А. А. Килин, Обобщение тождества Лагранжа и новые интегралы движения, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2008, выпуск 3, 69–74

https://www.mathnet.ru/vuu128

МЕХАНИКА 2008. Вып. 3

УДК 531.011

© *А. А. Килин*

ОБОБЩЕНИЕ ТОЖДЕСТВА ЛАГРАНЖА И НОВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

В данной работе рассматриваются системы материальных точек в евклидовом пространстве, взаимодействующих как друг с другом, так и с внешним полем. В частности, рассматриваются системы частиц, взаимодействие между которыми описывается однородным потенциалом степени однородности $\alpha = -2$. Такого рода системы рассматривались еще Ньютоном и в более систематической форме — Якоби. Для этих систем существует дополнительная скрытая симметрия, которой соответствует первый интеграл движения, называемый нами интегралом Якоби. Данный интеграл указывался ранее в различных работах, начиная с Якоби, однако мы приводим его в более общем виде. Кроме того, нами была указана новая нелинейная алгебра интегралов, включающая интеграл Якоби. В статье также приводится ряд обобщений тождества Лагранжа для систем с однородным потенциалом степени однородности $\alpha = -2$. А также указаны новые интегралы движения для этих обобщений.

Ключевые слова: тождество Лагранжа, многочастичная система, первый интеграл, интегрируемость, алгебра интегралов.

§ 1. Натуральная система с однородным потенциалом степени $\alpha = -2$

Рассмотрим натуральную систему с потенциалом $U_\alpha(\boldsymbol{r})$, являющимся однородной функцией степени однородности α по переменным r_i, $i = 1, \ldots, N$:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{m_i} + U_\alpha(\boldsymbol{r}). \tag{1.1}$$

Как известно, для потенциала $U_\alpha(\boldsymbol{r})$ справедливо тождество Эйлера

$$(\boldsymbol{r}, \frac{\partial U_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}}) = \alpha U_\alpha. \tag{1.2}$$

Эволюция центрального момента инерции $I = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i r_i^2$ для таких систем описывается *формулой Лагранжа*

$$\ddot{I} = 4H - 2(\alpha + 2)U_\alpha. \tag{1.3}$$

Некоторые обобщения формулы Лагранжа на системы со связями, на случай, когда потенциальная энергия квазиоднородна по координатам, а также на континуум взаимодействующих частиц, можно найти в недавней работе [10].

В рассматриваемом случае $\alpha = -2$ формула Лагранжа упрощается, при этом уравнение для момента инерции может быть проинтегрировано явно:

$$I(t) = 2Ht^2 + at + b, \tag{1.4}$$

здесь a и b — константы интегрирования. Из (1.4) следует восходящее к Якоби утверждение для системы N частиц с потенциалом $U_{-2}(\boldsymbol{r})$.

Утверждение 1 (Якоби). *В случае отрицательных энергий $H < 0$ все частицы системы столкнутся за конечное время, а в случае положительной энергии $H > 0$ по крайней мере одно взаимное расстояние между телами будет бесконечно возрастать при $t \to \pm\infty$.*

Константы интегрирования a и b являются неавтономными (явно зависящими от времени) интегралами движения. Впервые на их существование указал Якоби [8], при исследовании задачи трех тел на прямой с потенциалом $U = \sum\limits_{i,j=1, i>j}^{N} \frac{m_i m_j}{(x_i - x_j)^2}$. В явном виде для произвольного потенциала $U = U_{-2}(\boldsymbol{r})$ интегралы a и b записываются следующим образом:

$$a = 2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) - 4Ht, \qquad b = 2Ht^2 - 2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})t + I, \tag{1.5}$$

где H — гамильтониан системы.

Заметим, что при $\alpha = -2$ на фиксированном уровне интеграла энергии формула Лагранжа (1.3) принимает вид уравнения Ньютона с постоянной силой. Данное уравнение допускает очевидный интеграл энергии

$$h = \frac{1}{2}\dot{I}^2 - 4IH = \frac{a^2}{2} - 4bH, \tag{1.6}$$

который будет являться интегралом движения и для всей системы. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Натуральная система* (1.1) *с потенциалом* $U_{-2}(\boldsymbol{r})$ *допускает первый интеграл движения*

$$J = -h/2 = 2IH - (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})^2, \tag{1.7}$$

который можно интерпретировать как энергию радиального движения рассматриваемой системы.

