая цепочки вложенных подгрупп подгруппами из ряда (10). В результате для каждой подгруппы $(M_i)$ ряда (10) будем иметь

$$\tilde{w}_s^{-1}z\tilde{w}_{ij}^{-1}z^{-1}(M_i)z\tilde{w}_{ij}z^{-1}\tilde{w}_s \subseteq \tilde{w}_s^{-1}z(M''_j)z^{-1}\tilde{w}_s \subseteq$$

$$\subseteq \tilde{w}_s^{-1}z\tilde{w}_{rp}^{-1}(M'_r)\tilde{w}_{rp}z^{-1}\tilde{w}_s \subseteq w_p^{-1}z(M''_p)z^{-1}w_p \subseteq \tilde{w}_s^{-1}(M'''_l)\tilde{w}_s \subseteq (M_s) \tag{14}$$

где $\tilde{w}_s^{-1}z\tilde{w}_{ij}^{-1}z^{-1} \in gp(M_0, S_1)$

Используя цепочки (14), можно построить цепочку минимальной длины следующего вида:

$$w_{p_1}^{-1}z\tilde{w}_1^{-1}z^{-1}(M_{p_1})z\tilde{w}_1z^{-1}w_{p_1} \subseteq w_{p_1}^{-1}z(M''_{t_2})z^{-1}w_{p_1} \subseteq$$

$$\subseteq w_{p_1}^{-1}z\tilde{w}_3^{-1}(M'_{j_3})\tilde{w}_3z^{-1}w_{p_1} \subseteq ... \subseteq (M_{p_1}). \tag{15}$$

Из которой следует, что $w_{p_1}^{-1}z\tilde{w}_1^{-1}z^{-1}(M_{p_1})z\tilde{w}_1z^{-1}w_{p_1} \subseteq (M_{p_1})$, и так как $w_{p_1}^{-1}z\tilde{w}_1^{-1}z^{-1} \in gp(M_0, S_1)$, то $w_{p_1}^{-1}z\tilde{w}_1^{-1}z^{-1}(M_{p_1})z\tilde{w}_1z^{-1}w_{p_1} = (M_{p_1})$ и в последовательности (15) всюду знак $\subseteq$ нужно заменить на знак $=$. В результате получим:

$$w_{p_1}^{-1}z\tilde{w}_1^{-1}z^{-1}(M_{p_1})z\tilde{w}_1z^{-1}w_{p_1} = w_{p_1}^{-1}z\tilde{w}_3^{-1}(M'_{j_3})\tilde{w}_3z^{-1}w_{p_1}.$$

Откуда $\tilde{w}_1^{-1}z^{-1}(M_{p_1})z\tilde{w}_1 = \tilde{w}_3^{-1}(M'_{j_3})\tilde{w}_3$, где $\tilde{w}_1,\ \tilde{w}_3 \in gp(M'_0, S'_1)$.

Лемма доказана.

Лемма 11. *[4] Пусть $G$ - конечно порожденная группа Кокстера с древесной структурой. Слова $v$ и $w$, длина каждого из которых равна единице в группе Кокстера $G$, сопряжены тогда только тогда, когда существует ломаная, состоящая из ребер дерева-графа $\Gamma$, которая соединяет вершины соответствующие данным образующим группы, и каждому из ребер выделенного пути соответствует соотношение с нечетным числом Кокстера.*

Теорема 1. *В группе $\bar{G}$ разрешима проблема сопряженности подгрупп.*

Доказательство. $H_1 = gp(M_0, S_1)$ и $H_2 = gp(M_0', S_1')$- конечно порожденные подгруппы группы $\bar{G}$. Основа $S$ подгруппы $H_1$ порождена подгруппами ряда

$$(M_1) \leqslant (M_2) \leqslant \ldots \leqslant (M_{k_1}), \tag{10}$$

основа $S'$ подгруппы $H_2$ порождена подгруппами ряда

$$(M_1') \leqslant (M_2') \leqslant \ldots \leqslant \left(M_{k_2}'\right). \tag{10'}$$

Пусть $H_1$ и $H_2$ сопряжены в $\bar{G}$, то есть существует слово $z$ такое, что $z^{-1}H_1z = H_2$ или

$$z^{-1}gp\,(M_0, S)\,z = gp\,(M_0', S'). \tag{16}$$

По лемме 10 существует $w \in gp(M_0',\, S')$, такое, что

$$w^{-1}z^{-1}(M_{i_0})zw = (M_{j_0}'), \tag{17}$$

где $(M_{i_0}) = v_{i_0}^{-1}C_{i_0}v_{i_0}$, $C_{i_0} \in G_{ij}$ или $C_{i_0} \in G_{ik}$, $\left(M_{j_0}'\right) = g_{j_0}^{-1}C_{j_0}'g_{j_0}$, $C_{i_0}' \in G_{ij}$ или $C_{i_0}' \in G_{ik}$. Соотношение (17) перепишем в следующем виде

$$w^{-1}z^{-1}v_{i_0}^{-1}C_{i_0}v_{i_0}zw = g_{j_0}^{-1}C_{j_0}'g_{j_0}.$$

Далее, сопрягая его элементом $g_{j_0}$ получим

$$\left(g_{j_0}w^{-1}z^{-1}v_{i_0}^{-1}\right)C_{i_0}\left(v_{i_0}zwg_{j_0}^{-1}\right) = C_{j_0}'. \tag{18}$$

Перепишем соотношение (17) в виде:

$$\left(g_{j_0}w^{-1}z^{-1}v_{i_0}^{-1}\right)v_{i_0}gp\,(M_0, S)\,v_{i_0}^{-1}\left(v_{i_0}zwg_{j_0}^{-1}\right) = g_{j_0}gp\,(M_0', S')\,g_{j_0}^{-1}. \tag{19}$$

Приведем образующие подгрупп $v_{i_0}gp\,(M_0, S)\,v_{i_0}^{-1}$, $g_{j_0}gp\,(M_0', S')\,g_{j_0}^{-1}$ к специальным образующим. Полученные подгруппы обозначим через $gp\,(M_0'', S'') = H_1'$ и $gp\,(M_0''', S''') = H_2'$ соответственно. При этом основа $S''$ порождена подгруппами ряда $(M_1'') \leqslant (M_2'') \leqslant \ldots \leqslant \left(M_{k_2}''\right)$, основа $S'''$ – подгруппами ряда $(M_1''') \leqslant (M_2''') \leqslant \ldots \leqslant \left(M_{k_2}'''\right)$. Обозначим слово $v_{i_0}zwg_{j_0}^{-1}$ через $\tilde{w}$.

Тогда соотношение (19) примет вид: $\tilde{w}gp\,(M_0'', S'')\,\tilde{w}^{-1} = gp\,(M_0''', S''')$ или $\tilde{w}\,H_1'\tilde{w}_1^{-1} = H_2'$. Слово $\tilde{w}$ будем выбирать наименьшим в двойном классе смежности $gp\,(M_0''', S''')\;\tilde{w}\;gp\,(M_0'', S'')$ или $H_2'\tilde{w}\,H_1'$.

