*ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2005, т. 250, с. 219–225*

*УДК 517.9+533.7*

# Кинетические уравнения и проблемы проекции Чепмена–Энскога[1]

**©2005 г. Е. В. Радкевич[2]**

Поступило в январе 2005 г.

Хорошо известна так называемая ультрафиолетовая катастрофа, возникающая для низкочастотных усечений проекции Чепмена–Энскога моментных аппроксимаций кинетического уравнения Больцмана. Впервые это было отмечено в работе А.В. Бобылева в 1992 г. в простейшем режиме (одномерного линейного отклонения от состояния глобального равновесия). На примере моментной аппроксимации кинетического уравнения Больцмана–Пайерлса доказывается существование проекции Чепмена–Энскога в фазовое пространство консервативной переменной в классе псевдодифференциальных гиперболических систем первого порядка с релаксацией, что позволяет дать объяснение феномена “ультрафиолетовой катастрофы”.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Одна из основных проблем моментной теории описания процессов неравновесной термодинамики связана со специфическими трудностями смешанных задач для систем моментов. Часть неизвестных задачи — неравновесные переменные (моменты высших порядков) — не имеют интуитивного физического смысла. Такие переменные не могут быть определены из эксперимента [1, 5]. Тогда что значат для них данные Коши и тем более граничные данные? Это должно учитываться при формулировке смешанной задачи в структуре краевых условий. Каковы в этом случае корректные с физической точки зрения граничные условия?

Сравнительный анализ точных решений задачи Коши кинетических уравнений и их моментных аппроксимаций показывает, что для разумно малой невязки требуется достаточно большое число неравновесных переменных. Например, адекватное описание тепловых процессов в кристаллах [5] обеспечивается не менее чем 40-моментной аппроксимацией кинетического уравнения Больцмана–Пайерлса. Число граничных условий, учитывающих поведение неравновесных переменных в окрестности границы, невелико. Для разреженного газа возможен скачок температуры на стенке и возможно появление скорости проскальзывания. Впервые граничные условия, описывающие эти феномены, были предложены в [9]. Однако таких условий недостаточно для формулировки полноценных граничных задач. Вопросы же, возникающие при моделировании процессов в окрестности границы, связаны прежде всего с поведением неравновесных переменных в окрестности границы, с их ролью в устойчивости процессов на больших временах. Эти вопросы связаны с исследованием условий устойчивости предельного перехода к смешанной задаче для предельных систем моментных аппроксимаций кинетических уравнений [6]. Например, исследование предельного перехода при $\mathrm{Kn} \to \infty$ или $t \to \infty$ от смешанной задачи моментной аппроксимации кинетического уравнения Больцмана к смешанной задаче для системы уравнений Эйлера газовой динамики.

Как мы уже отмечали, экспериментально невозможно контролировать начальные и граничные значения для моментов высших порядков, которые мы назвали неравновесными в

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-01-00189).

[2]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: evrad@land.ru

отличие от базовых консервативных величин (гидродинамических величин), имеющих физическую интерпретацию. Предложенный Чепменом и Энскогом подход [3] позволяет остаться в рамках начальных и граничных условий только для консервативных переменных, поскольку суть подхода состоит в нахождении операторной зависимости неравновесных переменных от базовых консервативных величин, т.е. в нахождении проекции из фазового пространства моментных аппроксимаций в фазовое пространство консервативных переменных. Для проекции Чепмена–Энскога системы моментов требуются начальные и краевые условия в фазовом пространстве базовых переменных.

## 2. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Классической проблемой физической кинетики является вывод уравнений гидродинамики из микроскопического описания (включение уравнений гидродинамики в иерархию систем моментов). Знаменитый метод Чепмена–Энскога (MChEns) [3] дает возможность вычислить решения кинетического уравнения Больцмана как формальные ряды по степеням малого параметра $\varepsilon = 1/\mathrm{Kn}$, $\mathrm{Kn}$ — число Кнудсена. Этот параметр отражает пропорцию между средней длиной свободного пробега частицы и шкалой изменения гидродинамических величин — плотности, средней скорости и температуры. Обрыв (усечение) ряда Чепмена–Энскога на членах порядка $\varepsilon^0$ приводит к гидродинамике Эйлера; гидродинамику Навье–Стокса получаем как первую поправку ($\varepsilon^1$), также получаем так называемые барнет- и супер-барнет-гидродинамики, которые отвечают $\varepsilon^2$ и $\varepsilon^3$ соответственно.