Отметим, что интеграл (1.7) связан со скрытой симметрией задачи, которой не соответствует никакая очевидная группа преобразований фазового пространства.

Исторический комментарий 1. Впервые интеграл (1.7) был получен Якоби [9] при исследовании задачи о движении материальной точки в $\mathbb{R}^3$ под действием центральных сил с добавлением произвольного однородного потенциала степени однородности $\alpha = -2$, то есть

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^2 + V(|\boldsymbol{r}|) + U_{-2}(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{p}, \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3. \tag{1.8}$$

В дальнейшем рядом авторов [5, 11, 12, 17] с помощью построения представления Лакса была показана интегрируемость системы Калоджеро–Мозера и некоторых ее обобщений, которые также входят в рассматриваемый нами класс систем. Однако интеграл (1.7) для этих систем явно указан не был, хотя и содержится в полученном представлении Лакса.

В наиболее общем виде для произвольного однородного потенциала степени однородности $\alpha = -2$ интеграл (1.7) впервые был приведен Албуи и Шенсине в работе [1].

Вообще, добавки к потенциалу вида $U(\boldsymbol{r}) \sim |\boldsymbol{r}|^{-2}$ постоянно рассматривались в небесной механике в качестве поправочных членов, необходимых для объяснения некоторых наблюдений, не укладывающихся в теорию Ньютона. В частности, поправки к потенциалу вида $|\boldsymbol{r}|^{-2}$ использовал А. Эйнштейн при своем объяснении смещения перигелия Меркурия. Интересно, что потенциалы степени однородности $\alpha = -2$ также возникают в задаче о движении газообразных эллипсоидов [6, 7].

Приведем теперь наиболее общий вид интеграла (1.7), обобщающий как случай Якоби (1.8), так и результат Албуи и Шенсине.

Теорема 2. *Натуральная система* (1.1) *с потенциалом*

$$U(\boldsymbol{r}) = U_{-2}(\boldsymbol{r}) + V(I) \tag{1.9}$$

допускает первый интеграл движения

$$J = 2I(H - V) - (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})^2. \tag{1.10}$$

Доказательство. Вычислим вторую производную I по времени в силу рассматриваемой системы

$$\ddot{I} = 4(H - V) - 4I\frac{\partial V}{\partial I}. \tag{1.11}$$

На фиксированном уровне интеграла энергии $H = \text{const}$ снова получаем систему с одной степенью свободы и уравнением ньютоновского типа. При этом интеграл (1.10) с точностью до константы совпадает с энергией системы (1.11), а явная зависимость $I(t)$ задается квадратурой

$$t + t_0 = \int \frac{dI}{2\sqrt{-J + 2I(H - V)}}. \tag{1.12}$$

□

§ 2. Задача N тел с однородным потенциалом степени -2, зависящим от взаимных расстояний

Рассмотрим задачу N тел, потенциал взаимодействия между которыми зависит только от взаимных расстояний и одновременно является однородной функцией степени однородности $\alpha = -2$, то есть

$$H = \frac{1}{2}\sum \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{m_i} + U_{-2}(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|). \tag{2.1}$$

Здесь ограничимся случаем трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$. Обобщение на случаи большей размерности не представляет никаких трудностей и может быть сделано, например, следуя [18]. В рассматриваемом случае справедлива следующая

Теорема 3. *Система* (2.1), *описывающая движение N тел в $\mathbb{R}^3$ с однородным потенциалом взаимодействия степени однородности $\alpha = -2$, допускает десять функционально независимых автономных интегралов движения*

$$\begin{gathered}\boldsymbol{P} = \sum \boldsymbol{p}_i, \qquad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{P}\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i) - 2H\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{r}_i,\\ \boldsymbol{M} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i, \qquad J = 2IH - \Big(\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i)\Big)^2.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Доказательство. Потенциал рассматриваемой задачи зависит от взаимных расстояний между телами. Следовательно, система (2.1) допускает классические интегралы полного импульса $\boldsymbol{P}$ и полного момента импульса $\boldsymbol{M}$. Существование интеграла J следует из теоремы 2 настоящей статьи. Таким образом, для доказательства теоремы необходимо предъявить еще три интеграла независимых с уже указанными.

