В. Г. Яхно, Об одной обратной задаче для гиперболических уравнений,
Матем. заметки, 1979, том 26, выпуск 1, 39–44

https://www.mathnet.ru/mzm6837

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 1 (1979)

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. Г. Яхно

В работе рассмотрена задача определения всех коэффициентов гиперболического уравнения второго порядка по некоторой информации относительно решения задачи Коши для этого уравнения.

Ранее похожая постановка для параболического уравнения второго порядка рассматривалась в [1].

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$[D_t^2 - P(x, D)]\, u = f(x, t), \tag{1}$$

$$x \in \mathbf{R}^3, \quad t \in \mathbf{R}_+ = \{t \in \mathbf{R} \mid t > 0\},$$

с данными Коши

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad D_t\, u(x, t)\,|_{t=0} = \psi(x). \tag{2}$$

Здесь $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2} a_\alpha(x) D^\alpha$ — равномерно эллиптический оператор в $\mathbf{R}^3$; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — мультииндекс, а D^α — оператор дифференцирования по x_1, x_2, x_3:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

Все коэффициенты $a_\alpha(x)$, входящие в оператор $P(x, D)$, считаются известными вне фиксированной области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, $\operatorname{diam} \Omega < \infty$, и неизвестными в Ω.

Пусть $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — фиксированные вектор-функции размерности 10 (число 10 есть количество элементов множества

$$A = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mid \alpha_i \geqslant 0 \text{ — целое}, \ |\alpha| \leqslant 2\}).$$

З а д а ч а. Определить оператор $P(x, D)$ в области Ω, если вектор-функция $u(x, t)$, являющаяся решением задачи Коши (1), (2), известна на множестве

$$N = \{(x, t) \mid x \in \Omega,\ t = T\},$$

где $T > 0$ — фиксированное число.

Пусть $u^1(x, t)$ — вектор-функция размерности 10, являющаяся решением задачи

$$[D_t^2 - P_1(x, D)]\, u^1 = f(x, t), \tag{1'}$$

$$u^1(x, 0) = \varphi(x), \quad D_t u^1(x, t)\,|_{t=0} = \psi(x), \tag{2'}$$

где $P_1(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2} a_\alpha^1(x) D^\alpha$ — равномерно эллиптический оператор в $\mathbf{R}^3$.

Обозначим через $U(x, t)$ (соответственно через $U_1(x,t)$) матрицу порядка 10×10, строками которой являются вектор-функции $D^\alpha u(x, t)$, $\alpha \in A$ (соответственно вектор-функции $D^\alpha u^1(x, t)$, $\alpha \in A$).

Считаем, что $f(x, t) \in C^5(\mathbf{R}^3 \times [0, \infty))$, $\varphi(x) \in C^6(\mathbf{R}^3)$, $\psi(x) \in C^5(\mathbf{R}^3)$.

Будем говорить, что оператор $P(x, D)$ удовлетворяет условию (**P**), если при любом $\alpha \in A$

$$a_\alpha(x) \in \{a \in C^6(\mathbf{R}^3) \mid \|a\|_{C^6(\mathbf{R}^3)} \leqslant M\}$$

и

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha \geqslant \lambda |\xi|^2, \qquad \xi \in \mathbf{R}^3, \qquad x \in \mathbf{R}^3.$$

Здесь M, λ суть фиксированные числа такие, что $0 < \lambda < M$.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $\det(U(x, T)) \neq 0$ *при* $x \in \overline{\Omega}$, *а операторы* $P(x, D)$, $P_1(x, D)$ *удовлетворяют условию* (**P**), *причем* $P(x, D) \equiv P_1(x, D)$ *в* $\mathbf{R}^3 \setminus \Omega$. *Тогда существует такое* $\delta > 0$, $\delta = \delta(T, M, \lambda)$, *что если* $\operatorname{diam} \Omega < \delta$, *то при любом* $\alpha \in A$ *имеет место*

$$\|a_\alpha(x) - a_\alpha^1(x)\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant C\, \|U(x, T) - U_1(x, T)\|_{C(\overline{\Omega})}, \tag{3}$$

где C *зависит от* M, λ, T; $\overline{\Omega}$ — *замыкание* Ω.