Целью введения пост-навье–стокс-членов является расширение гидродинамического описания за область строго гидродинамического предела $\varepsilon \ll 1$. Однако даже в простейшем режиме — одномерном линейном отклонении от состояния глобального равновесия [1, 2] система уравнений гидродинамики Барнета нарушает базовые физические условия вывода уравнения Больцмана. А именно достаточно короткие акустические волны неустойчивы (так называемая ультрафиолетовая катастрофа), возрастают по времени вместо затухания, что приводит к противоречию с $H$-теоремой, в силу которой любое достаточно малое возмущение состояния равновесия должно *затухать*.

Более того, эта ситуация не улучшается в следующем приближении — супер-барнет. Ультрафиолетовая катастрофа, которая проявляется в низших по порядку усечениях разложения Чепмена–Энскога, приводит к очень серьезным трудностям в проблеме расширения гидродинамического описания в области, далеко неравновесные [1, 3].

Приближения Эйлера и Навье–Стокса остаются базовыми в гидродинамическом описании, поэтому задача их расширения — одна из центральных открытых проблем кинетической теории.

Что же происходит в аппроксимации Чепмена–Энскога кинетических уравнений? Ссылка на асимптотический характер этого метода неубедительна. В любых "расходимостях" разумных асимптотических методов, как правило, надо искать более глубокие корни, лежащие в характерных свойствах описываемых ими моделей и их структур.

Расходимость в низших по иерархии усечениях формальных разложений далеко не удивительна. Во многих случаях, например в квантовой теории и статистической физике, такая ситуация часто улучшается при включении в рассмотрение членов разложения более высокого порядка.

На наш взгляд, констатации этого факта недостаточно. Важно понять, что есть *критерий* "допустимости" усечения: именно он требует внимания и исследования. То есть мы опять приходим к необходимости указания критерия *корректности* отбора допустимых усечений, отбора допустимых систем в иерархии аппроксимаций. Постараемся объяснить возникающие здесь проблемы на примерах.

В этом разделе мы остановимся на проекции Чепмена–Энскога *для задачи Коши*. Каковы основные требования к проекции Чепмена–Энскога в этом случае?

1. Проекция системы моментов должна быть *гиперболической системой с релаксацией*, т.е. проекция должна действовать в рамках гиперболических систем с релаксацией: главная часть проекции системы моментов — гиперболическая псевдодифференциальная система первого порядка и решения задачи Коши для этой системы устойчивы.
2. Псевдодифференциальные операторы проекции Чепмена–Энскога должны иметь порядки *не выше нулевого*.

Чтобы понять природу проекции Чепмена–Энскога, начнем с задачи, для которой она прежде всего была предназначена.

**Приближение Навье–Стокса–Фурье.** Рассмотрим одномерную 13-моментную систему Грэда для кинетического уравнения Больцмана

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}\varrho + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho v) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^1,\\
\frac{\partial}{\partial t}(\varrho v) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho v^2 + \frac{k}{m}T\varrho + \sigma\right) = 0,\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(v^2 + 3\frac{k}{m}T\varrho\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho q v^3 + 5\frac{k}{m}T\varrho v + 2\sigma v + 2q\right) = 0,\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2}{3}\varrho v^2 + \sigma\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}\varrho v^3 + \frac{4}{3}\frac{k}{m}T\varrho v + \frac{7}{3}\sigma v + \frac{8}{15}q\right) = -B\varrho\sigma,\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho v^3 + 5\frac{k}{m}T\varrho v + 2\sigma v + 2q\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho v^4 + 8\frac{k}{m}T\varrho v^2 + 5\sigma v^2 + \frac{32}{5}qv + \frac{k}{m}T\left(5\frac{k}{m}T\varrho + 7\sigma\right)\right) =\\
= -2B\varrho\left(\frac{2}{3}q + \sigma v\right)
\end{gathered}
\tag{1}
$$

и применим к ней метод Чепмена–Энскога. Здесь базовые гидродинамические переменные: плотность $\varrho$, скорость $v$ и температура $T$. Неравновесные переменные: $\sigma = p_{\langle 11\rangle}$ — девиатор давления и $q$ — первая компонента $q_1$ теплового потока. $B$ используется для обозначения числа Кнудсена Kn.