Для рассматриваемого потенциала уравнения движения обладают неавтономными интегралами движения:

$$\begin{gathered}a = 2\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i) - 4Ht, \quad b = 2Ht^2 - 2\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i)t + I,\\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{P}}{\sum m_i}t,\end{gathered} \tag{2.3}$$

где $\boldsymbol{R}$ — радиус-вектор центра масс системы тел. Исключая время из различных пар интегралов a и c_i, помимо уже известных интегралов $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{M}$ и J, получим еще три новых автономных интеграла:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{P}\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i) - 2H\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{r}_i. \tag{2.4}$$

Независимость интегралов (2.2) легко показать явно, посчитав соответствующий якобиан.

Скобки Пуассона интегралов (2.2) имеют вид

$$\begin{gathered}\{M_\mu,\, M_\nu\} = \varepsilon_{\mu\nu\rho}M_\rho, \quad \{M_\mu,\, S_\nu\} = \varepsilon_{\mu\nu\rho}S_\rho, \quad \{M_\mu,\, P_\nu\} = \varepsilon_{\mu\nu\rho}P_\rho, \quad \{M_\mu,\, J\} = 0,\\ \{S_\mu,\, S_\nu\} = S_\mu P_\nu - P_\mu S_\nu, \quad \{S_\mu,\, P_\nu\} = P_\mu P_\nu - 2H\left(\sum m_i\right)\delta_{\mu\nu}, \quad \{S_\mu,\, J\} = -2JP_\mu,\\ \{P_\mu,\, P_\nu\} = 0, \quad \{P_\mu,\, J\} = 2S_\mu.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Как видно из (2.5), получившаяся алгебра интегралов является квадратичной. Ранг этой пуассоновой структуры равен восьми, следовательно, данная алгебра обладает двумя функциями Казимира:

$$\begin{gathered}K_1 = (\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{S} - 2H\left(\sum m_i\right)\boldsymbol{M})^2,\\ K_2 = \boldsymbol{S}^2 + J\boldsymbol{P}^2 - 2(\boldsymbol{M},\, \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{S}) + 2H\left(\sum m_i\right)(\boldsymbol{M}^2 - J).\end{gathered} \tag{2.6}$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 4. *Уравнения движения системы* (2.1), *описывающие движение N тел в $\mathbb{R}^3$ с потенциалом парного взаимодействия являющимся однородной функцией степени однородности $\alpha = -2$, допускают редукцию на шесть степеней свободы с помощью интегралов* (2.2).

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно предъявить шесть первых интегралов в инволюции. В качестве первых двух из них берутся функции Казимира (2.6), а оставшиеся четыре вводятся как координаты Дарбу на уровне функций Казимира алгебры интегралов. В рассматриваемом случае в качестве таких координат можно выбрать интегралы J, $\boldsymbol{M}^2$, M_3 и

$$G = \frac{\boldsymbol{S}^2 + J\boldsymbol{P}}{2H}. \tag{2.7}$$

Нетрудно показать, что приведенные интегралы коммутируют между собой, следовательно, система (2.1) допускает редукцию на шесть степеней свободы. □

§ 3 Обобщение тождества Лагранжа и интеграла Якоби

Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum\frac{\boldsymbol{p}_i^2}{m_i} + U_{-2}(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|) + V(I,\, \boldsymbol{R}), \qquad \boldsymbol{r}_i,\, \boldsymbol{p}_i \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

где $U_{-2}(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|)$ — однородная функция степени однородности $\alpha = -2$, зависящая только от взаимных расстояний $|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|$, $i, j = 1, \ldots, N$, а $V(I,\, \boldsymbol{R})$ — произвольная функция момента инерции I и радиус-вектора центра масс $\boldsymbol{R}$. Запишем уравнения эволюции I и $\boldsymbol{R}$, обобщающие тождество Лагранжа: (1.3)

$$\begin{cases} \ddot{I} = 4(H - V) - 4I\dfrac{\partial V}{\partial I} - 2(\boldsymbol{R},\, \dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{R}}),\\ \ddot{\boldsymbol{R}} = -2\dfrac{\partial V}{\partial I}\boldsymbol{R} - \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{R}},\end{cases} \tag{3.2}$$

где $\mu = \sum m_i$ — суммарная масса всех тел. Как видим, получившиеся уравнения отделились от общей системы и могут быть проинтегрированы отдельно. Следующая теорема описывает ряд частных случаев функции $f(I,\, \boldsymbol{R})$, при которых система (3.2) (а следовательно, и общая система) допускает дополнительные интегралы движения.