С л е д с т в и е. *Пусть* $\det(U(x, T)) \neq 0$ *при* $x \in \overline{\Omega}$. *Тогда существует такое* $\delta > 0$, $\delta = \delta(T, M, \lambda)$, *что если* $\operatorname{diam}\Omega < \delta$, *то поставленная задача не может иметь более одного решения* $P(x, D)$, *удовлетворяющего условию* (**P**).

Доказательство теоремы. Проблема единственности и устойчивости поставленной задачи сводится к аналогичной проблеме для линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Пусть $\tilde{u}(x, t) = u(x, t) - u^1(x, t)$, а $a(x)$ — вектор-функция с компонентами $a_\alpha(x) - a_\alpha^1(x)$, $\alpha \in A$. В этих обозначениях имеет место равенство

$$[D_t^2 - P(x, D)]\, u - [D_t^2 - P_1(x, D)]\, u^1 = \\ = [D_t^2 - P_1(x, D)]\, \tilde{u} - a(x)\, U(x, t). \qquad (4)$$

Из равенств (1)—(2), (1')—(2'), (4) вытекают равенства

$$[D_t^2 - P_1(x, D)]\, \tilde{u} = a(x)\, U(x, t), \qquad (5)$$

$$\tilde{u}(x, 0) = 0, \quad D_t \tilde{u}(x, t)\,|_{t=0} = 0. \qquad (6)$$

Решение задачи (5), (6) можно записать в виде (см., например, [2, стр. 723—724])

$$\tilde{u}(x, t) = [D_t^2 - P_1(x, D)]^{-1} a(x)\, U(x, t) = \\ = \int_{\mathrm{R}^3} \int_0^t R(\xi, x, t-s)\, a(\xi)\, U(\xi, s)\, d\xi\, ds. \qquad (7)$$

Здесь $R(\xi, x, t-s)$ — фундаментальное решение оператора $[D_t^2 - P_1(x, D)]$. Учитывая условие теоремы, равенство (7) запишем в виде

$$\tilde{u}(x, t) = \int_\Omega a(\xi)\, b(\xi, x, t)\, d\xi, \qquad (8)$$

где

$$b(\xi, x, t) = \int_0^t R(\xi, x, t-s)\, U(\xi, s)\, ds = \\ = \int_0^t R(\xi, x, \tau)\, U(\xi, t-\tau)\, d\tau.$$

Возьмем число ε такое, что $0 < \varepsilon \ll T$. Пусть $N_\varepsilon = \{(x, t) \mid T - \varepsilon/2 < t < T + \varepsilon/2,\ x \in \Omega\}$, а

$$\operatorname{diam} \Omega \leqslant \delta_1 = \min\{\varepsilon/\sqrt{\lambda},\ (T - \varepsilon/2)/\sqrt{M}\}. \qquad (9)$$

К правой и левой частям равенства (8) для $(x, t) \in N_\varepsilon$ применим дифференциальный оператор D_t^2 (законность этой операции будет обоснована ниже); получим

$$D_t^2 \tilde{u}(x, t) = \int_\Omega a(\xi)\, B(\xi, x, t)\, d\xi, \qquad (10)$$

где

$$B(\xi, x, t) \equiv D_t^2 b(\xi, x, t) = D_t R(\xi, x, t) U(\xi, 0) + \\ + R(\xi, x, t) D_t U(\xi, t)|_{t=0} + \int_0^t R(\xi, x, \tau) D_t^2 U(\xi, t-\tau)\, d\tau \tag{11}$$

Замечание 1. Цель настоящего замечания состоит в том, чтобы привести известные сведения о свойствах решения задачи Коши (1), (2) и о свойствах фундаментального решения оператора $[D_t^2 - P_1(x, D)]$. Эти сведения будут приведены лишь в том объеме и в том виде, в котором они понадобятся нам в дальнейшем.

