С. А. Гришечкин, Одноканальные системы с круговым доступом или разделением процессора и ветвящиеся процессы,
Матем. заметки, 1988, том 44, выпуск 4, 433–448

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 44, № 4 (1988)

ОДНОКАНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С КРУГОВЫМ ДОСТУПОМ ИЛИ РАЗДЕЛЕНИЕМ ПРОЦЕССОРА И ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ

С. А. Гришечкин

В системе с круговым доступом обслуживающее устройство (процессор) обслуживает вначале некоторый фиксированный кусок длительностью Δ первого стоящего в очереди требования, затем кусок Δ второго требования и так далее до последнего из требований в очереди. Затем процессор возвращается в начало очереди и процесс обслуживания продолжается аналогичным образом. Новые требования, приходящие в систему, становятся в конец очереди.

Идеализация этой дисциплины обслуживания, получающаяся при $\Delta \to 0$, называется *дисциплиной разделения процессора*. В этом случае процессор обслуживает одновременно все N требований, стоящих в очереди, но с интенсивностью в N раз меньшей, чем та, которая была бы, если в очереди находилось только одно требование.

Описанные дисциплины широко применяются в реальных вычислительных системах и их изучению посвящены [1—5]. Начиная с [1—2], стала видна тенденция использовать при исследовании нечто аналогичное ветвящимся процессам. Однако дальше сходства терминологии (потомок — предок) и некоторых простейших свойств (соответствующих независимости размножения частиц в ветвящемся процессе) дело не пошло. В настоящей работе мы дадим обоснование этой связи и покажем, что многие результаты и методы теории ветвящихся случайных процессов могут быть с успехом применены для исследования указанных выше дисциплин и прежде всего для исследования времени ожидания. Наше основное внимание будет уделено системе $M \mid M \mid 1$ с круговым доступом.

Пусть в эту систему поступает пуассоновский с интенсивностью μ и возможно неординарный поток требований. Производящую функцию (п.ф.) числа требований, приходящих одновременно, обозначим $B(s)$. Каждое требование имеет случайную длину L с функцией распределения (ф.р.) $1 - e^{-x}$. Назовем *временем элементарного обслуживания* то время, которое проходит с момента начала обслуживания куска одного требования до момента начала обслуживания следующего куска (возможно другого требования). Это время вообще говоря случайно и не совпадает с Δ, так как системе надо некоторое время, чтобы переориентироваться на обслуживание нового требования. Учитывая, что поступающие требования могут быть короче, чем Δ и что при завершении обслуживания требования процессор выполняет другие операции, чем при элементарном обслуживании требования длины больше Δ, обозначим τ время элементарного обслуживания требования C экспоненциальной длины L. Если же известно, что длина требования C больше чем Δ, то время его элементарного обслуживания обозначим σ.

Новые требования, которые придут в систему за время τ (соответственно за время σ), назовем *прямыми потомками* C и пусть ξ (соответственно η) — их количество. В число прямых потомков ξ мы включим также и само требование C в том случае, если это элементарное обслуживание не было завершающим для C, предполагая, что при этом C встанет в очередь последним. Нетрудно видеть, что

$$h(s) = \mathsf{E}s^{\xi} = e^{-\Delta}\int_0^{\infty}(s-1)\,e^{\mu t(B(s)-1)}\,d\mathsf{P}(\sigma \leqslant t) + \int_0^{\infty} e^{\mu t(B(s)-1)}\,d\mathsf{P}(\tau \leqslant t), \quad (1)$$

$$f(s) = \mathsf{E}s^{\eta} = \int_0^{\infty} e^{\mu t(B(s)-1)}\,d\mathsf{P}(\sigma \leqslant t).$$

Легко понять, что система эргодична, если $\mathsf{E}\xi < 1$.

Предположим, что в момент 0 в системе находится $N + 1$ требование и процессор свободен. Одно из этих требований выделено и имеет длину T, остальные N — случайной длины с ф.р. $1 - e^{-x}$. Часть из этих требований (N_1 штук) стоит в очереди перед выделенным требованием, а остальные $N_2 = N - N_1$ — за ним. Обозначим $W(T, N_1, N_2)$ время ожидания выделенным требованием конца обслуживания. Величина W будет основным объектом наших исследований. Не ограничивая общности, можно считать, что $T = n\Delta$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Покажем теперь, как случайная величина W может быть получена при помощи ветвящихся процессов. Рассмотрим процесс Гальтона — Ватсона. Каждая частица в этом процессе живет единичное время и затем делится на ξ' новых частиц, выделяя при этом финальный продукт τ', который затем, никак не изменяясь, накапливается в процессе. Пусть $(\xi', \tau') \stackrel{d}{=} (\xi, \tau)$. Обозначим через $X(n)$ и $\varphi(n)$ число частиц и количество финального продукта в момент n. Тогда

$$\begin{gathered} X(0)=1, \quad \varphi(0)=0, \\ X(n)=\xi_{n,1}+\ldots+\xi_{n,X(n-1)}, \\ \varphi(n)=\varphi(n-1)+\tau_{n,1}+\ldots+\tau_{n,X(n-1)}, \end{gathered} \tag{2}$$

где пары $(\xi_{i,j}, \tau_{i,j})$ независимы и одинаково распределены (н.о.р.). Рассмотрим, кроме того, процесс с иммиграцией, отличающийся от описанного выше процесса Гальтона—Ватсона только тем, что в каждый из моментов $t = 1, 2, \ldots$ в процесс иммигрирует η_t' частиц и образуется финальный продукт σ_t', $(\eta_t', \sigma_t') \stackrel{d}{=} (\eta, \sigma)$. Обозначая $Y(n)$ и $\psi(n)$ число частиц и количество финального продукта в процессе с иммиграцией, мы можем записать, что

$$\begin{gathered} Y(0)=0, \quad \psi(0)=0, \quad Y(n)=\sum\nolimits_{i=1}^{n} X_i^*(n-i), \\ \psi(n)=\sum\nolimits_{i=1}^{n} \varphi_i^*(n-i), \end{gathered} \tag{3}$$

где $X_i^*(j)=X_{1,i}(j)+\ldots+X_{\eta_i,i}(j)$, $\varphi_i^*(j)=\sigma_i+\varphi_{1,i}(j)+$ $+\ldots+\varphi_{\eta_i,i}(j)$, $X_{k,i}(\cdot)\stackrel{d}{=}X(\cdot)$, $\varphi_{k,i}(\cdot)\stackrel{d}{=}\varphi(\cdot)$ и пары (η_t, σ_t), $(X_{k,i}(\cdot), \varphi_{k,i}(\cdot))$ $(k, j, t = 1, 2, \ldots)$ независимы в совокупности. Индукцией по n тривиально доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Систему с круговым доступом и семейство независимых ветвящихся процессов* $X_1(n), \ldots$ $\ldots, X_N(n)$, $Y(n)$, $X_i(\cdot) \stackrel{d}{=} X(\cdot)$ *можно определить на одном вероятностном пространстве так, чтобы для* *любого* $n = 1, 2, \ldots$

$$W(n\Delta, N_1, N_2) = \\ = \varphi_1(n) + \ldots + \varphi_{N_1}(n) + \psi(n) + \varphi_{N_1+1}(n-1) + \ldots \\ \ldots + \varphi_N(n-1). \quad (4)$$

