В.П.Оревков

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ГОМЕОМОРФИЗМОВ КОНСТРУКТИВНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ*)

В настоящей заметке изучаются свойства конструктивных метрических пространств и конструктивных взаимно-однозначных операторов. В частности, рассматривается вопрос о топологической инвариантности размерности конструктивных триангулируемых пространств и приводится конструктивный аналог теоремы Брауэра об инвариантности области.

Все не разъясняемые специально термины и обозначения понимаются так же, как в [1] и [2]. В дальнейшем прилагательное "конструктивный" перед словами "метрическое пространство", "отображение" и др. часто будет опускаться.

1. Будем говорить, что метрическое пространство $\mathfrak{M}$ *эквивалентно* метрическому пространству $\mathfrak{N}$, если можно построить отображение пространства $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{N}$ и обратное к нему отображение $\mathfrak{N}$ на $\mathfrak{M}$. Будем говорить, что метрическое пространство $\mathfrak{M}$ *гомеоморфно* (*равномерно гомеоморфно*, *псевдоравномерно гомеоморфно*, *локально равномерно гомеоморфно*, *локально псевдоравномерно гомеоморфно*) метрическому пространству $\mathfrak{N}$, если можно построить отображение f пространства $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{N}$ и отображение g пространства $\mathfrak{N}$ на $\mathfrak{M}$, такие что выполняются следующие условия:

1) отображения f и g непрерывны (соответственно, равномерно непрерывны, псевдоравномерно непрерывны, локально равномерно

---

*) Основные результаты этой заметки были доложены на Ленинградском семинаре по конструктивной математике 29 декабря 1966 г. и 3 апреля 1969 г.

непрерывны, локально псевдоравномерно непрерывны);

2) f и g являются обратными друг к другу отображениями.

Т р и а н г у л я ц и е й (к о н е ч н о й т р и а н г у л я ц и е й) конструктивного метрического пространства $\mathfrak{M}$ будем называть всякий список вида

$$(t_1, t_2, K),$$

где K - конструктивный локально конечный (соответственно, конечный) симплициальный комплекс, t_1 - локально равномерно (соответственно, равномерно) непрерывное отображение тела комплекса K на $\mathfrak{M}$, а t_2 - локально равномерно (соответственно, равномерно) непрерывное отображение $\mathfrak{M}$ на тело комплекса K, обратное к t_1. Комплекс K будем называть к о м п л е к с о м т р и а н г у л я ц и й (t_1, t_2, K). Вершины комплекса K будем называть в е р ш и н а м и этой т р и а н г у л я ц и и. Конструктивное метрическое пространство будем называть т р и а н г у л и р у е м ы м (к о н е ч н о т р и а н г у л и р у е м ы м), если можно построить его триангуляцию (соответственно, конечную триангуляцию).

Из результатов работ [3] и [4] вытекает, что триангулируемые пространства тогда и только тогда гомеоморфны, когда они эквивалентны.

Аналогично тому, как это делается в классической математике, вводятся понятия г о м о т о п и ч е с к о й э к в и в а л е н т н о с т и метрических пространств, р а в н о м е р н о й г о м о т о п и ч е с к о й и п с е в д о р а в н о м е р н о й г о м о т о п и ч е с к о й эквивалентности метрических пространств. Нетрудно доказать следующую теорему.

<u>Теорема I</u>. К а к о в ы б ы н и б ы л и к о н е ч н ы е с и м п л и ц и а л ь н ы е к о м п л е к с ы K и L, е с л и т е л о к о м п л е к с а K п с е в д о р а в н о м е р -

но гомотопически эквивалентно телу комплекса L, то изоморфны группы гомологий комплексов K и L с коэффициентами в поле рациональных чисел или в произвольной коммутативной группе с конечным числом образующих и определяющих соотношений.

2. Пусть K – произвольный локально конечный симплициальный комплекс и P – вершина комплекса K. Окрестностным подкомплексом комплекса K в вершине P будем называть границу звезды комплекса K с вершиной P.

Теорема 2. Каковы бы ни были конструктивные локально конечные комплексы K и L, вершина P комплекса K, вершина Q комплекса L, отображение f тела комплекса K на тело комплекса L и обратное к f отображение g тела комплекса K на тело комплекса L, если точка $f(P)$ равна вершине Q и отображения f и g непрерывны (локально равномерно непрерывны, локально псевдоравномерно непрерывны), то окрестный подкомплекс комплекса K в вершине P гомотопически (соответственно, равномерно гометопически, псевдоравномерно гометопически) эквивалентен окрестностному подкомплексу комплекса L в вершине Q.

Из теорем I и 2 вытекает следующая теорема:

Теорема 3. Размерность триангулируемых конструктивных метрических пространств инвариантна относительно локально псевдоравномерных гомеоморфизмов.

Возможности применения теоремы 2 для доказательства инвариантности размерности триангулируемых пространств относительно любых конструктивных гомеоморфизмов ограничены ввиду следующего обстоятельства.

Теорема 4. Любое конечно триангулируемое метрическое пространство $\mathfrak{M}$ гомотопически эквивалентно метрическому пространству, состоящему из конечного числа точек, равного числу компонент линейной связности пространства $\mathfrak{M}$.

Эта теорема легко получается из теорем 4 и 5 работы [I].

Из теоремы 2 и теоремы 6.4 работы [5] вытекает следующая теорема.