ЛЕММА. *Пусть* $a_\alpha(x) \in C^6(\mathbf{R}^3)$, $\alpha \in A$, $\varphi(x) \in C^6(\mathbf{R}^3), \psi(x) \in C^5(\mathbf{R}^3)$, $f(x, t) \in C^5(\mathbf{R}^3 \times [0, \infty))$. *Тогда существует единственное решение задачи* (1), (2) $u(x, t) \in C^4(D_\varepsilon)$, *причем такое, что*

$$\| D_t^r D^\alpha u \|_{C(D_\varepsilon)} \leqslant C [\| \varphi \|_{C^6(S_\varepsilon)} + \| \psi \|_{C^5(S_\varepsilon)} + \| f \|_{C^5(\Delta_\varepsilon)}],$$

$r = 0, 1, 2; r + |\alpha| \leqslant 4$, *где C зависит от* T, M, ε,

$$D_\varepsilon = \overline{\Omega} \times [0, T + \varepsilon/2],$$

$$S_\varepsilon = \bigcup_{x \in \overline{\Omega}} \{\xi \mid |\xi - x| \leqslant \sqrt{M}(T + \varepsilon/2)\},$$

$$\Delta_\varepsilon = \bigcup_{x \in \overline{\Omega}} \{(\xi, \tau) \mid 0 \leqslant \tau \leqslant \sqrt{M}(T + \varepsilon/2) - |\xi - x|\}.$$

Лемма следует из результатов С. Л. Соболева (см., например, [3, стр. 223], [4]).

Известно [2, стр. 727], что все сингулярности фундаментального решения $R(\xi, x, t-\tau)$ оператора $[D_t^2 - P_1(x, D)]$ сосредоточены на боковой поверхности коноида зависимости, построенного для уравнения (1'). При сделанных предположениях гладкости коэффициентов оператора $P_1(x, D)$ $R(\xi, x, t-\tau)$ внутри коноида зависимости представляет собой обычную функцию, непрерывную и ограниченную, вместе со своей частной производной по t, константой, зависящей только от λ, M, $t-\tau$. Из неравенства (9) вытекает, что уменьшением ε можно добиться того, что каждой паре точек x, ξ ($x, \xi \in \Omega$) будет соответствовать единственная геодезическая $\Gamma(x, \xi)$, соединяющая их в метрике, в которой элемент длины ds

находится по формуле

$$ds = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} b_{ij}(x)\, dx_i dx_j}, \tag{12}$$

где $b_{ij}(x)$ — элементы матрицы, обратной к матрице $\tilde{A} = \| a_{ij} \|$,

$$a_{ij} = a_\alpha \big|_{|\alpha|=2,\, \alpha_i=1,\, \alpha_j=1}, \qquad i \neq j;$$

$$a_{ii} = a_\alpha \big|_{|\alpha|=2,\, \alpha_i=2}.$$

Поэтому фундаментальное решение $R(\xi, x, t-\tau)$ $(\xi, x \in \bar{\Omega},\ T - \varepsilon/2 < t - \tau < T + \varepsilon/2)$ можно построить по методу С. Л. Соболева [5]; оно имеет следующий вид (см., например, [6, гл. II, § 1]):

$$R(\xi, x, t-\tau) = (1/(4\pi))\sigma(\xi, x)\,\delta(t - \tau - \tau(\xi, x)) + \\ + \theta(t - \tau - \tau(\xi, x))\, R_1(\xi, x, t-\tau).$$

Здесь δ — дельта-функция Дирака; θ — функция Хевисайда; определение и основные свойства $\sigma(\xi, x)$ приведены в [6, гл. II, § 1, стр. 63]; $\tau(\xi, x)$ — расстояние между точками ξ, x в метрике (12); $R_1(\xi, x, t-\tau)$ — регулярная часть фундаментального решения $R(\xi, x, t-\tau)$ представляет собой при $\xi, x \in \bar{\Omega}$, $T - \varepsilon/2 < t - \tau < T + \varepsilon/2$ обычную функцию, непрерывную и ограниченную константой, зависящей только от λ, M, $t - \tau$.