Формулы (2), (3) позволяют в принципе выписать выражения для преобразований Лапласа (п. Л.) случайных величин (с.в.) $\varphi_i(n)$ и $\psi(n)$, а следовательно, и $W(n\Delta, N_1, N_2)$, которые, однако, малопригодны для дальнейшего использования из-за слишком сложного вида. Мы ограничимся нахождением лишь первых двух моментов. Обозначим $A = \mathsf{E}\xi$. $\mathsf{E}\varphi(n) = (\mathsf{E}\tau)(A^n - 1)(A-1)^{-1}$,

$$\mathsf{D}\varphi(n) = (\mathsf{D}\tau)(A^n - 1)(A-1)^{-1} + 2(\mathsf{E}\tau)(\mathsf{E}\xi\mathsf{E}\tau - \\ - \mathsf{E}(\xi\tau))(A-1)^{-1}(nA^n - (A^n - 1)(A-1)^{-1}) + \\ + \mathsf{D}\xi(A-1)^{-2}(\mathsf{E}\tau)^2[(A^{2n-1} - 1)(A-1)^{-1} - (2n-1)A^{n-1}], \quad (5)$$

$$\mathsf{E}\psi(n) = n\mathsf{E}\sigma + (\mathsf{E}\eta)(\mathsf{E}\tau)(A-1)^{-1}[(A^n - A)(A-1)^{-1} - \\ - n + 1].$$

Основное содержание настоящей заметки состоит в получении предельных теорем для с.в. $W(n\Delta, N_1, N_2)$ при $N \to \infty$ и (или) $n \to \infty$. Мы будем, как правило, считать, что $\mathsf{D}W(n\Delta, N_1, N_2) < \infty$, так как с точки зрения теории массового обслуживания именно этот случай представляет наибольший интерес. Ясно, что для любого $p \geqslant 1$ из того, что $\mathsf{E}\sigma^p < \infty$, $\mathsf{E}\tau^p < \infty$ следует $\mathsf{E}\xi^p < \infty$, $\mathsf{E}\eta^p < \infty$. Подчеркнем, что никаких предположений об эргодичности рассматриваемой системы делаться не будет. Через $\mathcal{N}(a, b)$ будем обозначать нормальную с.в. со средним a и дисперсией b, запись $\alpha_n \sim \mathcal{N}(a_n, b_n)$, $n \to \infty$ означает, что $(\alpha_n - a_n)\, b_n^{-1/2} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\mathsf{E}(\tau + \sigma) < \infty$ *и* $A < 1$. *Тогда*

а) *если* $n + N \to \infty$, *то* $W(n\Delta, N_1, N_2) \sim \mathsf{E}\psi(n) + N_1\mathsf{E}\varphi(n) + N_2\mathsf{E}\varphi(n-1)$ (*п.н.*);

б) *если* $\mathsf{D}\tau < \infty$, $\mathsf{D}\sigma < \infty$ *и* $n + N \to \infty$, *то* $W(n\Delta, N_1, N_2) \sim \mathcal{N}(\mathsf{E}\psi(n) + N_1\mathsf{E}\varphi(n) + N_2\mathsf{E}\varphi(n-1), n(\mathsf{D}\sigma + (\mathsf{D}\eta)\cdot \cdot(\mathsf{E}\varphi(\infty))^2 + (\mathsf{D}\varphi(\infty))(\mathsf{E}\eta) + 2(\mathsf{E}\varphi(\infty))(\mathsf{E}(\sigma\eta) - (\mathsf{E}\sigma)(\mathsf{E}\eta))) + N_1\mathsf{D}\varphi(n) + N_2\mathsf{D}\varphi(n-1))$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $\mathsf{E}(\tau + \sigma) < \infty$, $\mathsf{E}\xi\log(\xi + 1) < \infty$, $A > 1$. *Тогда*

а) *при фиксированных* N_1, N_2 *и* $n \to \infty$, $W(n\Delta, N_1, N_2)A^{-n} \to (\mathsf{E}\tau)(A-1)^{-1}(V + U_1 + \ldots + U_{N_1} + A^{-1}(U_{N_1+1} +$

$+ \ldots + U_N))$ *(п.н.), где с.в.* V, U_i *независимы и имеют п.Л.* $u(\lambda) = \mathsf{E}\exp(-\lambda U_i)$, $v(\lambda) = \mathsf{E}\exp(-\lambda V)$, *удовлетворяющие уравнениям* $u(A\lambda) = h(u(\lambda))$, $v(\lambda) = \Pi_{j=0}^{\infty} f(u(\lambda A^{-j}))$,

б) *если* $\mathsf{D}\tau < \infty$, $\mathsf{D}\sigma < \infty$, *то при* $N \to \infty$ *и произвольном изменении* n $W(n\Delta, N_1, N_2) \sim \mathscr{N}(N_1\mathsf{E}\varphi(n) + N_2\mathsf{E}\varphi(n-1), N_1\mathsf{D}\varphi(n) + N_2\mathsf{D}\varphi(n-1))$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $A = 1$, $\mathsf{D}\tau < \infty$, $\mathsf{D}\sigma < \infty$, $\mathsf{D}\xi = 2\gamma$. *Тогда*

а) *если* $n/N \to 0$, *то* $W(n\Delta, N_1, N_2) \sim \mathscr{N}((nN - N_2)\mathsf{E}\tau, \frac{2}{3} Nn^3\gamma(\mathsf{E}\tau)^2)$,

б) *если* $n/N \to p \in]0, \infty]$, *то*

$$\mathsf{E}\exp(-\lambda n^{-2}(\mathsf{E}\tau)^{-1} W(n\Delta, N_1, N_2)) \to$$
$$\to \exp\left(\frac{-\sqrt{\lambda}\,(1-\exp(-2\sqrt{\gamma\lambda}))}{p\sqrt{\gamma}\,(1+\exp(-2\sqrt{\gamma\lambda}))}\right)(\operatorname{sech}(\sqrt{\lambda}\,\gamma))^{\mathsf{E}\eta/\gamma}.$$

Следующие три теоремы посвящены описанию времени ожидания при $A \to 1$. Для простоты изложения будем считать, что изменение нагрузки осуществляется варьированием только интенсивности входного потока μ, а остальные параметры системы не изменяются, в частности не меняется τ и σ. Подчеркивая зависимость от μ будем писать ξ_μ, η_μ, $h_\mu(s)$ и т. п. Там, где это не может вызвать недоразумений, нижний индекс μ будет опускаться. Пусть $A_\mu = h_\mu'(1)$, $a_\mu = -\log A_\mu$, $2\gamma_\mu = h_\mu''(1)$. Значение μ, для которого $a_\mu = 0$, обозначим μ_0 и станем писать ξ_0, η_0, γ_0, ... вместо ξ_{μ_0}, η_{μ_0}, γ_{μ_0}, ...

