Функциональный анализ и его приложения,
т. 11, вып. 4, 1977, 94—95.

УДК 517.43

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ПО КОРНЕВЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРОВ, БЛИЗКИХ К САМОСОПРЯЖЕННЫМ, В ПРОСТРАНСТВАХ C и L_p

Л. Ф. Фридлендер

1. Пусть сначала E — сепарабельное банахово пространство, S и T — линейные операторы в E, S — оператор с дискретным вещественным спектром. Предположим, что система собственных векторов $\{\varphi_j\}$ оператора S есть базис в E, а для соответствующих собственных значений выполняются неравенства $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ Пусть, далее, $D(T) \supset D(S)$, $\| Tx \| \leqslant C \| S^r x \|$ $(x \in D(S))$ и $\varlimsup\limits_{t\to\infty} t^{-\alpha} n(t) < \infty$ при некоторых $r \in [0, 1)$ и $\alpha > 0$, где $n(t)$ — количество собственных значений оператора S на интервале $(0, t)$ с учетом их кратностей. Из результатов работы [1] вытекает, что оператор $A = S + T$ имеет дискретный спектр и система его корневых векторов полна в E. При сделанных предположениях справедлива

Теорема 1. *Если $\alpha \leqslant 1 - r$, то система корневых подпространств оператора A, упорядоченная по возрастанию модулей собственных значений, является базисом со скобками пространства E.*

В случае, когда E — гильбертово пространство, а S — самосопряженный оператор, теорема 1 доказана в [2] (глава III, теорема 3.2).

Замечание 1. Если операторы T и S удовлетворяют условию (2) из [3], т. е. $TD(S^{\theta+r}) \subset D(S^\theta)$ и $\| S^\theta Tx \| \leqslant C_\theta \| S^{\theta+r} x \|$ при $x \in D(S^{\theta+r})$, $\theta \geqslant 0$, то так же, как в [3], можно показать, что утверждение теоремы 1 справедливо и при $r < 0$.

2. Пусть теперь M — гладкое компактное ориентированное многообразие. В качестве E будем брать пространство Гёльдера $C^{(\beta)}(M)$ или Лиувилля $L_p^\beta(M)$ (см., например, [4]). Пусть S — формально самосопряженный эллиптический псевдодифференциальный оператор (п.д.о.) порядка $m > 0$ на M, T — п.д.о. порядка $q < m$, $r = q/m$, $A = S + T$. Тогда A — эллиптический оператор, его корневые функции являются гладкими и лежат во всех пространствах L_p^β и $C^{(\beta)}$. Собственные функции оператора S не образуют, вообще говоря, базиса в L_p^β и $C^{(\beta)}$, и непосредственно применить теорему 1 не удается.

Определение. Пусть $\lambda_1' < \lambda_2' < \ldots$ последовательность собственных значений оператора S без учета их кратностей и $\mathscr{L}_j$ — собственное подпространство, отвечающее собственному значению λ_j'. Пусть P_N — проектор на $\{\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_N\}$ параллельно $\{\mathscr{L}_{N+1}, \mathscr{L}_{N+2}, \ldots\}$, где $\{\ldots\}$ — подпространство в E, натянутое на подпространства, указываемые в фигурных скобках. Назовем пространством $U_S(E)$ пространство таких $x \in E$, что $x = E\text{-}\lim\limits_{N\to\infty} P_N x$, с нормой $|x|_{U_S(E)} = \sup\limits_N \| P_N x \|_E$ (ср. [9], стр. 11).

Сделаем следующие замечания:

1. $U_S(E)$ — банахово пространство.
2. $U_S(E)$ непрерывно вложено в E.
3. Если F и E_1 — банаховы пространства, $F \subset E_1 \subset E$ и вложения F в E и E_1 в E непрерывны, то вложение F в E_1 непрерывно.
4. $\{\varphi_j\}$ — базис в $U_S(E)$.

В дальнейшем утверждение 3 используется с $E_1 = U_S(E)$.

Пусть B — некоторое банахово пространство функций на M, содержащее в себе $C^\infty(M)$. Предположим, что п.д.о. замыкаемы в B. Будем говорить, что B имеет порядок γ, если любой п.д.о. порядка $-\gamma$ действует в B непрерывным образом. Например, пространства L_p и L_p^β имеют порядок 0 (см. [5]). Если X — пространство порядка 0, то через X^θ обозначим пространство функций на M с нормой $\| x \|_{X^\theta} = \| (1 - \Delta)^{\theta/2} x \|_X$, где Δ — оператор Лапласа. Пусть S_∞ и T_∞ — ограничения операторов S и T на $C^\infty(M)$, а S_B и T_B — замыкания S_∞ и T_∞ в B. Тогда справедливы следующие предложения:

Предложение 1. *Если пространство B имеет порядок γ и $r_1 = r + \gamma m^{-1}$, то оператор T_B подчинен $S_B^{r_1}$, т. е.*

$$D(T_B) \supset D(S_B^{r_1}) \text{ и } \| T_B x \|_B \leqslant C \| S_B^{r_1} x \|_B \quad (x \in D(S_B^{r_1})).$$

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука»
«Функциональный анализ и его приложения», 1977

Предложение 2. *Если для некоторого* $\gamma > 0$ *имеют место непрерывные вложения* $X^\gamma \subset B \subset X$, *то пространство* B *имеет порядок* γ.