*Случай 1.* Пусть каждая подгруппа рядов (10) и (10′) сопряжена с объединяемой подгруппой. В этом случае соотношение (18) примет вид

$$\left(g_{j_0}w^{-1}z^{-1}v_{i_0}^{-1}\right)a_j\left(v_{i_0}zwg_{j_0}^{-1}\right) = a_j.$$

Тогда слово $\tilde{w} = v_{i_0}zwg_{j_0}^{-1}$ принадлежит централизатору элемента $a_i$. В [4] доказана

Теорема 2. *Пусть $G$ - конечно порожденная группа Кокстера с древесной структурой; слово $w \in G$ такое, что $|w| = 1$, то есть $w = a_i$, $i = \overline{1, n}$. Тогда централизатор элемента $w$ есть подгруппа вида*

$$C(w) = \left\langle \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, .., \tilde{z}_s, w\,;\ \tilde{z}_r^2 = 1\,,\ w^2 = 1,\ r = \overline{1, s}\right\rangle,$$

*где $\tilde{z}_r$ - циклически сократимое слово вида $\tilde{z}_r = z_1 z_2..z_{t-1} z_0 z_{t-1}^{-1}..z_2^{-1} z_1^{-1}$, где $z_i \in G_{ab}$, подслово $z_0$ соответствует замыкающему ребру и $|z_i| = m_{ab} - 1\,,\ i = \overline{0, t-1}$.*

В соответствии с теоремой 2, централизатор элемента $a_i$ в группе $\bar{G}$ будет иметь вид согласно Рис. 1:

1. Если числа $m_{ij}$ и $m_{ik}$ - четные, то $C(a_i) = \left\langle a_i,\, z_1,\, z_2;\ \ a_i^2,\ z_r^2,\ r = \overline{1, 2}\right\rangle$, где $z_1 \in G_{ij}$, $z_2 \in G_{ik}$, $|z_1| = m_{ij} - 1\,,\ |z_2| = m_{ik} - 1\,.$
2. Одно из чисел, например $m_{ij}$, - четное, другое, $m_{ik}$, - нечетное. $C(a_i) = \langle a_i,\, z_1;\ \ a_i^2,\, z_1^2\rangle$, где $z_1 \in G_{ij}$, $|z_1| = m_{ij} - 1\,.$
3. Числа $m_{ij}$ и $m_{ik}$ - нечетные, то $C(a_i) = \langle a_i;\, a_i^2\rangle\,.$

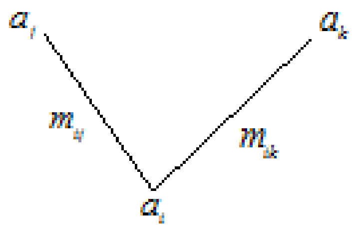


Рис. 1. Фрагмент дерева — графа Г

Случай, когда $C(a_i) = \langle a_i;\, a_i^2\rangle$ тривиален.

Пусть $C(a_i) = \left\langle a_i,\, z_1, z_2;\ \ a_i^2,\ z_r^2,\ r = \overline{1, 2}\right\rangle$.

Пусть $W_1 = \{w_{i1}\}$, $W_2 = \{w_{i2}\}$, $i \in N$ - специальные множества образующих подгрупп $gp\,(M_0'', S'')$ и $gp\,(M_0''', S''')$ соответственно.

Слово $\tilde{w}$ будем выбирать наименьшим в двойном классе смежности $H_2'\tilde{w}\,H_1'$. При этом слово $\tilde{w}$ может иметь вид:

a) $\tilde{w} = (z_1 z_2)^k$;

b) $\tilde{w} = (z_1 z_2)^k\, z_1$;

c) $\tilde{w} = z_1$.

Образующим $a_i$ в данном случае можно пренебречь, так как он принадлежит объединяемой подгруппе.

a) Рассмотрим двойной класс смежности $H_2'(z_1z_2)^k H_1'$. Проведем общие рассуждения, связанные с ограничением показателя степени $k$. Для этого выясним, какие возможны сокращения на стыках.

Если $z_1z_2 \in H_2'$, то то $k = 0$.

Если $(z_1z_2)^t \in H_2'$, где $t$ - наименьший возможный показатель степени, $k < t$. В этом случае, можно найти показатель степени $t'$, при котором $(z_1z_2)^{t'} \notin H_2'$ и показатель степени $t''$, при котором $(z_1z_2)^{t''} \notin H_1'$, тогда $k < \max\{t', t''\}$.

Если $(z_1z_2)^t z_1 \in H_2'$, где $t$ - наименьший возможный показатель степени, $k < t$, то поступаем аналогично.

Если $(z_1z_2)^t z_{1left} \in H_2'$, где $z_{1left}z_{1right} = z_1$, то будем искать пересечение классов смежности $z_{1right}z_2\langle z_1z_2\rangle \cap H_1'$.

Если $(z_1z_2)^t z_1z_{2left} \in H_2'$, где $z_{2left}z_{2right} = z_2$, то будем искать пересечение классов смежности $z_{2right}\langle z_1z_2\rangle \cap H_1'$. Для того, чтобы ограничить длину слова $\tilde{w}$, перепишем общую часть слова $\tilde{w}$ с подгруппой $H_1'$ в $u$ – символах подгруппы $H_1'$ и общую часть слова $\tilde{w}$ с подгруппой $H_2'$ в $u$ – символах подгруппы $H_2'$. Используя метод типов, ограничим длину слова $\tilde{w}$. Количество типов трансформ подгрупп $H_1'$ и $H_2'$ ограничено числами $A_j = \left(2\sum\limits_{w^{(j)}\in W^{(j)}} L(w^{(j)}) + 1\right)^2 \left(\left|\tilde{T}^{(j)}\right|\right)(L(z_1z_2)+1)^2$, $j = \overline{1,2}$, где $\left|\tilde{T}^{(j)}\right|$ - мощность множества $\tilde{T}^{(j)}$ всех типов трансформ подгруппы $H_j'$, пополненное $\beta^{(j)} \notin \bar{G}$, $j = \overline{1,2}$. Таким образом, длину слова $\tilde{w}$ можно ограничить следующим образом: $|\tilde{w}| \leqslant 2A$, где $A = \max\{A_1, A_2\}$.

b)Рассмотрим двойной класс смежности $H_2'(z_1z_2)^k z_1 H_1'$. Рассуждения аналогичны предыдущему случаю (a).

c) Если $\tilde{w} = z_1$, тогда, как и выше, $|z_1| = m_{ij} - 1$, $z_1 \in G_{ij}$. В этом случае $vzwg_{j_0}^{-1} \in G_{ij}$.

Пусть теперь $C(a_i) = \langle a_i, z_1;\ a_i^2,\ z_1^2\rangle$, где $z_1 \in G_{ij},\ \ |z_1| = m_{ij} - 1$. Эквивалентно случаю (c).

<u>*Случай 2.*</u> Пусть подгруппы $C_{i_0}$ и $C_{j_0}'$ содержатся в подгруппе $G_{ij}$ или в подгруппе $G_{ik}$.

<u>*Случай 2.1.*</u> $C_{i_0}$ и $C_{j_0}'$ порождены элементом единичной длины, не принадлежащим объединяемой подгруппе.