Чтобы понять природу метода Чепмена–Энскога, для простоты рассмотрим линеаризацию системы (1) около состояния равновесия $\varrho_E = \mathrm{const}$, $v_E = \mathrm{const}$, $T_E = \mathrm{const}$, $\sigma = 0$, $q = 0$. Линеаризованную систему (1) представим в виде

$$
\mathcal{A}^x_{13}\partial_x\mathcal{U} + \mathcal{A}^\tau_{13}\partial_\tau\mathcal{U} + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{A}^B_{13}\mathcal{U} = 0, \qquad \partial_\tau = \partial_t + \mu_E\partial_x, \tag{2}
$$

$$
\mathcal{A}^x_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{15}\\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{2} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}, \qquad
\mathcal{A}^\tau_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad
\mathcal{A}^B_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \tag{3}
$$

Вектор $\mathcal{U}$ имеет компоненты $\langle v, \varrho, U, \sigma, q\rangle$, где $U = \frac{k}{m}T - \frac{2}{5}\varrho$. Здесь, следуя процедуре метода Чепмена–Энскога, мы ввели формально малый параметр $\varepsilon$ — время релаксации. Например, для разреженного газа число Кнудсена $B \gg 1$, поэтому замена $\varepsilon = 1/B$ также соответствует процедуре введения малого параметра в методе Чепмена–Энскога. Проверим, что и в этом случае разложение Чепмена–Энскога неравновесных переменных является *перегруппировкой* регулярного асимптотического разложения

$$\begin{aligned} \varrho(x,t,\varepsilon) &= \varrho_0(x,t) + \varepsilon\varrho_1(x,t) + \varepsilon^2\varrho_2(x,t) + \ldots, \\ u(x,t,\varepsilon) &= u_0(x,t) + \varepsilon u_1(x,t) + \varepsilon^2 u_2(x,t) + \ldots, \\ U(x,t,\varepsilon) &= U_0(x,t) + \varepsilon U_1(x,t) + \varepsilon^2 U_2(x,t) + \ldots, \\ \sigma(x,t,\varepsilon) &= \varepsilon\sigma_1(x,t) + \varepsilon^2\sigma_2(x,t) + \ldots, \\ q(x,t,\varepsilon) &= \varepsilon q_1(x,t) + \varepsilon^2 q_2(x,t) + \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Подставляя (4) в (2), для первых членов разложений неравновесных переменных получим

$$\sigma_1 = -\partial_x u_0, \qquad q_1 = -\frac{9}{10}\partial_x\varrho_0 - \frac{9}{4}\partial_x U_0 = -\frac{9}{4}\frac{m}{k}\partial_x T_0. \tag{5}$$

Как видно, мы получили соотношения феноменологических законов Навье–Стокса и Фурье. Подставляя (5) в первые три уравнения линеаризованной 13-моментной системы, получим так называемое гидродинамическое приближение Навье–Стокса–Фурье

$$\begin{gathered} \partial_t\varrho_0 + \partial_x v_0 = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^1, \\ \partial_t v_0 + \frac{3}{5}\partial_x\varrho_0 + \frac{m}{k}\partial_x T_0 = \varepsilon\frac{4}{5}\partial_x^2 v_0, \\ \partial_t\frac{m}{k}T_0 + \frac{2}{5}\partial_x v_0 = \varepsilon\frac{9}{4}\partial_x^2\frac{m}{k}T_0 \end{gathered}$$

линеаризованной системы уравнений Эйлера

$$\begin{gathered} \partial_t\varrho + \partial_x v = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^1, \\ \partial_t v + \frac{3}{5}\partial_x\varrho + \partial_x\frac{m}{k}T = 0, \\ \partial_t\frac{m}{k}T + \frac{2}{5}\partial_x v = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Проверим, устойчива ли задача Коши приближения (5) — так называемого навье–стокс-приближения. Дисперсионное уравнение задачи Коши

$$\mathcal{P}_{\mathrm{NS}} = \det\begin{pmatrix} \tau & \xi & 0 \\ \frac{3}{5}\xi & \tau - \varepsilon\frac{4}{5}i\xi^2 & \xi \\ 0 & \frac{2}{5}\xi & \tau - \varepsilon\frac{9}{4}i\xi^2 \end{pmatrix} = P_0(\tau,\xi) - i\varepsilon\xi^2\gamma_1 P_1(\tau,\xi) - \varepsilon^2\xi^4\gamma_2 P_2(\tau,\xi) = 0,$$

$$P_0(\tau,\xi) = \tau(\tau^2 - \xi^2), \qquad P_1(\tau,\xi) = \tau^2 - \frac{27}{61}, \qquad P_2(\tau,\xi) = \tau,$$

$$\gamma_1 = \frac{9}{5}, \qquad \gamma_2 = \frac{61}{20}.$$

Мы получили строго гиперболический пучок из трех полиномов, у которого корни соседних полиномов строго разделяют друг друга. В [7, 8] доказано, что такой пучок устойчив, т.е. мнимые части его корней положительны, $\operatorname{Im}\tau_j(\xi) > 0$, $j = 1,2,3$. Отметим, что полином $P_0$ — характеристический полином линеаризованной системы Эйлера (6).