Пусть $n = \dim M$, $\alpha = n/m$. Тогда существует $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-\alpha} n(t) < \infty$ (см. [6]). Сформулируем теперь наш основной результат.

Теорема 2. *Пусть* $E = L_p(M)$ $(1 < p < \infty)$ *или* $C(M)$; $t_p = n(2^{-1} - p^{-1})$ *при* $p > 2$, $n(2^{-1} - (p-1)p^{-1})$ *при* $1 < p < 2$; $\varkappa = t_p$, *если* $E = L_p$, *и* $\varkappa > n/2$, *если* $E = C$. *Пусть выполняются все сделанные выше предположения относительно операторов* A, S *и* T *и*

$$\alpha + \varkappa m^{-1} - (1 - r) \leqslant 0. \tag{1}$$

Тогда, если $f \in E$ *и ряд Фурье функции* f *по собственным функциям оператора* S *сходится в* E, *то сходится в* E *ряд Фурье со скобками функции* f *по корневым функциям оператора* A, *причем расстановка скобок не зависит от* f.

Наметим доказательство. Пусть $E = C(M)$. Тогда по теореме вложения С. Л. Соболева (см. [4], стр. 273) $W_2^\varkappa \subset C$. Без ограничения общности можно считать, что существует оператор S^{-1}. Тогда в $W_2^\varkappa$ существует эквивалентное исходному скалярное произведение, в котором оператор S самосопряжен (см. [3]). Поэтому, если $f \in W_2^\varkappa$ то ряд Фурье f по собственным функциям оператора S сходится в $W_2^\varkappa$ и, тем более, в C. Итак, $W_2^\varkappa \subset U_S(C)$. С другой стороны, имеет место непрерывное вложение $U_S(C) \subset L_2$. На основании предложений 1 и 2 получаем, что оператор T_B подчинен $S_B^{r_1}$, где $B = U_S(C)$, а $r_1 = r + \varkappa m^{-1}$. Из (1) следует, что $\alpha - (1 - r_1) \leqslant 0$. Поэтому можно применить теорему 1 в B. Аналогично рассматривается случай $E = L_p$.

Замечание 2. Пусть $n > 1$ и главный символ $S_0(x, \xi)$ оператора S удовлетворяет следующему условию: для любых x и $\sigma > 0$ множество $\{\xi: S_0(x, \xi) \leqslant \sigma\}$ строго выпукло. Тогда из результатов [7] (см. также [8]) вытекает, что $L_q^{(n-1)/2} \subset U_S(C)$ при $q > 2n(n-1)^{-1}$. Поэтому в этом случае можно взять $\varkappa = (n-1)/2$. То же верно, если $E = L_p$, $p > 2n$.

Замечание 3. Утверждения теоремы 2 и замечания 2 верны также для пространств $L_p^\beta(M)$ и $C^{(\beta)}(M)$. Если $E = L_p^\beta(M)$, то $\varkappa$ можно брать тем же, что и для $E = L_p(M)$. Если $E = C^{(\beta)}(M)$, то $\varkappa$ — то же, что и для $C(M)$, а нестрогое неравенство в (1) нужно заменить на строгое.

3. Теперь можно распространить результаты [7] и [8] на случай несамосопряженных операторов.

Теорема 3. *Пусть оператор* S *удовлетворяет условию замечания* 2, $\alpha + (n-1)/2m - (1-r) \leqslant 0$ *и* $f \in L_p^\beta(M)$, *где* $\beta \geqslant (n-1)/2$ *и* $\beta p > n$. *Тогда ряд Фурье со скобками функции* f *по корневым функциям оператора* A *равномерно сходится.*

Это утверждение сильнее, чем непосредственное следствие из результатов, известных для W_2^β, и теорем вложения.

Аналогичные результаты можно получить для слабых возмущений самосопряженных краевых задач.

В заключение хочу выразить глубокую признательность М. С. Аграновичу и Б. С. Митягину за постановку задачи и внимание к работе.

Главный вычислительный центр
Госснаба СССР

Поступило в редакцию
15 декабря 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Маркус А. С., Матем. сб. **70** (1966), 526—561. 2. Кацнельсон В. Э., Кандидатская диссертация, Харьков, 1967. 3. Агранович М. С., Функц. анализ **10**, вып. 3 (1976), 1—12. 4. Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., «Наука», 1969. 5. Seeley R. T., Koninkl. Nederl. Acad. Proc., ser. A, **68**, № 3 (1965), 521—531. 6. Seeley R. T., Proc. Symp. Math. **10** (1967), 288—307. 7. Алимов Ш. А., Дифф. уравнения **9**, № 4(1973), 669—681. 8. Костюченко А. Г., Митягин Б. С., Функц. анализ **7**, вып. 2 (1973), 32—42. 9. Кахан Ж.-П., Абсолютно сходящиеся ряды Фурье, М. «Мир», 1977.