1. $C_{i_0} = C_{j_0}' = \left\langle a_j | a_j^2\right\rangle$. В этом случае соотношение (18) примет вид

$$\left(g_{j_0}w^{-1}z^{-1}v_{i_0}^{-1}\right) a_j \left(v_{i_0}zwg_{j_0}^{-1}\right) = a_j.$$

Тогда слово $v_{i_0}zwg_{j_0}^{-1}$ принадлежит централизатору элемента $a_j$. При этом централизатор элемента $a_j$ может иметь вид согласно Рис. 1:

a) Если числа $m_{ij}$ и $m_{ik}$ - четные или $m_{ik}$ - четное, $m_{ik}$ - нечетное, то $C(a_j) = \langle a_j,\, z_1;\ a_j^2,\, z_1^2 \rangle$, где $z_1 \in G_{ij}$, $|z_1| = m_{ij} - 1$. Этот случай рассмотрен выше.

b) Если $m_{ij}$ - нечетное, $m_{ik}$ - четное, тогда

$$C(a_j) = \left\langle a_j,\, z_1 z_2 z_1^{-1};\ a_j^2,\ \left(z_1 z_2 z_1^{-1}\right)^2 \right\rangle,$$

где $z_1 \in G_{ij}$, $|z_1| = m_{ij} - 1$, $z_2 \in G_{ik}$, $|z_2| = m_{ik} - 1$. В этом случае, слово $\tilde{w}$ вполне определяется.

c) Если $m_{ij}$ и $m_{ik}$ - нечетные, то $C(a_j) = \langle a_j;\ a_j^2 \rangle$. Этот случай тривиален.

2. $C_{i_0} = \langle a_j | a_j^2 \rangle$, $C'_{j_0} = \langle a_k | a_k^2 \rangle$. По лемме 11, если $m_{ij}$ и $m_{ik}$ - нечетные, то $\tilde{w} = \tilde{w}_1 \tilde{w}_2$, где $\tilde{w}_1 \in G_{ik}$, $\tilde{w}_2 \in G_{ij}$, причем $|\tilde{w}_1| = m_{ik} - 1$ и $|\tilde{w}_2| = m_{ij} - 1$. Тогда $|\tilde{w}| = |\tilde{w}_1 \tilde{w}_2| \leqslant |\tilde{w}_1| \cdot |\tilde{w}_2| = (m_{ik} - 1)(m_{ij} - 1)$. Пусть $m = \max\{m_{ij},\, m_{ik}\}$. Тогда $|\tilde{w}| < m^2 + 1$.

*Случай 2.2.* Подгруппы $C_{i_0}$ и $C'_{j_0}$ порождены элементами длины больше единицы.

1. Подгруппы $C_{i_0}$ и $C'_{j_0}$ порождены элементами из одной подгруппы, например, $G_{ij}$. В этом случае, в соотношении (18) слово $\tilde{w} = v_{i_0} zwg_{j_0}^{-1}$ также принадлежит подгруппе $G_{ij}$. Тогда длина слова $\tilde{w}$ ограничена длиной определяющего соотношения подгруппы $G_{ij}$: $|\tilde{w}| < 2m_{ij}$.

2. Подгруппы $C_{i_0}$ и $C'_{j_0}$ порождены элементами из разных подгрупп, то есть в соотношении (18) $C_{i_0} \subset G_{ij}$, а $C'_{j_0} \subset G_{ik}$. Этот случай невозможен, так как слова конечного порядка, длины которых больше единицы, принадлежащие разным подгруппам вида $G_{ij}$ не могут быть сопряжены в $\bar{G}$.

*Случай 3.* $H_1 = gp\,(M_0, S)$ и $H_2 = gp\,(M'_0, S')$ основы $S$ и $S'$ равны единице, то есть $H_1 = (M_0)$ и $H_2 = (M'_0)$, и являются свободными подгруппами в $\bar{G}$. И пусть $(M_0) = \langle X_1, X_2, .., X_n \rangle$ и $(M'_0) = \langle Y_1, Y_2, .., Y_n \rangle$. Выясним существует ли слово $z \in \bar{G}$ такое, что справедливо равенство

$$z^{-1}(M_0)z = (M'_0). \tag{20}$$

Элемент $z$ будем выбирать наименьшим в двойном классе смежности $(M_0)z(M'_0)$.

Образующие $\{X_i\}$, $i = \overline{1,n}$ подгруппы $(M_0)$ и образующие $\{Y_i\}$, $i = \overline{1,n}$ подгруппы $(M'_0)$ являются специальными и удовлетворяют следующим условиям:

1. Левая половина каждого $X_i \in \{X_i\}$, $i = \overline{1,n}$, имеющего нечетную длину изолирована в множестве $\{\{X_j\} \setminus X_i\} \cup \{\{X_j^{-1}\} \setminus X_i^{-1}\}$, $j = \overline{1,n}$. Левая и правая половины каждого $X_i \in \{X_i\}$, $i = \overline{1,n}$, имеющего четную длину изолированы в множестве $\{\{X_j\} \setminus X_i\} \cup \{\{X_j^{-1}\} \setminus X_i^{-1}\}$, $j = \overline{1,n}$;
2. Больший начальный и больший конечный отрезки каждого $X_i \in \{X_i\}$, $i = \overline{1,n}$, изолированы в множестве $\{\{X_j\} \setminus X_i\} \cup \{\{X_j^{-1}\} \setminus X_i^{-1}\}$, $j = \overline{1,n}$;
3. Для каждого $X_i \in \{X_i\}$, $i = \overline{1,n}$, справедливо соотношение $L\left(w_1^{\varepsilon_1} X_i w_2^{\varepsilon_2}\right) \geqslant L\left(X_i\right)$, где $w_s \in \{\{X_j\} \setminus X_i\}$, $j = \overline{1,n}$, $s = \overline{1,2}$.

Образующие $\langle Y_1, Y_2, .., Y_n\rangle$ подгруппы $(M_0')$ упорядочим по длинам $1 \leqslant \leq L\left(Y_1'\right) \leqslant ... \leqslant L\left(Y_n'\right)$.

Пусть образующий $X_i \in (M_0)$ - циклически несократим. Если все образующие $(M_0)$ циклически сократимы, то, сопрягая $(M_0)$ некоторым элементом $z_1$, получим подгруппу $z_1^{-1}(M_0)z_1 = (M_0'')$, в которой элемент $z_1^{-1}X_i z_1 = X_i''$ циклически несократим и $L\left(X_i''\right) > 1$.

Предположим, что равенство (20) справедливо, тогда $z^{-1}X_i z = Y_{i1}^{\varepsilon_1} Y_{i2}^{\varepsilon_2} .. Y_{is}^{\varepsilon_s}$, где $\varepsilon_t = \pm 1$, $L\left(z^{-1}X_i\right) > L\left(z\right)$, $L\left(X_i z\right) > L\left(z\right)$, в противном случае, $z$ не удовлетворяет условию минимальности, и поскольку $X_i$ циклически несократим, то, если имеет место сокращение между $z^{-1}$ и $X_i$, то произведение $X_i z$ несократимо. Поэтому

$$z^{-1}X_i z = z^{-1}X_0 X_n z = z_n^{-1}X_0^{-1}X_0 X_n X_0 z_n = z_n^{-1}X_n X_0 z_n \ ,$$

где $X_i = X_0 X_n \in \overline{G}$ и

$$z_n^{-1}X_n X_0 z_n = Y_{i1}^{\varepsilon_1} Y_{i2}^{\varepsilon_2} .. Y_{is}^{\varepsilon_s} \ ,$$

При этом $L\left(z_n\right) \leqslant \left[\frac{L(Y_n)}{2}\right]$, где $Y_n$ - подслово, имеющее максимальную длину.