Теорема 5. Каковы бы ни были гомеоморфные триангулируемые (конечно триангулируемые) метрические пространства, если одно из этих пространств одномерно, то и другое одномерно, и они оба локально равномерно (соответственно, равномерно) гомеоморфны.

3. Следующие ниже теоремы 6 и 7 показывают, что теорему 5 нельзя распространить на случай двухмерных триангулируемых пространств.

Теорема 6. Можно построить такие отображения единичного квадрата на себя, которые будут обратными друг к другу и ни одно из них не будет локально псевдоравномерно непрерывным отображением.

Теорема 7. Можно построить такие отображения f и g единичного квадрата на себя, что выполняются следующие условия:

1) отображения f и g обратны друг к другу,

2) отображение f равномерно непрерывно,

3) отображение g не является псевдоравномерно непрерывным отображением.

Конструктивное метрическое пространство будем называть n-мерным многообразием, если для каждой точки V этого пространства можно построить открытую сферу с центром в V, которая будет равномерно гомеоморфна внутренности n-мерного шара.

Теорема 8. Можно построить два такие конечно триангулируемые трехмерные многообразия, которые будут локально равномерно гомеоморфны, но не будут псевдоравномерно гомеоморфны.

Для доказательства этой теоремы достаточно взять прямое произведение двумерной сферы на окружность и многообразие Штифеля*) $V_{3,2}$ и воспользоваться тем фактом, что на двумерной сфере можно построить локально равномерно непрерывное поле касательных единичных векторов (теорема 4.2 работы [7]).

*) См. [6; стр.43].

Теорема 9. М о ж н о   п о с т р о и т ь   д в а   т а к и е   к о н е ч н о   т р и а н г у л и р у е м ы е   м е т р и ч е с к и е   п р о с т р а н с т в а,   к о т о р ы е   б у д у т   г о м е о м о р ф н ы,   н о   н е   б у д у т   л о к а л ь н о   п с е в д о р а в н о м е р н о   г о м е о м о р ф н ы.

Для доказательства этой теоремы достаточно построить пирамиды над прямым произведением двумерной сферы на окружность и над многообразием Штифеля $V_{3,2}$.

4. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ - произвольные метрические пространства. ρ и ρ' - соответственно метрические функции пространств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ и f - отображение пространства $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$. Отображение f будем называть р а в н о м е р н ы м   в л о ж е н и е м пространства $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$, если выполняются следующие условия:

1) отображение f равномерно непрерывно;

2) каково бы ни было натуральное число n, можно построить такое натуральное число m, что каковы бы ни были точки V и W пространства $\mathfrak{M}$, если

$$\rho'(f(V)\square f(W)) < 2^{-m},$$

то

$$\rho(V\square W) < 2^{-n}.$$

Отображение f будем называть л о к а л ь н ы м   р а в н о м е р н ы м   в л о ж е н и е м пространства $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$, если для каждой точки V пространства $\mathfrak{M}$ можно построить такую замкнутую сферу S с центром в V, что ограничение f на S является равномерным вложением S в $\mathfrak{N}$.

Подмножество $\mathfrak{A}$ пространства $\mathfrak{M}$ называется о т к р ы т ы м в $\mathfrak{M}$ (O-открытым в терминологии работы [8]), если для всякой точки из $\mathfrak{A}$ можно построить открытую сферу с центром в этой точке, которая содержится в $\mathfrak{A}$.

Следующую теорему можно рассматривать в качестве конструктивного аналога теоремы Брауэра об инвариантности области.

<u>Теорема IO.</u> Каковы бы ни были n-мерные многообразия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, локальное равномерное вложение f пространства $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$ и подмножество $\mathfrak{A}$ пространства $\mathfrak{M}$, если подмножество $\mathfrak{A}$ открыто в $\mathfrak{M}$, то образ подмножества $\mathfrak{A}$ при отображении f является открытым подмножеством в $\mathfrak{N}$.

Основную роль в доказательстве теоремы IO играет следующая лемма.

<u>Лемма</u>. Каково бы ни было равномерное вложение n-мерного шара E^n в n-мерную сферу S^n, дополнение к образу границы шара E^n разлагается на две компоненты линейной связности, а именно, на дополнение к образу шара E^n и на образ внутренности шара E^n.

Доказательство этой леммы в рамках конструктивной математики можно получить, следуя плану доказательства леммы 3.8 главы XI работы [9] .

Литература

I. Оревков В.П. О конструктивных отображениях полиэдров. "Докл. АН СССР", I963, I52, № 2, 278-28I.

2. Оревков В.П. О конструктивных отображениях конечных полиэдров. "Тр. Матем. ин-та АН СССР", I967, 93, I42-I63.

3. Цейтин Г.С. Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах. "Тр.Матем. ин-та АН СССР", I962, 67, 295-36I.

4. Moschovakis Y.N. Recursive metric spaces. "Fund.math." I964, 55, № 3, 2I5-238.

5. Заславский И.Д. Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций." Тр. Матем. ин-та АН СССР", I962, 67, 385-457.

6. Стинрод Н. Топология косых произведений. ИЛ.,М.,I953.

7. Оревков В.П. О конструктивных отображениях круга в себя. "Тр. Матем. ин-та АН СССР", I964, 72, 437-46I.

8. Фан Динь Зиеу. О замкнутых и открытых множествах в конструктивных топологических пространствах."Тр. Матем. ин-та АН СССР", I967, 93, 250-256.

9. Стинрод Н., Эйленберг С. Основания алгебраической топологии. "Физматгиз", М., I958.