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* $a_\mu n \to c$, $\mu \to \mu_0$, $c \in]-\infty, \infty[$. *Тогда*

а) *если* $n/N \to 0$, *то* $W(n\Delta, N_1, N_2) \sim \mathscr{N}(N_1\mathsf{E}\varphi(n) + N_2\mathsf{E}\varphi(n-1), 2\gamma_0(\mathsf{E}\tau)^2 n^3 N c^{-3}(1 - e^{-2c} - 2ce^{-c}))$, *где* $c^{-3}(1 - e^{-2c} - 2ce^{-c}) = 1/3$ *при* $c = 0$;

б) *если* $n/N \to p \in]0, \infty]$, *то*

$$\mathsf{E}\exp(-\lambda n^{-2}(\mathsf{E}\tau)^{-1} W(n\Delta, N_1, N_2)) \to$$
$$\to \exp(-p^{-1}\alpha(\lambda))\exp\left(\frac{-\mathsf{E}\eta_0}{2}\int_0^\lambda \alpha(x)\,x^{-1}\,dx\right),$$

где

$$\alpha(\lambda) = \alpha(\lambda, c, \gamma_0) =$$
$$= 2\lambda(1 - \exp(-\sqrt{c^2 + 4\gamma_0\lambda}))(c(1 - \exp(-\sqrt{c^2 + 4\gamma_0\lambda})) +$$
$$+ \sqrt{c^2 + 4\gamma_0\lambda}\,(1 + \exp(-\sqrt{c^2 + 4\gamma_0\lambda})))^{-1}.$$

ТЕОРЕМА 6. *Пусть* $a_\mu n \to +\infty$, $\mu \to \mu_0$. *Тогда*

$$W(n\Delta, N_1, N_2) \sim \mathcal{N}\,(n\,(\mathsf{E}\varphi(\infty)\,\mathsf{E}\eta_\mu + \mathsf{E}\sigma) + N_1\mathsf{E}\varphi(n) + N_2\mathsf{E}\varphi(n-1),\ 2\gamma_0 a^{-3}(\mathsf{E}\tau)^2(N + n\mathsf{E}\eta_0)).$$

ТЕОРЕМА 7. *Пусть* $a_\mu n \to -\infty$, $\mu \to \mu_0$. *Тогда*

а) *если* $a_\mu N \to -\infty$, *то*

$$W(n\Delta, N_1, N_2) \sim \mathcal{N}\,(N_1\mathsf{E}\varphi(n) + N_2\mathsf{E}\varphi(n-1),\ 2\gamma_0(\mathsf{E}\tau)^2(-a)^{-3}e^{-2na}N);$$

б) *если* $(-a_\mu)N \to p \in [0, \infty[$, *то*

$$\mathsf{E}\exp(-\lambda a^2 e^{an}(\mathsf{E}\tau)^{-1}W(n\Delta, N_1, N_2)) \to (1 + \gamma_0\lambda)^{-\mathsf{E}\eta_0/\gamma_0}\exp(-\lambda p(1 + \gamma_0\lambda)^{-1}).$$

Прежде чем перейти к доказательствам, сделаем несколько предварительных замечаний. Хотя постановка задачи о предельном поведении $W(n\Delta, N_1, N_2)$ вполне естественна, но в литературе она, по-видимому, до сих пор не рассматривалась. Это позволяет надеяться, что изложенные в данной статье теоремы будут интересны специалистам по теории массового обслуживания. Результаты статьи являются новыми и с точки зрения теории ветвящихся процессов. Заметим, однако, что теоремы 2 и 3 просто получаются из классических результатов, а теорема 4 очень близка в идейном плане к работам Пейкса об общем количестве частиц [6—7]. На наш взгляд определенный интерес для теории ветвящихся процессов могут представлять теоремы 5—7, так как, видимо, до настоящего времени переходные явления в ветвящихся процессах под таким углом зрения не рассматривались.

Доказательство теоремы 2. По усиленному закону больших чисел (у.з.б.ч.) $S = \varphi_1(n) + \ldots + \varphi_N(n) \sim N\mathsf{E}\varphi(n)$ (п.н.) при $N \to \infty$, а в условиях пункта б) $S \sim \mathcal{N}\,(N\mathsf{E}\varphi(n), N\mathsf{D}\varphi(n))$ (в силу критерия Линдеберга, поскольку $\varphi_i(n)$ мажорируются с.в. $\varphi_i(\infty)$ с конечной дисперсией). Поэтому теорема 2 будет доказана, если $\psi(n) \sim \mathsf{E}\psi(n)$ (п.н.) и $\psi(n) \sim \mathcal{N}\,(\mathsf{E}\psi(n), n(\mathsf{D}\sigma + \mathsf{D}\eta(\mathsf{E}\varphi(\infty))^2 + \mathsf{E}\eta\cdot\mathsf{D}\varphi(\infty) + 2\mathsf{E}\varphi(\infty)(\mathsf{E}(\sigma\eta) - \mathsf{E}\sigma\mathsf{E}\eta)))$. Воспользуемся представлением (3) $\psi(n) = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i^*(n-i)$. Легко подсчитать, что $\mathsf{E}(\varphi_i^*(\infty) - \varphi_i^*(k)) \sim cA^k$, $c \neq 0$, $k \to \infty$. Для любого фиксированного k при $n \to \infty$ по у.з.б.ч. $(\varphi_1^*(k) + \ldots + \varphi_n^*(k))/\mathsf{E}\psi(n) \to \mathsf{E}\varphi_i^*(k)/\mathsf{E}\varphi_i^*(\infty)$ (п.н.). Отсюда вытекает сходимость

$\psi(n)/\mathsf{E}\psi(n) \to 1$ (п.н.), а асимптотическая нормальность $\psi(n)$ следует из центральной предельной теоремы (ц.п.т.), примененной к сумме $\varphi_1^*(\infty) + \ldots + \varphi_n^*(\infty)$ и того, что $n^{-1/2}\mathsf{E}\left|\sum_{k=1}^n (\varphi_i^*(n-i) - \varphi_i^*(\infty))\right| \to 0, \quad n \to \infty$.