Предположим, что $L\left(z_n\right) > \left[\frac{L(Y_n)}{2}\right]$. Тогда слово $Y_{i1}^{\varepsilon_1} Y_{i2}^{\varepsilon_2} .. Y_{is}^{\varepsilon_s}$ не является простым, а, следовательно, является произведением простых слов, между которыми имеет место касание первого рода, то есть $Y_{i1}^{\varepsilon_1} Y_{i2}^{\varepsilon_2} .. Y_{is}^{\varepsilon_s} = v_1 v_2 ... v_{p-1} v_p$. Так как $L\left(z_n\right) \leqslant \left[\frac{L(v_p)}{2}\right]$ и больший конечный отрезок $v_p$ не затрагивается сокращением, то длину $z_n$ можно укоротить, умножая справа на $v_p^{-1}$, что противоречит выбору $z$. Поэтому $L\left(Y_{i1}^{\varepsilon_1} Y_{i2}^{\varepsilon_2} .. Y_{is}^{\varepsilon_s}\right) \leqslant L\left(X_i\right) + L\left(Y_n\right) + 1$.

Далее, в подгруппе $(M_0') = \langle Y_1, Y_2, .., Y_n\rangle$ построим множество слов $V = \{v_1, v_2, .., v_m\}$, длина каждого из которых не превосходит $L\left(X_i\right) + L\left(Y_n\right) + 1$. При этом каждое из $v_i$ сопряжено с $X_i$ в группе $\overline{G}$. Пусть все $v_i = v_{i0}^{-1} v_i' v_{i0}$, то есть $v_i'$ циклически несократимы в $\overline{G}$. Трансформируем подгруппу $\langle Y_1, Y_2, .., Y_n\rangle$ элементом $v_{i0}^{-1}$. Получим $v_{i0}^{-1}\left\langle Y_1, Y_2, .., Y_n\right\rangle v_{i0} = \langle Y_1', Y_2' .., Y_n'\rangle$, где $\{Y_1', Y_2' .., Y_n'\}$ - специальное множество образующих подгруппы $v_{i0}^{-1}\left\langle Y_1, Y_2, .., Y_n\right\rangle v_{i0}$. Известно [3], что некоторая циклическая перестановка $X_i$ будет сопряжена с $v_i'$ с помощью элемента $a_i$ из объединяемой подгруппы. Поэтому трансформируем подгруппу $\langle X_1, X_2, .., X_n\rangle$ различными $X_{i,left}$, то есть начальными подсловами $X_{i,left}$ слова $X_i$. В результате получим конечное множество подгрупп

$$\{\langle X_{i,left}^{-1}X_1X_{i,left}, ..., X_{i,left}^{-1}X_{i-1}X_{i,left}, X_{i,left}X_{i,right}, X_{i,left}^{-1}X_{i+1}X_{i,left}, ... \\ \ldots, X_{i,left}^{-1}X_nX_{i,left}\rangle\} = \left\{\langle\{X_i\}\rangle^{X_{i,left}}\right\}.$$

Выделим из этого множества подгруппу, у которой $X_i$ сопряжено с $v_i'$ элементом $a_i$. Трансформируем выделенную подгруппу элементом $a_i$ и проверим выполнимость соотношения:

$$a_i\left\langle\{X_i\}_{i=\overline{1,n}}\right\rangle^{X_{i,left}} a_i \subset \left\langle\{X_i\}_{i=\overline{1,n}}\right\rangle^{v_{i0}^{-1}} \subset a_i\left\langle\{X_i\}_{i=\overline{1,n}}\right\rangle^{X_{i,left}} a_i. \qquad (21)$$

Если соотношение (21) выполняется, то подгруппы $H_1$ и $H_2$ сопряжены. Теорема доказана.

Далее будем рассматривать конечно порожденную группу Кокстера с древесной структурой $G$, представленную в виде свободного произведения двупорожденных групп Кокстера объединенных по конечным циклическим подгруппам: $G = \left\langle \prod\limits_{s=1}^{n} *G_s;\ rel\,G_1, .., rel\,G_s;\ a_i = a_i'\right\rangle$. В этом случае группе Кокстера $G$ соответствует дерево - граф $\bar{\Gamma}$ такой, что, если вершинам некоторого ребра $\bar{e}$ графа $\bar{\Gamma}$ соответствуют группы Кокстера на двух образующих $G_{ij} = \langle a_i,\, a_j;\, (a_i)^2,\, (a_j)^2,\ (a_ia_j)^{m_{ij}}\rangle$ и $G_{ik} = \langle a_i,\, a_k;\, (a_i)^2,\, (a_k)^2,\ (a_ia_k)^{m_{ik}}\rangle$, тогда ребру $\bar{e}$ соответствует циклическая подгруппа $\langle a_i\,|(a_i)^2\rangle$.

Рассмотрим древесное произведение $n-1$ сомножителей, которому соответствует связный дерево-граф $\bar{\Gamma}_{n-1}$, $\bar{\Gamma}_{n-1} \subset \Gamma$. Группу, соответствующую графу $\bar{\Gamma}_{n-1}$ обозначим через $\bar{G}_{n-1}$. Пусть $n$-ый сомножитель - подгруппа $G_{xy}$ соответствует вершине дерева – графа $\bar{\Gamma}$, которая связана с графом $\bar{\Gamma}_{n-1}$ ребром $e_t$. При этом ребру $e_t$ соответствует циклическая подгруппа второго порядка $\langle a_x\,|(a_x)^2\rangle$. Таким образом, группа $G$ представлена как свободное произведение двух групп - $\bar{G}_{n-1}$ и $G_{xy}$, объединенных по циклической подгруппе порядка два $\langle a_x\,|(a_x)^2\rangle$, то есть $G = \bar{G}_{n-1} \underset{\langle a_x|a_x^2\rangle}{*} G_{xy}$.

Слово из группы $G$ можно представить единственным образом в виде:

$$g = l_{1g}l_{2g}..l_{ng}K_gr_{ng}..r_{1g}\ ,$$

где $r_{tg}$ и $l_{sg}^{-1}$- представители правых классов смежности группы $\bar{G}_{n-1}$ или $G_{xy}$ по циклической подгруппе $\langle a_x\,|(a_x)^2\rangle$, причем $r_{tg}$, $r_{t+1g}$ (аналогично $l_{sg}$, $l_{s+1g}$ ) принадлежат разным сомножителям группы $G$. $K_g$ - ядро слова $g$.

Если $K_g$ не принадлежит объединяемой подгруппе, то слоги $l_{ng}$ и $r_{ng}$ принадлежат одному сомножителю группы $G$, а $K_g$ - другому.

Для группы $G = \bar{G}_{n-1} \underset{\langle a_x|a_x^2\rangle}{*} G_{xy}$ понятия трансформы, левой (правой) половины, изолированной половины, специального множества, слова, простого слова определяются также как для группы $\bar{G}$. А также для группы $G = \bar{G}_{n-1} \underset{\langle a_x | a_x^2 \rangle}{*} G_{xy}$ справедливы леммы 1-8, и следствия 1,2.

Пусть $H$ - конечно порожденная подгруппа группы $G$ порождена двумя различными специальными множествами, то есть $H = gp\left(M_0, S\right)$ и $H = gp\left(M_0', S'\right)$, где основа $S$ порождена подгруппами ряда

$$\left(M_1\right) \leqslant \left(M_2\right) \leqslant ... \leqslant \left(M_k\right), \tag{22}$$

а $S'$ порождена подгруппами ряда

$$\left(M_1'\right) \leqslant \left(M_2'\right) \leqslant ... \leqslant \left(M_k'\right), \tag{22'}$$

$\left(M_i\right) = v_i^{-1} C_i v_i$ , $C_i \in \bar{G}_{n-1}$ или $C_i \in G_{xy}$; $\left(M_j'\right) = g_j^{-1} C_j' g_j$, $C_j' \in \bar{G}_{n-1}$ или $C_j' \in G_{xy}$ .