Продолжим доказательство теоремы. В силу неравенства (9) область $\bar{\Omega}$ лежит строго внутри коноидов зависимости, построенных в точках (x, t), $x \in \bar{\Omega}$, $T - \varepsilon/2 < t < T + \varepsilon/2$, и, следовательно, учитывая замечание и формулу (11), получаем то, что $B(\xi, x, t)$ на множестве

$$\{(\xi, x, t) \mid \xi, x \in \bar{\Omega},\ T - \varepsilon/2 < t < T + \varepsilon/2\}$$

представляет собой непрерывную функцию при $\xi \neq x$ и имеет место оценка

$$|B(\xi, x, t)| \leqslant C/|\xi - x|. \tag{13}$$

Здесь C зависит от T, λ, M, ε.

Замечание 2. Из сказанного выше следует законность применения оператора D_t^2 к правой и левой частям равенства (8) для $(x, t) \in N_\varepsilon$.

Полагая в равенстве (10) $(x, t) \in N$, получим

$$D_t^2 \tilde{u}\,|_N = \int_\Omega a(\xi) B(\xi, x, T)\, d\xi, \quad x \in \Omega. \tag{14}$$

С другой стороны, вычитая из правой и левой частей уравнения (1) правую и левую части уравнения (1′) и полагая $(x, t) \in N$, получим

$$D_t^2 \tilde{u}\,|_N = a^1(x)\,[U(x, T) - U_1(x, T)] + a(x)\, U(x, T), \tag{15}$$

где $a^1(x)$ — вектор-функция размерности 10 с компонентами $\overset{1}{a}_\alpha$, $\alpha \in A$. Из условия $\det(U(x, T)) \neq 0$ при $x \in \overline{\Omega}$ и леммы вытекает то, что

$$[U(x, T)]^{-1} \in C(\overline{\Omega}). \tag{16}$$

Из (14), учитывая (15), (16), получим уравнение

$$a(x) = a^1(x)\,[U(x, T) - U_1(x, T)] \cdot [U(x, T)]^{-1} + \\ + \int_\Omega a(\xi) B(\xi, x, T)\,[U(x, T)]^{-1}\, d\xi, \quad x \in \Omega. \tag{17}$$

Уравнение (17) является линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода относительно $a(x)$. Поэтому (см., например, [7, стр. 279—281]) из оценки (13), условия (16), леммы следует существование такого $\delta > 0$, $\delta = \delta(T, M, \lambda) < \delta_1$, что если $\operatorname{diam} \Omega < \delta$, то уравнение (17) имеет единственное решение, элементы которого $a_\alpha(x) - \overset{1}{a}_\alpha(x)$ удовлетворяют неравенству (3). Тем самым теорема доказана.

Вычислительный центр
СО АН СССР

Поступило
6.VI.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Бухгейм А. Л., Яхно В. Г., О двух задачах для дифференциальных уравнений, Докл. АН СССР, **229**, № 4 (1976), 785—786.

[2] Курант Р., Уравнения с частными производными, М., «Мир», 1964.

[3] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосибирск, изд-во СО АН СССР, 1962.

[4] Ладыженская О. А., Краевые задачи математической физики, М., «Наука», 1971.

[5] Соболев С. Л., Новый метод решения задачи Коши для уравнений в частных производных нормального гиперболического типа, Матем. сб., **1**, № 43 (1936).

[6] Романов В. Г., Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа, Новосибирск, «Наука», 1972.

[7] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, М., «Наука», 1971.