Доказательство теоремы 3. Хорошо известно [8, 9], что $X(n)A^{-n} \to U$, $Y(n)A^{-n} \to V$ (п.н.), где U и V имеют п.Л. $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$. Запишем $X(n)$ и $\varphi(n)$ в виде

$$X(n)A^{-n} = ((1 + (\xi_1 - 1) + \ldots + (\xi_{\nu(n)} - 1))/\nu(n))(\nu(n)A^{-n}), \quad (6)$$

$$\varphi(n)A^{-n} = ((\tau_1 + \ldots + \tau_{\nu(n)})/\nu(n))(\nu(n)A^{-n}), \quad (7)$$

где ξ_i — н.о.р., τ_i — н.о.р., $\xi_i \overset{d}{=} \xi$, $\tau_i \overset{d}{=} \tau$, а $\nu(n)$ — общее число делений до момента n. У.з.б.ч., примененный к (6), показывает, что п.н. на множестве тех ω, для которых $X(n, \omega) \to \infty$, $n \to \infty$, выполнено соотношение $\nu(n)A^{-n} \to U(A-1)^{-1}$. Вновь применяя у.з.б.ч., но уже к (7), получим, что $\varphi(n)A^{-n} \to \mathsf{E}\tau(A-1)^{-1}U$ (п.н.). Аналогичные рассуждения показывают, что $\psi(n)A^{-n} \to V(\mathsf{E}\tau)(A-1)^{-1}$ (п.н.). В совокупности с (4) это завершает доказательство пункта а). Пункт б) теоремы доказывается совершенно аналогично теореме 3.2.1 [9].

Теорема 4 есть частный случай теоремы 5 и поэтому отдельного доказательства не требует.

Доказательство теоремы 5.

б) В силу (4) достаточно показать, что

$$(\mathsf{E}\exp(-\lambda n^{-2}(\mathsf{E}\tau)^{-1}\varphi_\mu(n)))^N \to \exp(-p^{-1}\alpha(\lambda, c, \gamma_0)) \quad (8)$$

$$\mathsf{E}\exp(-\lambda n^{-2}(\mathsf{E}\tau)^{-1}\psi_\mu(n)) \to \exp\left(\frac{-\mathsf{E}\eta_0}{2}\int_0^\lambda x^{-1}\alpha(x)\,\mathrm{d}x\right). \quad (9)$$

Начнем с первого из этих соотношений. Так как $\varphi_{k,\mu}(n) = \tau_{k,1} + \ldots + \tau_{\nu_{k,\mu}(n)}$, где $\tau_{k,i}$ — н.о.р., $\tau_{k,i} \overset{d}{=} \tau$, а $\nu_{k,\mu}(n)$ — общее число делений в процессе $X_{k,\mu}(n)$ до момента n, то из у.з.б.ч. вытекает, что $(\varphi_{1,\mu}(n) + \ldots + \varphi_{N,\mu}(n))/(\nu_{1,\mu}(n) + \ldots + \nu_{N,\mu}(n)) \xrightarrow{d} \mathsf{E}\tau$ и поэтому достаточно показать, что

$$N(1 - g_\mu(n, e^{-\lambda n^{-2}})) \to p^{-1}\alpha(\lambda), \quad (10)$$

где $g_\mu(n, x) = \mathsf{E}x^{\nu_\mu(n)}$. В [6] показано, что $g_\mu(n+1, x) = xh_\mu(g_\mu(n, x))$, $g_\mu(0, x) = 1$ и $g_\mu(n, x) \downarrow$

$\downarrow g_\mu(x)$, $0 \leqslant x < 1$, $n \to \infty$, где $g_\mu(x)$ — п.ф. возможно несобственной с.в. $\nu_\mu(\infty)$. Следующее неравенство доказано в [6] (индекс μ опускается):

$$\frac{M(x)\,|\,F(x)\,|\,u^n}{1-F(x)\,u^n} \leqslant g(n, x) - g(x) \leqslant \frac{N(x)\,|\,T(x)\,|\,u^n}{1-T(x)\,u^n}, \qquad (11)$$

где $u(x) = xh'(g(x))$, $b = (g(x) - g(n, x))^{-1}$, $M(x) = 2(1-u)h'(g(n, x))/h''(g(x))$, $N(x) = 2u(1-u)/(xh''(g(n, x)))$, $F(x) = (1 + bM(x))^{-1}$, $T(x) = (1 + bN(x))^{-1}$.

Рассмотрим семейства дробно-линейных производящих функций [8, с. 41] $H_\mu^{(1)}(x)$ и $H_\mu^{(2)}(x)$, которые полностью определяются первыми двумя моментами: $H_\mu^{(1)\prime}(1) = H_\mu^{(2)\prime}(1) = h_\mu'(1)$, $H_\mu^{(1)''}(1) = 2\gamma^{(1)}$, $H_\mu^{(2)''}(1) = 2\gamma^{(2)}$, где $\gamma^{(1)} < \gamma_0 < \gamma^{(2)}$.

Пользуясь формулами (1) можно показать, что для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует δ: $|\,h_\mu''(\theta) - h_\mu''(1)\,| < \varepsilon_1$ при $|\,\mu - \mu_0\,| < \delta$, $\theta \in [1-\delta, 1]$. Аналогичное свойство верно и для функций $H_\mu^{(i)}(x)$. Опираясь на этот факт и формулу Тейлора, нетрудно установить существование таких чисел $\varepsilon_2 > 0$ и $x_0 < 1$, что $H_\mu^{(1)}(x) \leqslant h_\mu(x) \leqslant H_\mu^{(2)}(x)$, при $|\,\mu - \mu_0\,| < \varepsilon_2$ и $x \in [x_0, 1]$. Определим функции $g^{(i)}(n, x)$ по формулам $g_\mu^{(i)}(0, x) = 1$, $g_\mu^{(i)}(n+1, x) = xH_\mu^{(i)}(g_\mu^{(i)}(n, x))$, $g_\mu^{(i)}(n, x) \downarrow g_\mu^{(i)}(x)$. Нетрудно видеть, что существует $\varepsilon_3 > 0$ и $x_1 < 1$ такие, что $g_\mu^{(1)}(x) \geqslant x_0$ при $x \in [x_1, 1]$ и $|\,\mu - \mu_0\,| < \varepsilon_3$. По индукции выводится, что $g_\mu^{(1)}(n, x) \leqslant g_\mu(n, x) \leqslant g_\mu^{(2)}(n, x)$ при $x \in [x_2, 1]$, $|\,\mu - \mu_0\,| < \varepsilon_4$, где $x_2 = \max(x_0, x_1)$, $\varepsilon_4 = \min(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Но тогда, так как функция $\alpha(\lambda, c, \gamma)$ непрерывна по γ, то для доказательства (10) достаточно показать, что $N(1 - g_\mu^{(i)}(n, e^{-\lambda n^{-2}})) \to p^{-1}\alpha(\lambda, c, \gamma^{(i)})$. А это означает, что мы с самого начала могли считать, что функция $h_\mu(x)$ имеет дробно-линейный вид: $h_\mu(x) = 1 - A_\mu(1-x)/(1 + \gamma_0 A_\mu^{-1}(1-x))$. Этот вывод сразу устраняет с нашего пути все препятствия, делая задачу чисто технической. Действительно, теперь мы можем в явном виде найти функцию $g_\mu(x)$ как решение некоторого квадратного уравнения, а также все функции, входящие в неравенство (11). Нужный окончательный результат выглядит следующим образом:

$$
\begin{gathered}
1-g\left(\mathrm{e}^{-\lambda n^{-2}}\right) \sim\left(2 \gamma_0 n\right)^{-1}\left(\sqrt{c^2+4 \gamma_0 \lambda}-c\right), \\
1-u\left(\mathrm{e}^{-\lambda n^{-2}}\right) \sim n^{-1} \sqrt{c^2+4 \gamma_0 \lambda}, \\
N\left(\mathrm{e}^{-\lambda n^{-2}}\right) \sim M\left(\mathrm{e}^{-\lambda n^{-2}}\right) \sim\left(\gamma_0 n\right)^{-1} \sqrt{c^2+4 \gamma_0 \lambda}, \qquad (12)\\
T\left(\mathrm{e}^{-\lambda n^{-2}}\right) \sim F\left(\mathrm{e}^{-\lambda n^{-2}}\right) \sim\left(c-\sqrt{c^2+4 \gamma_0 \lambda}\right) /\left(c+\sqrt{c^2+4 \gamma_0 \lambda}\right), \\
g\left(n, \mathrm{e}^{-\lambda n^{-2}}\right)-g\left(\mathrm{e}^{-\lambda n^{-2}}\right) \sim \\
\sim\left(\gamma_0 n\right)^{-1}\left(\sqrt{c^2+4 \gamma_0 \lambda}\left(\sqrt{c^2+4 \gamma_0 \lambda}-c\right) \cdot\right. \\
\cdot \mathrm{e}^{-\sqrt{c^2+4 \gamma_0 \lambda}}) /\left(c\left(1-\mathrm{e}^{-\sqrt{c^2+4 \gamma_0 \lambda}}\right)+\right. \\
\left.+\sqrt{c^2+4 \gamma_0 \lambda}\left(1+\mathrm{e}^{-\sqrt{c^2+4 \gamma_0 \lambda}}\right)\right), \quad \mu \rightarrow \mu_0, \quad a_\mu n \rightarrow c .
\end{gathered}
$$

Из (12) следует (10). Перейдем к доказательству (9). Опираясь на соотношение (10) нетрудно доказать, что для любого $\varepsilon>0$

$$
\begin{gathered}
\sum_{k=[n \varepsilon]}^n\left(1-g\left(k, \mathrm{e}^{-\lambda n^{-2}}\right)\right) \sim \sum_{k=[n \varepsilon]}^n k^{-1} \alpha\left(\lambda k^2 n^{-2}, c, \gamma_0\right) \sim \\
\sim \int_{\varepsilon \sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} x^{-1} \alpha\left(x^2, c, \gamma_0\right) \mathrm{d} x=\frac{1}{2} \int_{\varepsilon^2 \lambda}^\lambda x^{-1} \alpha\left(x, c, \gamma_0\right) \mathrm{d} x . \qquad (13)
\end{gathered}
$$

Легко видеть, что (13) остается верным и при $\varepsilon=0$. Поскольку $-\log f_\mu(x) \sim f_0^{\prime}(1)(1-x), \mu \rightarrow \mu_0, x \rightarrow 1$, то из (13) вытекает

$$
-\sum_{k=0}^n \log f_\mu\left(g\left(k, \mathrm{e}^{-\lambda n^{-2}}\right)\right) \rightarrow \frac{\mathrm{E} \eta_0}{2} \int_0^\lambda x^{-1} \alpha\left(x, c, \gamma_0\right) \mathrm{d} x . \qquad (14)
$$

Соотношение (14) влечет за собой (9), подобно тому как из (10) следовало (8). Пункт б) теоремы доказан.

а) Мы используем следующее простое следствие критерия Линдеберга.

ЛЕММА 1. *Пусть с.в.* $Z_i(l), i=1,2, \ldots$ *независимы и одинаково распределены для каждого* l *и* $Z_i(l) \xrightarrow{d} Z$, $\mathrm{D} Z_i(l) \rightarrow \mathrm{D} Z<\infty$, *при* $l \rightarrow l_0$. *Тогда при* $n \rightarrow \infty$ *и* $l \rightarrow l_0$, $Z_1(l)+\ldots+Z_n(l) \sim \mathscr{N}\left(n \mathrm{E} Z_i(l), n \mathrm{D} Z\right)$.

Пункт а) теоремы будет доказан, если

$$
\begin{aligned}
S=n^{-3/2} N^{-1/2}\left(\varphi_1(n)+\ldots+\varphi_N(n)+\psi(n)-N \mathrm{E} \varphi(n)\right) \sim \\
\sim \mathscr{N}\left(0,2 \gamma_0(\mathrm{E} \tau)^2 c^{-3}\left(1-2 \mathrm{e}^{-2 c}-2 c \mathrm{e}^{-c}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Обозначим $Z_i(n)=n^{-2} \sum_{j=(i-1) n+1}^{i n} \varphi_j(n) \quad(i=1, \ldots,[N / n])$.

В силу пункта б) $Z_i(n) \xrightarrow{d} Z$, где $\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda Z}\right)=\exp (-\alpha(\lambda \mathrm{E} \tau$,

$c, \gamma_0)$), а используя (5) легко проверить, что $\mathsf{D}Z_i(n) \to \to \mathsf{D}Z = 2\gamma_0 c^{-3}(\mathsf{E}\tau)^2(1 - 2\mathrm{e}^{-2c} - 2c\mathrm{e}^{-c})$. Так как $n/N \to 0$, то $\psi(n) n^{-3/2} N^{-1/2} \xrightarrow{d} 0$ и $\left(\sum_{j=n[N/n]+1}^{N} \varphi_j(n)\right) n^{-3/2} N^{-1/2} \xrightarrow{d} 0$. Поэтому

$$S \sim n^{-3/2} N^{-1/2} (n^2 (Z_1(n) + \ldots + Z_{[N/n]}(n)) - nN\mathsf{E}Z_i(n)) \sim$$
$$\sim (Z_1(n) + \ldots + Z_{[N/n]}(n) - [N/n]\,\mathsf{E}Z_i(n))\,[N/n]^{-1/2} \sim$$
$$\sim \mathscr{N}(0, 2\gamma_0 (\mathsf{E}\tau)^2 c^{-3} (1 - 2\mathrm{e}^{-2c} - 2c\mathrm{e}^{-c}))$$

по лемме 1. Приведенное доказательство сохраняется и в случае $c = 0$, если положить значение $c^{-3}(1 - 2\mathrm{e}^{-2c} - 2c\mathrm{e}^{-c})$ равным 1/3. Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. В силу (4) достаточно показать, что

$$\psi(n) \sim \mathscr{N}(n(\mathsf{E}\varphi(\infty)\mathsf{E}\eta_\mu + \mathsf{E}\sigma),\ 2\gamma_0 n a^{-3} \mathsf{E}\eta_0 (\mathsf{E}\tau)^2), \qquad (15)$$

$$\varphi_1(n) + \ldots + \varphi_N(n) \sim \mathscr{N}(N\mathsf{E}\varphi(n),\ 2\gamma_0 (\mathsf{E}\tau)^2 N a^{-3}), \qquad (16)$$

причем при доказательстве (16) можно считать, что $aN \to \infty$, так как если $\limsup aN < \infty$, то $n^{-1/2} a^{3/2} \mathsf{E}(\varphi_1(n) + \ldots + \varphi_N(n)) \to 0$ и соответствующие члены в (4) не влияют на асимптотику $W(n\Delta, N_1, N_2)$. Соотношения (15) и (16) будут следовать из следующей леммы.