Лемма 12. *Пусть группа $H$ порождена двумя различными специальными множествами $H = gp\left(M_0, S\right)$ и $H = gp\left(M_0', S'\right)$, где $S$ - древесное произведение подгрупп ряда (22), $S'$- древесное произведение подгрупп ряда (22$'$). Тогда для каждой подгруппы $\left(M_i\right) = v_i^{-1} C_i v_i$ из (22) существует подгруппа $\left(M_j'\right)$ из (22$'$) и $w_{ij} \in H$ такие, что $\left(M_i\right) = w_{ij}^{-1}\left(M_j'\right) w_{ij}$, где $C_i$ не принадлежит объединяемой подгруппе.*

Доказательство. Для каждой подгруппы $\left(M_i\right)$ ряда (22) существует подгруппа ряда (22$'$) и слова $w_{ij} \in H$ такие, что

$$\left(M_i\right) \subseteq w_{ij}^{-1}\left(M_j'\right) w_{ij}. \tag{*}$$

Аналогичные соотношения имеют место для подгрупп ряда (22$'$), то есть

$$\left(M_j'\right) \subseteq w_{ji}^{-1}\left(M_i\right) w_{ji}. \tag{**}$$

Используя соотношения (*) и (**), можно построить цепочку вложенных подгрупп наименьшей длины:

$$w_1^{-1}\left(M_{p_1}\right) w_1 \subseteq \left(w_1'\right)^{-1}\left(M_{q_1}'\right) w_1' \subseteq w_2^{-1}\left(M_{p_2}\right) w_2 \subseteq ...$$
$$.. \subseteq \left(w_s'\right)^{-1}\left(M_{q_s}'\right) w_s' \subseteq \left(M_{p_1}\right), \tag{***}$$

где $w_i$, $w_i'$ - элементы подгруппы $H$, $\left(M_{p_j}\right)$, $j = \overline{1, s}$ подгруппы ряда (22), $\left(M_{q_j}'\right)$, $j = \overline{1, s}$, - подгруппы ряда (22$'$).

Из соотношений (***) следует, $w_1^{-1}\left(M_{p_1}\right) w_1 \subseteq \left(M_{p_1}\right)$. Подгруппа $\left(M_{p_1}\right) = v_{p_1}^{-1} C_{p_1} v_{p_1}$, где $C_{p_1} \in \bar{G}_{n-1}$ или $C_{p_1} \in G_{xy}$. Пусть $C_{p_1} \in \bar{G}_{n-1}$. Тогда группа $\left(M_{p_1}\right) = v_{p_1}^{-1} C_{p_1} v_{p_1}$ - бесконечна, и $\left(M_{p_1}\right)$ содержит трансформу $v_{p_1}^{-1} K v_{p_1}$, ядро которой не сопряжено ни одному элементу из объединяемой подгруппы $\langle a_x; a_x^2 \rangle$. Так как $w_1 \in H$, $w_1^{-1} = u_1^{-1} ... u_n^{-1}$, где $u_1^{-1} ... u_n^{-1}$ - слово в $H$, то в $H$ имеет место соотношение: $u_1^{-1} ... u_n^{-1}\left(v_{p_1}^{-1} K v_{p_1}\right) u_n ... u_1 = {v'}_{p_1}^{-1} K_1 {v'}_{p_1}$, в котором $u_1^{-1} ... u_n^{-1}\left(v_{p_1}^{-1} K v_{p_1}\right) u_n ... u_1$ - простое слово и все $u_i$ - трансформы, удовлетворяющие условию: $L\left(u_1\right) \leqslant L\left(u_2\right) \leqslant .. \leqslant L\left(u_n\right) \leqslant 2L\left(v_{p_1}\right) + 1$.

Рассмотрим произведение

$$u_1^{-1}...u_n^{-1}\left(v_{p_1}^{-1}Kv_{p_1}\right)u_n...u_1\left({v'_{p_1}}^{-1}K_1^{-1}v'_{p_1}\right)=1$$

Предположим, что $u_1\notin(M_{p_1})$, тогда $u_1^{-1}...u_n^{-1}\left(v_{p_1}^{-1}Kv_{p_1}\right)u_n...u_1\left(v'^{-1}_{p_1}K_1^{-1}v'_{p_1}\right)$ является словом в подгруппе $H$ и потому не равно единице. Получили противоречие.

Таким образом, $u_1\in(M_{p_1})$. Рассуждая аналогично, можно убедиться, что все $u_i\in(M_{p_1})$. Тогда $w_1^{-1}(M_{p_1})w_1=(M_{p_1})$. Таким образом, в последовательности (***) все знаки $\subseteq$ нужно заменить знаком $=$.

Лемма 12 доказана.

Лемма 13. *Пусть $H_1=gp(M_0,S)$ и $H_2=gp(M'_0,S')$ две конечно порожденные подгруппы группы $G$. Основа $S$ подгруппы $H_1$ порождена подгруппами ряда*

$$(M_1)\leqslant(M_2)\leqslant...\leqslant(M_{k_1}), \tag{23}$$

*основа $S'$ подгруппы $H_2$ порождена подгруппами ряда*

$$(M'_1)\leqslant(M'_2)\leqslant...\leqslant\left(M'_{k_2}\right). \tag{23$'$}$$

*Тогда, если $H_1$ и $H_2$ сопряжены в $G$, то есть существует $z\in G$ такое, что $z^{-1}H_1z=H_2$, то существует $w\in gp(M'_0,\,S')$, такое, что $w^{-1}z^{-1}(M_j)zw=(M'_s)$, $j=\overline{1,k_1}$, $s=\overline{1,k_2}$, где $(M_j)$ — подгруппа ряда (23), $(M'_s)$ — подгруппа ряда (23$'$).*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 10.

Теорема 3. *В конечно порожденной группе Кокстера с древесной структурой разрешима проблема сопряженности подгрупп.*

Доказательство. Пусть $G$ – конечно порожденная группа Кокстера с древесной структурой, представленная в виде свободного произведения двупорожденных групп Кокстера объединенных по конечным циклическим подгруппам:

$$G=\left\langle\prod_{s=1}^{n}*G_s;\,rel\,G_1,..,rel\,G_s;\;a_i=a'_i\right\rangle.$$

Доказательство будем вести методом математической индукции по количеству сомножителей в свободном произведении с объединением. При этом теорема 1 послужит базой индукции. Предположим, что проблема сопряженности разрешима при $n-1$ сомножителях. Как показано выше, представим группу $G$ как свободное произведение двух групп - $\bar{G}_{n-1}$ и $G_{xy}$, объединенных по циклической подгруппе порядка два $\langle a_x|a_x^2\rangle$, то есть $G=\bar{G}_{n-1}\underset{\langle a_x|a_x^2\rangle}{*}G_{xy}$.

По индуктивному предположению в группе $\bar{G}_{n-1}$ проблема сопряженности подгрупп разрешима. Покажем, что в этом случае данная проблема разрешима и в группе $G$.