Теорема 5. *Система* (3.1) *допускает дополнительные интегралы движения в следующих случаях*

1. *При $V(I,\, \boldsymbol{R}) = f(I)$ система* (3.1) *допускает дополнительные интегралы*

$$\begin{gathered} J = 4(H - f)I - \frac{1}{2}\dot{I}^2,\\ G_i = IP_i^2 - \mu P_i R_i \dot{I} + 2\mu^2 R_i^2 (H - f), \quad i = 1, \ldots, n,\end{gathered} \tag{3.3}$$

где $\boldsymbol{P} = \mu\dot{\boldsymbol{R}}$.

2. *При* $V(I,\, \boldsymbol{R}) = kI + f(\boldsymbol{R})$, *где* k *— произвольный параметр, система* (3.1) *допускает дополнительный интеграл*
$$F = \frac{1}{2}\boldsymbol{P}^2 + k\boldsymbol{R}^2 + \frac{1}{\mu}f(\boldsymbol{R}). \tag{3.4}$$

3. *При* $V(I,\, \boldsymbol{R}) = f(x) + g(\boldsymbol{R})$, *где введена новая переменная* $x = \mu I - \mu^2\boldsymbol{R}^2$, *система* (3.1) *допускает дополнительные интегралы*
$$\begin{gathered} F_1 = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{\mu}g(\boldsymbol{R}), \\ F_2 = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - 4\mu x(H - f(x) - \mu F_1). \end{gathered} \tag{3.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Существование первого интеграла (3.3) следует из теоремы 2 настоящей статьи. А интегралы G_i являются аналогами интеграла (2.7) для различных пар уравнений
$$\begin{cases} \ddot{I} = 4(H - f) - 4I\dfrac{\partial f}{\partial I}, \\ \ddot{R}_i = -2\dfrac{\partial f}{\partial I}R_i, \end{cases} \tag{3.6}$$
на которые в данном случае разделяется система (3.2).

2. В этом случае второе из уравнений (3.2) принимает вид уравнения Ньютона
$$\ddot{\boldsymbol{R}} = -2k\boldsymbol{R} - \frac{1}{\mu}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{R}} \tag{3.7}$$
и допускает очевидный интеграл энергии (3.4).

3. Запишем уравнения (3.2) в переменных $x,\, \boldsymbol{R}$:
$$\begin{cases} \ddot{x} = 4\mu(H - f(x) - g(\boldsymbol{R})) - 4\mu x\dfrac{\partial f}{\partial x} - 2\mu^2\dot{\boldsymbol{R}}^2, \\ \ddot{\boldsymbol{R}} = -\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial g}{\partial \boldsymbol{R}}. \end{cases} \tag{3.8}$$
Так же как и в предыдущем пункте, второе уравнение допускает интеграл энергии
$$F_1 = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{\mu}g(\boldsymbol{R}). \tag{3.9}$$
Выразив $\dot{\boldsymbol{R}}^2$ через полученный интеграл F_1 и подставив в первое уравнение (3.8), опять получим уравнение типа уравнения Ньютона:
$$\ddot{x} = 4\mu(H - f(x) - x\frac{\partial f}{\partial x} - \mu F_1), \tag{3.10}$$
которое допускает интеграл
$$F_2 = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - 4\mu x(H - f(x) - \mu F_1). \tag{3.11}$$
□

Приведем теперь ряд результатов по интегрируемости некоторых задач о движении N тел на прямой, следующих из изложенной выше теоремы.