ЛЕММА 2. *Пусть* $aN \to c < \infty$, $an \to \infty$, $\mu \to \mu_0$. *Тогда*

$$\mathsf{E}\exp(-\lambda (\mathsf{E}\tau)^{-1} N^{-2} (\varphi_1(n) + \ldots + \varphi_N(n))) \to$$
$$\to \exp((2\gamma_0)^{-1}(c - \sqrt{c^2 + 4\gamma_0\lambda})).$$

Доказательство. Оно очень похоже на доказательство пункта б) теоремы 5, поэтому мы дадим лишь краткий набросок. Вновь можно ограничиться дробно-линейными производящими функциями $h_\mu(x)$ и воспользоваться неравенством (11). Несложный анализ показывает, что $1 - g(\mathrm{e}^{-\lambda N^{-2}}) \sim (2\gamma_0 N)^{-1} (\sqrt{c^2 + 4\gamma_0\lambda} - c)$ и $g(n, \mathrm{e}^{-\lambda N^{-2}}) - g(\mathrm{e}^{-\lambda N^{-2}}) = o(1 - g(\mathrm{e}^{-\lambda N^{-2}}))$. Поэтому $1 - g(n, \mathrm{e}^{-\lambda N^{-2}}) \sim (2\gamma_0 N)^{-1} (\sqrt{c^2 + 4\gamma_0\lambda} - c)$, откуда вытекает утверждение леммы.

Соотношение (16) доказывается так же, как пункт а) теоремы 5: $\varphi_1(n) + \ldots + \varphi_N(n)$ представляется в виде $a^{-2}(Z_1(n) + \ldots + Z_I(n)) + \sum_{i=I[a^{-1}]+1}^{N} \varphi_i(n)$, где $Z_i(n) = a^2(\varphi_{(i-1)[a^{-1}]+1}(n) + \ldots + \varphi_{i[a^{-1}]}(n))$, $I = [N/[a^{-1}]]$ и используются леммы 1 и 2.

Перейдем к (15). Из (3) следует, что $\psi(n) = n\mathsf{E}\sigma + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{\eta(i)}\varphi_k(i) + o(n^{1/2}a^{-3/2})$, где с. в. $\eta(i)$, $\varphi_k(i)$ независимы, $\eta(i) \overset{d}{=} \eta$, $\varphi_k(i) \overset{d}{=} \varphi(i)$. Так как $a > 0$, то $\varphi_k(\infty)$ — собственная с. в. Используя (5), легко подсчитать, что

$$n^{-1/2}a^{3/2}\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\eta(i)}(\varphi_k(i) - \varphi_k(\infty))\right) = O((an)^{-1/2}) \to 0.$$

Поэтому (15) будет доказано, если $\varphi_1(\infty) + \ldots + \varphi_\varkappa(\infty) \sim \mathcal{N}(n\mathsf{E}\varphi(\infty)\mathsf{E}\eta,\ \mathsf{E}\eta_0(\mathsf{E}\tau)^2(2\gamma_0)na^{-3})$, где $\varkappa = \eta(1) + \ldots + \eta(n-1)$. Нетрудно убедиться, что (16) справедливо и если $n = \infty$. Следовательно, $\varphi_1(\infty) + \ldots + \varphi_n(\infty) \sim \mathcal{N}(n\mathsf{E}\varphi(\infty),\ 2\gamma_0(\mathsf{E}\tau)^2 na^{-3})$. Осталось лишь заметить, что $\varkappa/n \overset{d}{\to} \mathsf{E}\eta_0$, $\mu \to \mu_0$ и воспользоваться теоремой переноса [10]. Теорема 6 доказана.

Доказательство теоремы 7. Теорема будет доказана, если удастся показать, что

$$\varphi_1(n) + \ldots + \varphi_N(n) \sim \mathcal{N}(N\mathsf{E}\varphi(n),\ 2\gamma_0(\mathsf{E}\tau)^2(-a)^3 e^{-2na}N) \tag{17}$$

при $aN \to -\infty$,

$$\mathsf{E}\exp(-\lambda(\mathsf{E}\tau)^{-1}e^{an}N^{-1}(-a)(\varphi_1(n) + \ldots + \varphi_N(n))) \to \\ \to \exp(-\lambda/(1 + \gamma_0\lambda c^{-1})) \tag{18}$$

при $(-a)N \to c$, $0 < c < \infty$ и

$$\mathsf{E}\exp(-\lambda a^2 e^{an}(\mathsf{E}\tau)^{-1}\psi(n)) \to (1 + \gamma_0\lambda)^{-\mathsf{E}\eta_0/\gamma_0}. \tag{19}$$

Как и в теоремах 5, 6 соотношение (18) является ключевым; формулы (17) и (19) есть его следствия. Отметим, что для доказательства (18) требуется иная аргументация, чем в двух предыдущих теоремах — попытка вновь воспользоваться неравенством (11) привела бы нас лишь к заключению, что $1 - g(\exp(a\lambda e^{an}N^{-1})) \sim g(n, \exp(a\lambda e^{an}N^{-1})) - g(\exp(a\lambda e^{an}N^{-1}))$, а это не дает возможности определить асимптотику $1 - g(n, \exp(a\lambda e^{an}N^{-1}))$.

Напомним, что $X(n)$ обозначает число частиц в процессе Гальтона—Ватсона в момент n; $X_i(n)$ — н.о.р., $X_i(n) \overset{d}{=} X(n)$.

ЛЕММА 3. *Пусть* $(-a)N \to c$, $0 < c < \infty$, $an \to -\infty$, $\mu \to \mu_0$. *Тогда* $\mathsf{E}\exp(-\lambda N^{-1}e^{an}(X_1(n) + \ldots + X_N(n))) \to \exp(-\lambda/(1 + \gamma_0\lambda c^{-1}))$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 5 можно ограничиться лишь дробно-линейными производящими функциями $h_\mu(s) = 1 - A_\mu(1-s)/(1 + \gamma_0(1-s)A_\mu^{-1})$. Любая итерация $h_\mu(s)$ также будет дробно-линейной функцией [8]. Это дает возможность явно выписать $\mathsf{E}s^{X_i(n)} = 1 - A_\mu^n(1-s)/(1+\gamma_0(n)(1-s)A_\mu^{-n})$, где $\gamma_0(n) = \gamma_0 A_\mu^{n-1}(A_\mu^n - 1)(A_\mu - 1)^{-1}$, откуда тривиально получается утверждение леммы.