Пусть $H_1 = gp\,(M_0, S)$ и $H_2 = gp\,(M_0', S')$ - конечно порожденные подгруппы группы $G$. Основа $S$ подгруппы $H_1$ порождена подгруппами ряда (23) основа $S'$ подгруппы $H_2$ порождена подгруппами ряда $(23')$.

Пусть $H_1$ и $H_2$ сопряжены в $G$ то есть существует слово $z$ такое, что $z^{-1}H_1z = H_2$ или

$$z^{-1}gp\,(M_0, S)\,z = gp\,(M_0', S')\,. \tag{24}$$

По лемме 12 существует $w \in gp(M_0',\, S')$, такое, что

$$w^{-1}z^{-1}(M_{i_0})zw = (M_{j_0}'), \tag{25}$$

где $(M_{i_0}) = v_{i_0}^{-1}C_{i_0}v_{i_0}$, $C_{i_0} \in \bar{G}_{n-1}$ или $C_{i_0} \in G_{xy}$, $\left(M_{j_0}'\right) = g_{j_0}^{-1}C_{j_0}'g_{j_0}$, $C_{j_0}' \in \bar{G}_{n-1}$ или $C_{j_0}' \in G_{xy}$. Соотношение (25) перепишем в следующем виде

$$w^{-1}z^{-1}v_{i_0}^{-1}C_{i_0}v_{i_0}zw = g_{j_0}^{-1}C_{j_0}'g_{j_0}.$$

Далее, сопрягая его элементом $g_{j_0}$, получим

$$\left(g_{j_0}w^{-1}z^{-1}v_{i_0}^{-1}\right)C_{i_0}\left(v_{i_0}zwg_{j_0}^{-1}\right) = C_{j_0}', \tag{26}$$

Перепишем соотношение (6) в виде:

$$\left(g_{j_0}w^{-1}z^{-1}v_{i_0}^{-1}\right)v_{i_0}gp\,(M_0, S)\,v_{i_0}^{-1}\left(v_{i_0}zwg_{j_0}^{-1}\right) = g_{j_0}gp\,(M_0', S')\,g_{j_0}^{-1}. \tag{27}$$

Приведем образующие подгрупп $v_{i_0}gp\,(M_0, S)\,v_{i_0}^{-1}$, $g_{j_0}gp\,(M_0', S')\,g_{j_0}^{-1}$ к специальным образующим. Полученные подгруппы обозначим через $gp\,(M_0'', S'') = H_1'$ и $gp\,(M_0''', S''') = H_2'$ соответственно. При этом основа $S''$ порождена подгруппами ряда $(M_1'') \leqslant (M_2'') \leqslant \ldots \leqslant \left(M_{k_2}''\right)$, основа $S'''$ – подгруппами ряда $(M_1''') \leqslant (M_2''') \leqslant \ldots \leqslant \left(M_{k_2}'''\right)$.

Пусть $W_1 = \{w_{i1}\}$, $W_2 = \{w_{i2}\}$, $i \in N$ - специальные множества образующих подгрупп $gp\,(M_0'', S'')$ и $gp\,(M_0''', S''')$ соответственно. Обозначим слово $v_{i_0}zwg_{j_0}^{-1}$ через $\tilde{w}$. Соотношение (27) перепишем в виде: $\tilde{w}gp\,(M_0'',\, S'')\,\tilde{w}^{-1} = gp\,(M_0''',\, S''')$ или $\tilde{w}H_1'\tilde{w}^{-1} = H_2'$.

Слово $\tilde{w}$ будем выбирать наименьшим в двойном классе смежности $H_2'\tilde{w}H_1'$.

*Случай 1.* Пусть каждая подгруппа рядов (23) и $(23')$ сопряжена с объединяемой подгруппой. В этом случае соотношение (26) примет вид:

$$\left(g_{j_0}w^{-1}z^{-1}v_{i_0}^{-1}\right)a_x\left(v_{i_0}zwg_{j_0}^{-1}\right) = a_x.$$

Слово $v_{i_0}zwg_{j_0}^{-1}$ принадлежит централизатору элемента $a_x$.

Пусть $\tilde{w} = z_1z_2..z_n$. Рассматриваем двойной класс смежности $H_2'\tilde{w}H_1'$. Проведем всевозможные сокращения на стыках. Предположим, что после сокращения мы получили $H_2'z_{i,right}z_{i+1}...z_{l-1}z_{l,left}H_1'$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $i \leqslant l \leqslant n$. Далее будем искать пересечение классов смежности $z_{i,right}C\,(a_x) \cap H_1'$ и $C\,(a_x)\,z_{l,left} \cap H_2'$. Данная проблема в группе $G$ разрешима [6]. Нам необходимо ограничить длину слова $\tilde{w}$. Для этого перепишем общую часть слова $\tilde{w}$ с подгруппой $H_1'$ в

$u$ – символах подгруппы $H_1'$ и общую часть слова $\tilde{w}$ с подгруппой $H_2'$ в $u$ – символах подгруппы $H_2'$. Используя метод типов, ограничим длину слова $\tilde{w}$. Количество типов трансформ подгрупп $H_1'$ и $H_2'$ ограничено числами $A_j = \left(2\sum\limits_{w^{(j)}\in W^{(j)}} L(w^{(j)})+1\right)^2 \left(\left|\tilde{T}^{(j)}\right|\right)^2 + \mathrm{M}$, $j=\overline{1,2}$, где $\left|\tilde{T}^{(j)}\right|$ - мощность множества $\tilde{T}^{(j)}$- множества всех типов трансформ подгруппы $H_j'$, пополненное $\beta^{(j)} \notin G$, $j=\overline{1,2}$; $M = \max\limits_{1\leqslant a,b\leqslant n}\{m_{ab}\}$, $m_{ab}$ - числа симметрической матрицы Кокстера группы $G$. Таким образом, длину слова $\tilde{w}$ можно ограничить следующим образом: $|\tilde{w}| \leqslant 2A$, где $A = \max\{A_1, A_2\}$.

Итак, в качестве слова $\tilde{w}$ будем выбирать слова, принадлежащие централизатору $C\left(a_x\right)$, удовлетворяющие полученному ограничению на длину, и проверять справедливость соотношения $\tilde{w}H_1'\tilde{w}^{-1} = H_2'$.

Рассмотрим случай, когда подгруппы $C_{i_0}$ и $C_{j_0}'$ порождены элементом единичной длины, то есть образующим, не принадлежащим объединяемой подгруппе. Пусть $C_{i_0} = \left\langle a_q; a_q^2\right\rangle$ и $C_{j_0}' = \left\langle a_p; a_p^2\right\rangle$, $a_q$, $a_p \in \bar{G}_{n-1}$. В этом случае, используя лемму 11, выясним, сопряжены ли образующие $a_q$ и $a_p$. Если эти образующие не сопряжены, то подгруппы $H_1'$ и $H_2'$ также не сопряжены.