Следствие 1. *Задача трех тел на прямой с потенциалом* $U = U_{-2}(|x_i - x_j|) + f(I)$ *допускает два дополнительных интеграла движения и является интегрируемой.*

Следствие 2. *Задача двух тел на прямой с потенциалом* $U = U_{-2}(|x_1 - x_2|) + kI + f(\boldsymbol{R})$ *допускает дополнительный интеграл движения и является интегрируемой.*

Следствие 3. *Задача трех тел на прямой с потенциалом* $U = U_{-2}(|x_i - x_j|) + f(x) + g(\boldsymbol{R})$ *допускает два дополнительных интеграла движения и является интегрируемой.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Albouy A., Chenciner, A. Le probleme des n corps et les distances mutuelles // Invent. Math. — 1998. — Vol. 131. — P. 151–184.
2. Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Lie algebras in vortex dynamics and celestial mechanics – IV // Regul. & Chaotic Dyn. — 1999. — Vol. 4, № 1. — P. 23–50.
3. Borisov A. V., Mamaev I. S. Generalized problem of two and four Newtonian centers // Celestial Mech. Dynam. Astronom. — 2005. — Vol. 92, № 4. — P. 371–380.
4. Bour E., Mémoire sur le probléme des trois corps // J. Ecole. Imp. Polytechn. — 1856. — Vol. 21. — P. 35–58.
5. Calogero F. Solution of the one-dimensional N-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials // J. Math. Phys. — 1971. — Vol. 12. — P. 419–436.
6. Dyson F. J., Dynamics of a Spinning Gas Cloud // J. Math. Mech. — 1968. — Vol. 18, № 1. — P. 91–101.
7. Gaffet B. Expanding gas clouds of ellipsoidal shape: new exact solutions // J. Fluid Mech. — 1996. — Vol. 325. — P. 113–144.
8. Jacobi C. G. J. Problema trium corporum mutuis attractionibus cubis distantiarum inverse proportionalibus recta linea se moventium. Gesammelte Werke Vol. 4. — Berlin: Reimer, 1886. — S. 531–539.
9. Jacobi C. G. J. Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi. Gesammelte Werke, Vol. 4. — Berlin: Reimer, 1886. — S. 319–509.
10. Kozlov V. V. Lagrange's Identity and Its Generalizations // Regul. & Chaotic Dyn. — 2008. — Vol. 13, № 2.— P. 71–80.
11. Moser J. Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations // Advances in Math. — 1975. — Vol. 16. — P. 197–220. Пер. на рус. в сб. Ю. Мозер. *Интегрируемые гамильтоновы системы и спектральная теория.* Редакция журнала РХД, 1999, с. 36–63.
12. Olshanetsky M. A., Perelomov A. M. Explicit solution of the Calogero model in the classical case and geodesic flows on symmetric spaces of zero curvature // Lett. Nuovo Cimento. — 1976. — Vol. 16, № 11. — P. 333–339.
13. Арнольд В. И, Козлов В. В, Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Т. 3. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — М.: ВИНИТИ, 1985.
14. Борисов А. В., Мамаев И. С. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. — Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1999. — 464 с.
15. Борисов А. В., Мамаев И. С. Современные методы теории интегрируемых систем. — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 296 с.
16. Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. — Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1995. — 429 с.
17. Переломов А. М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. — М.: Наука, 1990. Engl. transl: Perelomov A. Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras. — Basel: Birkhäser Verlag, 1990.
18. Садэтов С. Т. О регулярной редукции n-мерной задачи $N+1$ тел к уравнениям Эйлера-Пуанкаре на алгебре Ли $sp(2N)$ // Regul. & Chaotic Dyn. — 2002. — Vol. 7, № 3. — P. 337–350.

Поступила в редакцию 21.11.08

A. A. Kilin

Generalization of Lagrange's identity and new integrals of motion

We discuss system of material points in Euclidean space interacting both with each other and with external field. In particular we consider systems of particles whose interacting is described by homogeneous potential of degree of homogeneity $\alpha = -2$. Such systems were first considered by Newton and — more systematically — by Jacobi). For such systems there is an extra hidden symmetry, and corresponding first integral of motion which we call Jacobi integral. This integral was given in different papers starting with Jacobi, but we present in general. Furthermore, we construct a new algebra of integrals including Jacobi integral. A series of generalizations of Lagrange's identity for systems with homogeneous potential of degree of homogeneity $\alpha = -2$ is given. New integrals of motion for these generalizations are found.

Keywords: Lagrange's identity, many-particle system, first integral, integrability, algebra of integrals.

Mathematical Subject Classifications: 70F, 37E

Килин Александр Александрович, к. ф.-м. н., с. н. с. Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: aka@rcd.ru