Процесс $\varphi_i(n)$ допускает, очевидно, следующее разложение:

$$\varphi_i(n) = \varphi_i(m) + \varphi_{i,1}(n-m) + \ldots + \varphi_{i,X_i(m)}(n-m), \qquad (20)$$

для любого целого $m \leqslant n$, где $X_i(m)$ — число частиц в процессе, $\varphi_{i,j}(\cdot) \overset{d}{=} \varphi(\cdot)$ и с. в. $X_i(m)$, $\varphi_{i,j}(n-m)$ независимы. Выбирая $m = [n/2]$ и суммируя (20) по всем $i = 1, \ldots, N$, получим $S = \varphi_1(n) + \ldots + \varphi_N(n) = S_1 + S_2$, где $S_1 = \varphi_1(m) + \ldots + \varphi_N(m)$, $S_2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{X_i(m)}\varphi_{i,j}(n-m)$. Так как $\mathsf{E}(ae^{an}N^{-1}S_1) \to 0$, то $S(-a)(\mathsf{E}\tau)^{-1}N^{-1}e^{an} \sim S_2(-a)(\mathsf{E}\tau)^{-1}N^{-1}e^{an}$. Число слагаемых в сумме S_2 случайно и равно $\varkappa = X_1(m) + \ldots + X_N(m)$, причем $\mathsf{E}\exp(-\lambda N^{-1}e^{am}\varkappa) \to \exp(-\lambda/(1+\gamma_0\lambda c^{-1}))$. Легко видеть, что $(-a)(\mathsf{E}\tau)^{-1}N^{-1}e^{an}(\varphi_1(n-m) + \ldots + \varphi_{[Ne^{-am}]}(n-m)) \xrightarrow{d}$ $\xrightarrow{d} 1$ (так как математическое ожидание стремится к 1, а дисперсия к 0). Соотношение (18) следует теперь из теоремы переноса [10].

Так же, как и в двух предыдущих теоремах из (18) вытекает (17).

Те же доводы, что были использованы нами для получения (9), показывают, что (19) будет доказано, если

$$\sum_{k=0}^{n}(1 - Q(k, \lambda a^2 e^{an}(\mathsf{E}\tau)^{-1})) \to \gamma_0^{-1}\log(1+\gamma_0\lambda),$$

где $Q(k,\lambda) = \mathsf{E}\exp(-\lambda\varphi(k))$. Обозначая $\rho(\lambda) = \lambda/(1+\gamma_0\lambda)$, $\theta(x) = \rho(e^{-x})$ и полагая в (18) $N = [a^{-1}]$, получим, что $a^{-1}(1 - Q(n, \lambda a^2 e^{an}(\mathsf{E}\tau)^{-1})) \to \rho(\lambda)$ для любого $\lambda > 0$. Поэтому

$$\sum_{k=0}^{n}(1 - Q(k, \lambda a^2 e^{an}(\mathsf{E}\tau)^{-1})) \sim$$
$$\sim a\sum_{k=0}^{n}\rho(\lambda e^{ak}) = a\sum_{k=0}^{n}\theta(-\log\lambda - ak) \to$$
$$\to \int_{-\log\lambda}^{\infty}\theta(x)\,dx = \gamma_0^{-1}\log(1+\gamma_0\lambda).$$

Теорема 7 доказана.

В заключение переформулируем полученные выше результаты на систему $M \mid M \mid 1$ с разделением процессора (при тех же предположениях о входящем потоке). Обозначим: $N(t) + 1$ — общее число требований в системе в момент t, l — длину выделенного требования, $W(l, N)$ — время ожидания этим требованием конца обслуживания, при условии, что $N(0) = N$. Рассмотрим марковский ветвящийся процесс с непрерывным временем, в котором частицы живут показательно распределенное время со средним $(1 + \mu)^{-1}$ и затем делятся на случайное число потомков с производящей функцией $(1 + \mu)^{-1} + sB(s) \cdot \mu (1 + \mu)^{-1}$. Пусть $X(T)$ — число частиц в момент T, $X_i(T)$ — н.о.р., $X_i(T) \overset{d}{=} X(T)$. Рассмотрим, кроме того, процесс с иммиграцией [8]: пусть через показательные времена со средним μ^{-1} в процесс иммигрирует случайное число частиц с производящей функцией $B(s)$, размножающихся затем как это описано выше. Число частиц в таком процессе обозначим $Y(T)$, $Y(0) = 0$. Пусть $S(T) = 1 + Y(T) + X_1(T) + \ldots + X_N(T)$, $R(T, N) = \int_0^T S(u)\,\mathrm{d}u$ и t_1 (соответственно T_1) первый момент изменения $N(t)$ (соответственно $S(T)$). Тогда $R(l, N) = (N + 1) T_1 + R'(l - T_1, S(T_1 + 0))$ и $W(l, N) = t_1 + W'(l - t_1 (N + 1)^{-1}, N(t_1 + 0))$, где $R'(\cdot, \cdot)$ и $W'(\cdot, \cdot)$ — вероятностные копии процессов $R(\cdot, \cdot)$ и $W(\cdot, \cdot)$, независящие, соответственно, от T_1, $S(T_1 + 0)$ и t_1, $N(t_1 + 0)$. Нетрудно видеть, что $(t_1, N(t_1 + 0)) \overset{d}{=} ((N + 1) T_1, S(T_1 + 0))$, более того, можно легко добиться, чтобы это равенство выполнялось п.н. Отсюда получается следующий аналог теоремы 1.

ТЕОРЕМА 8. *Система $M \mid M \mid 1$ с разделением процессора и ветвящиеся процессы $X_i(T)$, $Y(T)$ могут быть определены на одном вероятностном пространстве так, чтобы $W(l, N) = R(l, N)$ (п.н.).*

Исследованию интегралов от ветвящихся процессов посвящен ряд работ (см., например, [9, 11, 12], где приведены выражения для моментов и некоторые предельные теоремы. В частности,

$$\mathsf{E}\left(\int_0^t X(u)\,\mathrm{d}u\right) = r^{-1}(\mathrm{e}^{rt} - 1),$$

$$\mathsf{D}\left(\int_0^t X(u)\,\mathrm{d}u\right) = (1 + \mu(B'(1) + B''(1)))r^{-3}(\mathrm{e}^{2rt} - 1 - 2rt\mathrm{e}^{rt}),$$

$$\mathsf{E}\left(\int_0^t Y(u)\,\mathrm{d}u\right)=\mu B'(1)\,(r^{-2}(\mathrm{e}^{rt}-1)-r^{-1}t),$$

$$\mathsf{D}\left(\int_0^t Y(u)\,\mathrm{d}u\right)=\mu\int_0^t (B''(1)\,(\mathsf{E}X(u))^2+B'(1)\,\mathsf{E}X^2(u))\,\mathrm{d}u,$$

где $r=\mu B'(1)-1$.