Предположим, что образующие $a_q$ и $a_p$ сопряжены некоторым словом $z_0$, то есть $z_0 a_q z_0^{-1} = a_p$. Тогда в равенстве $\left(g_{j_0} w^{-1} z^{-1} v_{i_0}^{-1}\right) a_q \left(v_{i_0} z w g_{j_0}^{-1}\right) = a_p$ сделаем вставки: $\left(g_{j_0} w^{-1} z^{-1} v_{i_0}^{-1} z_0^{-1}\right) z_0 a_q z_0^{-1} \left(z_0 v_{i_0} z w g_{j_0}^{-1}\right) = a_p$ . Получим:

$$\left(g_{j_0} w^{-1} z^{-1} v_{i_0}^{-1} z_0^{-1}\right) a_p \left(z_0 v_{i_0} z w g_{j_0}^{-1}\right) = a_p,$$

то есть, $g_{j_0} w^{-1} z^{-1} v_{i_0}^{-1} z_0^{-1} = \tilde{w} z_0^{-1} \in C_G\left(a_p\right)$ и слово $\tilde{w}$ будем искать в классе смежности $C_G(a_p) z_0$. Тогда слово $\tilde{w}$ будет иметь вид: $\tilde{w} = h z_0$, где $h \in C_G(a_p)$. Сначала проверяем равенство $z_0 H_1' z_0^{-1} = H_2'$. Если данное равенство выполнено, то подгруппы сопряжены, слово $z_0$ известно. Если же $z_0 H_1' z_0^{-1} \neq H_2'$, то, используя рассуждения , приведенные выше, ищем элемент $h \in C_G(a_p)$.

Если один из образующих принадлежит группе $G_{xy}$ или оба образующих принадлежат группе $G_{xy}$, то используем аналогичные рассуждения.

*Случай 2.* Пусть каждая подгруппа рядов (23) и (23$'$) не сопряжена с элементом единичной длины, то есть $C_{i_0} \subset \bar{G}_{n-1}$ или $C_{i_0} \subset G_{xy}$; $C_{j_0}' \subset \bar{G}_{n-1}$ или $C_{j_0}' \subset G_{xy}$. Рассмотрим случай, когда подгруппы $C_{i_0}$ и $C_{j_0}'$ содержатся в группе $\bar{G}_{n-1}$. Пусть подгруппы $C_{i_0}$ и $C_{j_0}'$ порождены ядрами трансформ порождающих подгрупп рядов (23) и (23$'$). Обозначим их через $A_i$ и $A_j'$. По индуктивному предположению, в группе $\bar{G}_{n-1}$ проблема сопряженности подгрупп разрешима. Если подгруппы $A_i$ и $A_j'$ сопряжены, то существует слово $z_0 \in \bar{G}_{n-1}$ такое, что $z_0^{-1} A_i z_0 = A_j'$. Находим $z_0$ и проверяем равенство $z_0^{-1} H_1' z_0 = H_2'$. Если равенство выполнено, то подгруппы сопряжены. Если же данное равенство не выполнено, то в равенстве (26) сделаем вставки:

$$\left(g_{j_0} w^{-1} z^{-1} v_{i_0}^{-1} z_0\right) z_0^{-1} A_i z_0 \left(z_0^{-1} v_{i_0} z w g_{j_0}^{-1}\right) = A_j'.$$

Учитывая соотношение $z_0^{-1}A_iz_0 = A'_j$, получим

$$\left(g_{j_0}w^{-1}z^{-1}v_{i_0}^{-1}z_0\right)A'_j\left(z_0^{-1}v_{i_0}zwg_{j_0}^{-1}\right) = A'_j,$$

и $h = g_{j_0}w^{-1}z^{-1}v_{i_0}^{-1}z_0 \in N_G\left(C'_{j_0}\right)$.

Пусть $z_0^{-1}H'_1z_0 = H''_1$. В подгруппе $H''_1$ берем любой образующий, слоговой длины больше единицы, $w_0 = b_0w_{0,\text{пр}}$, где $b_0$ - первый слог $w_0$. Тогда $hw_0h^{-1} = Y_1Y_2..Y_n \in H'_2$. $Y_1 \in A'_j$, $Y_2 = a_0Y'_2$, где $a_0$ - первый слог $Y_2$. $a_0$ и $b_0$ принадлежат одному сомножителю, следовательно,

$$hb_0 = Y_1a_0a',$$

где $a' \in \langle a_x; a_x^2\rangle$. Тогда $h = Y_1a_0a'b_0^{-1}$.

Проверяем равенство $hH''_1h^{-1} = H'_2$ или $Y_1a_0a'b_0^{-1}H''_1b_0a'a_0^{-1}Y_1^{-1} = H'_2$. Так как $Y_1 \in H'_2$, то $Y_1$ можно удалить из равенства. Таким образом, в качестве $h$ можем взять $h' = a_0a'b_0^{-1}$.

Слово $h'$ будем искать следующим образом:

Берем все образующие подгруппы $H''_1$, слоговая длина которых больше единицы, и все образующие подгруппы $H'_2$, слоговая длина которых больше единицы. Далее берем первые слоги, принадлежащие одному сомножителю и составляем произведения $a_0a'b_0^{-1}$. Затем проверяем равенство $h'H''_1(h')^{-1} = H'_2$. Если равенство выполнено, то исходные подгруппы сопряжены. Если нет, то составляем следующее слово $h'$ и снова проверяем соотношение $h'H''_1(h')^{-1} = H'_2$.

Случай, когда $C_{i_0} \subset \bar{G}_{n-1}$, а $C'_{j_0} \subset G_{xy}$ невозможен. Действительно, любая подгруппа группы $G_{xy}$ - конечна. Подгруппа группы $\bar{G}_{n-1}$ может быть конечной или бесконечной. Если подгруппа $C_{i_0} \subset \bar{G}_{n-1}$ бесконечна, то сопряжение не возможно. Если подгруппа $C_{i_0} \subset \bar{G}_{n-1}$ конечна, то $C_{i_0} \subset G_s$, где $G_s$ - двупорожденная группа Кокстера, которая является подгруппой группы $\bar{G}_{n-1}$, то сопряжение также не возможно.

Случай, когда $C_{i_0} \subset G_{xy}$, и $C'_{j_0} \subset G_{xy}$ тривиален.

*Случай 3.* Пусть в подгруппах $H_1 = gp\left(M_0, S\right)$ и $H_2 = gp\left(M'_0, S'\right)$ основы $S$ и $S'$ равны единице, то есть $H_1 = (M_0)$ и $H_2 = (M'_0)$, и являются свободными подгруппами в $G$. И пусть $(M_0) = \langle X_1, X_2, .., X_n\rangle$ и $(M'_0) = \langle Y_1, Y_2, .., Y_n\rangle$. Выясним существует ли слово $z \in G$ такое, что справедливо равенство

$$z^{-1}(M_0)z = (M'_0). \tag{28}$$

Элемент $z$ будем выбирать наименьшим в двойном классе смежности $(M_0)z(M'_0)$.

Образующие $\{X_i\}$, $i = \overline{1,n}$ подгруппы $(M_0)$ и образующие $\{Y_i\}$, $i = \overline{1,n}$ подгруппы $(M'_0)$ являются специальными и удовлетворяют следующим условиям:

1. Левая половина каждого $X_i \in \{X_i\}$, $i = \overline{1,n}$, имеющего нечетную длину изолирована в множестве $\{\{X_j\}\setminus X_i\} \cup \left\{\left\{X_j^{-1}\right\}\setminus X_i^{-1}\right\}$, $j = \overline{1,n}$. Левая и правая половины каждого $X_i \in \{X_i\}$, $i = \overline{1,n}$, имеющего четную длину изолированы в множестве $\{\{X_j\}\setminus X_i\} \cup \left\{\left\{X_j^{-1}\right\}\setminus X_i^{-1}\right\}$, $j = \overline{1,n}$;

2. Больший начальный и больший конечный отрезки каждого $X_i \in \{X_i\}$, $i=\overline{1,n}$ изолированы в множестве $\{\{X_j\} \setminus X_i\} \cup \left\{\left\{X_j^{-1}\right\} \setminus X_i^{-1}\right\}$, $j=\overline{1,n}$;

3. Для каждого $X_i \in \{X_i\}$, $i=\overline{1,n}$ справедливо соотношение $L\left(w_1^{\varepsilon_1} X_i w_2^{\varepsilon_2}\right) \geqslant L\left(X_i\right)$, где $w_s \in \{\{X_j\} \setminus X_i\}$, $j=\overline{1,n}$, $s=\overline{1,2}$.