Теоремы 9 и 10 являются аналогами теорем 2, 3.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть* $r<0$ *и* $l+N\to\infty$, $\liminf l>0$. *Тогда*

а) $W(l, N)\sim r^{-1}(N(\mathrm{e}^{rl}-1)-l)$ *(п.н.)*;

б) если $B''(1)<\infty$, *то* $W(l, N)\sim\mathcal{N}(Nr^{-1}(\mathrm{e}^{rl}-1)-lr^{-1}, -Nr^{-3}(1+\mu(B'(1)+B''(1)))-lr^{-3}(\mu B''(1)+2\mu B'(1)))$.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть* $r>0$. *Тогда*

а) *при фиксированном* N *и* $l\to\infty$, $W(l, N)\,\mathrm{e}^{-rl}\to r^{-1}(V+U_1+\ldots+U_N)$, *где* V, U_i — *независимые с.в. и их преобразования Лапласа* $u(\lambda)=\mathsf{E}\mathrm{e}^{-\lambda U_i}$ *и* $v(\lambda)=\mathsf{E}\mathrm{e}^{-\lambda V}$ *удовлетворяют уравнениям*

$$u'(\lambda)=(\lambda r)^{-1}(1+u(\lambda)(\mu B(u(\lambda))-1-\mu)),$$

$$v(\lambda)=\exp\left(r^{-1}\mu\int_0^\lambda x^{-1}(B(u(x))-1)\,\mathrm{d}x\right),\quad u'(0)=-1;$$

б) *если* $B''(1)<\infty$, $N\to\infty$ и $\liminf l>0$, *то* $W(l, N)\sim\mathcal{N}(Nr^{-1}(\mathrm{e}^{rl}-1),\ (1+\mu(B'(1)+B''(1)))\,r^{-3}(\mathrm{e}^{2rl}-2rl\mathrm{e}^{rl}-1))$.

Теорема 9 вытекает из у.з.б.ч., леммы 1 и результатов работ [11, 12]. Факт сходимости $X_i(l)\,\mathrm{e}^{-rl}\to U_i$ и $Y(l)\,\mathrm{e}^{-rl}\to V$, $l\to\infty$ хорошо известен [8]. Отсюда сразу следует пункт а) теоремы 10 (сравните с теоремой 6 из [11]), а затем, применяя лемму 1, получаем утверждение пункта б) этой теоремы.

Аналоги теорем 4—7 можно получить, если рассмотреть процесс с непрерывным временем в дискретные моменты $T=n\delta$. Получится ветвящийся процесс Гальтона—Ватсона, у которого при каждом делении выделяется финальный продукт, равный (по распределению) $\int_0^\delta X(u)\,\mathrm{d}u$, т. е. процесс такого же типа, что был рассмотрен выше. Это дает возможность формулировать предельные теоремы для $W(l, N)$ при $l+N\to\infty$, $r\to 0$ и $l=n\delta$ $(n=1, 2, \ldots)$. Стандартные рассуждения (см. [13, с. 113]) позволяют избавиться от ограничения $l=n\delta$. Окончательный вывод таков: теоремы 4—7 сохраняют свою силу, если в них заменить n на l, N_1 на N,

N_2 на 0, $W(n\Delta, N_1, N_2)$ на $W(l, N)$, a на $-r$, $\mathsf{E}\varphi(n)$ на

$$\mathsf{E}\left(\int_0^l X(u)\,\mathrm{d}u\right), \quad \gamma_0 \text{ на } 1+\frac{B''(1)}{2B'(1)}, \ \mathsf{E}\sigma, \mathsf{E}\tau, \mathsf{E}\eta_0 \text{ на } 1.$$

Отметим, что во всех рассмотренных выше случаях значение математического ожидания $\mathsf{E}W(l, N) = Nr^{-1}(e^{rl}-1)+\mu B'(1)(r^{-2}(e^{rl}-1)-r^{-1}l)+l$ (так же как и значение $\mathsf{E}W(n\Delta, N_1, N_2)$ в СМО с круговым доступом) правильно отражает порядок роста $W(l, N)$ при $l+N\to\infty$. Действительно, сформулированные теоремы показывают, что нормированные с.в. $W(l, N)/\mathsf{E}W(l, N)$ имеют предел при $l+N\to\infty$.

Завершая статью, укажем на то, что теория ветвящихся процессов позволяет устанавливать и другие свойства рассмотренных СМО. Мы не стали приводить соответствующие утверждения по следующим соображениям: сама возможность изучать СМО с дисциплиной разделения процессора или круговым доступом при помощи ветвящихся процессов полностью сохраняется и для более сложной системы $M \mid G \mid 1$ с неординарным входящим потоком. При этом, однако, мы столкнемся с необходимостью иметь дело не с марковскими ветвящимися процессами, а с более сложной моделью процессов Крампа—Мода—Ягерса (см. [9]). Во многих задачах такое усложнение не становится серьезным препятствием и соответствующие теоремы естественно сразу формулировать применительно к системе $M \mid G \mid 1$ (что и будет сделано в одной из последующих работ). В настоящей же статье собраны в основном те теоремы, которые, как нам кажется, будет не просто перенести на случай системы $M \mid G \mid 1$. Это связано в первую очередь с тем, что соответствующие разделы теории ветвящихся процессов Крампа—Мода—Ягерса практически не развиты (мы имеем в виду прежде всего изучение переходных явлений). Не совсем понятно и то, какими должны быть естественные постановки задач в случае системы $M \mid G \mid 1$. Ясно, что старое предположение о том, что в момент 0 в системе было N требований в данном случае бессмысленно: надо обязательно иметь информацию и об остаточных длинах этих требований. Все эти проблемы ждут своего решения.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
04.01.88

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Китаев М. Ю., Яшков С. Ф. Распределение условного времени пребывания в системе с разделением времени обслуживания // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. 1978. № 4. С. 211—215.

[2] Yashkov S. F. A derivation of response time distribution for a $M \mid G \mid 1$ processor-sharing queue // Probl. Control and Inform. Theory. 1983. V. 12, № 2. P. 133—148.

[3] Schassberger R. A new approach to the $M \mid G \mid 1$ processor-sharing queue // Adv. Appl. Probab. 1984. V. 16, № 1. P. 202—213.

[4] Ott T. The sojourn time distribution in the $M \mid G \mid 1$ queue with processor sharing // J. Appl. Probab. 1984. V. 21, № 2. P. 360—378.

[5] Coffman E., Muntz R., Trotter H. Waiting time distributions for processor-sharing systems // J. Assoc. Comput. Machin. 1970. V. 17, № 1. P. 123—130.

[6] Pakes A. G. Some limit theorems for the total progeny of a branching process // Adv. Appl. Probab. 1971. V. 3, № 1. P. 176—192.

[7] Pakes A. G. Further results on the critical Galton — Watson process with immigration // J. Austral. Math. Soc. 1972. V. 13, № 3. P. 277—290.

[8] Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971.

[9] Jagers P. Branching processes with biological applications.— London: Wiley, 1975.

[10] Гнеденко Б. В., Гуссейн Фахим. Об одной теореме переноса // ДАН СССР. 1969. Т. 187, № 1. С. 15—18.

[11] Puri P. S. Some limit theorems on branching processes and certain related processes // Sankhya. A31, № 1. P. 57—75.

[12] Pakes A. G. Limit theorems for the integrals of some branching processes // Stochas. Proces. Appl. 1975. V. 3, № 1. P. 89—111.

[13] Athreya K., Ney P. Branching processes. Berlin: Springer, 1972.