Образующие $\langle Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\rangle$ подгруппы $(M_0')$ упорядочим по длинам $1 \leqslant \leqslant L\left(Y_1'\right) \leqslant \ldots \leqslant L\left(Y_n'\right)$.

Пусть образующий $X_i \in (M_0)$ - циклически несократим. Если все образующие $(M_0)$ циклически сократимы, то, сопрягая $(M_0)$ некоторым элементом $z_1$, получим подгруппу $z_1^{-1}(M_0)z=(M_0'')$, в которой элемент $z_1^{-1}X_iz=X_i''$ циклически несократим и $L\left(X_i''\right)>1$.

Предположим, что равенство (28) справедливо, тогда $z^{-1}X_iz=Y_{i1}^{\varepsilon_1}Y_{i2}^{\varepsilon_2}..Y_{is}^{\varepsilon_s}$, где $\varepsilon_t=\pm1$, $L\left(z^{-1}X_i\right)>L(z)$, $L\left(X_iz\right)>L(z)$, в противном случае, $z$ не удовлетворяет условию минимальности, и поскольку $X_i$ циклически несократим, то, если имеет место сокращение между $z^{-1}$ и $X_i$, то произведение $X_iz$ несократимо. Поэтому

$$z^{-1}X_iz=z^{-1}X_0X_nz=z_n^{-1}X_0^{-1}X_0X_nX_0z_n=z_n^{-1}X_nX_0z_n,$$

где $X_i=X_0X_n \in G$ и $z_n^{-1}X_nX_0z_n=Y_{i1}^{\varepsilon_1}Y_{i2}^{\varepsilon_2}..Y_{is}^{\varepsilon_s}$,

При этом $L\left(z_n\right) \leqslant \left[\frac{L(Y_n)}{2}\right]$, где $Y_n$ - подслово, имеющее максимальную длину.

Предположим, что $L\left(z_n\right) > \left[\frac{L(Y_n)}{2}\right]$. Тогда слово $Y_{i1}^{\varepsilon_1}Y_{i2}^{\varepsilon_2}..Y_{is}^{\varepsilon_s}$ не является простым, а, следовательно, является произведением простых слов, между которыми имеет место касание первого рода, то есть $Y_{i1}^{\varepsilon_1}Y_{i2}^{\varepsilon_2}..Y_{is}^{\varepsilon_s}=v_1v_2...v_{p-1}v_p$. Так как $L\left(z_n\right) \leqslant \left[\frac{L(v_p)}{2}\right]$ и больший конечный отрезок $v_p$ не затрагивается сокращением, то длину $z_n$ можно укоротить, умножая справа на $v_p^{-1}$, что противоречит выбору $z$. Поэтому $L\left(Y_{i1}^{\varepsilon_1}Y_{i2}^{\varepsilon_2}..Y_{is}^{\varepsilon_s}\right) \leqslant L\left(X_i\right)+L\left(Y_n\right)+1$.

Далее, в подгруппе $(M_0')=\langle Y_1, Y_2, .., Y_n\rangle$ построим множество слов $V=\{v_1, v_2, .., v_m\}$, длина каждого из которых не превосходит $L\left(X_i\right)+L\left(Y_n\right)+1$. При этом каждое из $v_i$ сопряжено с $X_i$ в группе $G$. Пусть все $v_i=v_{i0}^{-1}v_i'v_{i0}$, то есть $v_i'$ циклически несократимы в $G$. Трансформируем подгруппу $\langle Y_1, Y_2, .., Y_n\rangle$ элементом $v_{i0}^{-1}$. Получим $v_{i0}^{-1}\langle Y_1, Y_2, .., Y_n\rangle v_{i0}=\langle Y_1', Y_2' .., Y_n'\rangle$, где $\{Y_1', Y_2' .., Y_n'\}$ - специальное множество образующих подгруппы $v_{i0}^{-1}\langle Y_1, Y_2, .., Y_n\rangle v_{i0}$. Известно [3], что некоторая циклическая перестановка $X_i$ будет сопряжена с $v_i'$ с помощью элемента $a_x$ из объединяемой подгруппы. Поэтому трансформируем подгруппу $\langle X_1, X_2, .., X_n\rangle$ различными $X_{i,left}$, то есть начальными подсловами $X_{i,left}$ слова $X_i$. В результате получим конечное множество подгрупп

$$\begin{gathered}\left\{\left\langle X_{i,left}^{-1}X_1X_{i,left}, ..., X_{i,left}^{-1}X_{i-1}X_{i,left}, X_{i,left}X_{i,right}, X_{i,left}^{-1}X_{i+1}X_{i,left}, \ldots\right.\right.\\ \left.\left.\ldots, X_{i,left}^{-1}X_nX_{i,left}\right\rangle\right\}=\left\{\langle\{X_i\}\rangle^{X_{i,left}}\right\}\end{gathered}$$

Выделим из этого множества подгруппу, у которой $X_i$ сопряжено с $v_i'$ элементом $a_x$. Трансформируем выделенную подгруппу элементом $a_x$ и проверим выполнимость соотношения:

$$a_x \left\langle \{X_i\}_{i=\overline{1,n}} \right\rangle^{X_{i,left}} a_x \subset \left\langle \{X_i\}_{i=\overline{1,n}} \right\rangle^{v_{i0}^{-1}} \subset a_x \left\langle \{X_i\}_{i=\overline{1,n}} \right\rangle^{X_{i,left}} a_x. \qquad (29)$$

Если соотношение (29) выполняется, то подгруппы $H_1$ и $H_2$ сопряжены. Теорема доказана.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. Н. Безверхний Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп. // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп и их приложение. ТГПИ им. Л.Н. Толстого, 1983г. с.50-80.

[2] В. Н. Безверхний Решение проблемы вхождения для одного класса групп. //Вопросы теории групп и полугрупп. ТГПИ им. Л.Н. Толстого, 1972г., с. 3-86.

[3] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М: Мир, 1980.

[4] В. Н. Безверхний, О.В. Инченко Централизатор элементов конечного порядка конечно порожденной группы Кокстера с древесной структурой.// Чебышевский сборник. Том 9, выпуск 1(25), 2008, с. 17 - 28.

[5] О. В. Инченко Проблема сопряженности подгрупп в конечно порожденных группах Кокстера с древесной структурой.//Материалы Международной научной конференции “Современные проблемы математики, механики, информатики” Тула, 2008, с. 6.

[6] В. Н. Безверхний, О. В. Инченко Проблема пересечения конечно порожденных подгрупп в группах Кокстера с древесной структурой.// Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. - 2009. - Выпуск 2. - С.16-31.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого,
Тульский государственный университет
Поступило 12.07.10