**Ультрафиолетовая катастрофа.** Теперь исследуем на устойчивость следующее гидродинамическое приближение — так называемое барнет-приближение. На втором шаге алгоритма Чепмена–Энскога найдем следующие члены в разложении неравновесных переменных:

$$\sigma_2 = -\partial_t\sigma_1 - \frac{4}{5}\partial_x v_1 - \frac{8}{15}\partial_x q_1 = \frac{4}{5}\partial_x^2 v_0 - \frac{4}{5}\partial_x v_1 + \frac{6}{5}\partial_x^2\frac{m}{k}T_0,$$

$$q_2 = -\frac{3}{2}\left(\partial_t q_1 + \frac{3}{5}\partial_x\frac{m}{k}T_1 + \frac{3}{5}\partial_x\sigma_1\right) = \frac{27}{8}\partial_x^2\frac{m}{k}T_0 - \frac{9}{4}\partial_x\frac{m}{k}T_1 - \frac{18}{25}\partial_x^2 v_0.$$

Отсюда получаем барнет-приближение неравновесных переменных

$$\sigma(x,t,\varepsilon) = -\frac{4}{5}\varepsilon\partial_x v + \varepsilon^2\left(\frac{4}{5}\partial_x^2 v + \frac{6}{5}\partial_x^2\frac{m}{k}T\right) + O(\varepsilon^3),$$

$$q(x,t,\varepsilon) = -\varepsilon\frac{9}{4}\partial_x T + \varepsilon^2\left(\frac{27}{8}\partial_x^2\frac{m}{k}T - \frac{18}{25}\partial_x^2 v\right) + O(\varepsilon^3)$$

и барнет-аппроксимацию линеаризованной системы уравнений Эйлера

$$\partial_t\varrho + \partial_x v = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^1,$$

$$\partial_t v + \frac{3}{5}\partial_x\varrho + \partial_x\frac{m}{k}T = \varepsilon\partial_x^2\left(\frac{4}{5}v - \varepsilon\frac{4}{5}\partial_x v - \varepsilon\frac{6}{5}\partial_x\frac{m}{k}T\right),$$

$$\partial_t\frac{m}{k}T + \frac{2}{5}\partial_x v = \varepsilon\partial_x^2\left(\frac{9}{4}\frac{m}{k}T - \varepsilon\frac{27}{8}\partial_x\frac{m}{k}T + \varepsilon\frac{18}{25}\partial_x v\right).$$

Дисперсионное уравнение барнет-приближения

$$\mathcal{P}_{\mathrm{B}} = \det\begin{pmatrix} \tau & \xi & 0 \\ \frac{3}{5}\xi & \tau - \varepsilon\frac{4}{5}\,i\xi^2 - \varepsilon^2\frac{4}{5}\xi^3 & \xi - \varepsilon^2\frac{6}{5}\xi^3 \\ 0 & \frac{2}{5}\xi + \varepsilon^2\frac{18}{25}\xi^3 & \tau - \varepsilon\frac{9}{4}\,i\xi^2 - \varepsilon^2\frac{27}{8}\xi^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathcal{P}_{\mathrm{NS}} - \frac{167}{40}\varepsilon^2\tau^2\xi^3 + i\frac{9}{2}\varepsilon^3\tau\xi^5 + \frac{27}{10}\varepsilon^4\tau\xi^6 = 0$$

неустойчиво на высоких частотах. Таким образом, мы получили так называемую *ультрафиолетовую катастрофу* гидродинамического барнет-приближения, в то время как система моментов (2) устойчива. Эффект ультрафиолетовой катастрофы порождает массу вопросов.

1. Как соотносятся полиномиальные пучки дисперсионных уравнений гидродинамических приближений и полиномиальный пучок дисперсионного уравнения 13-моментной системы? Как связаны их корни?
2. Если неустойчивы пост-навье–стокс–фурье-приближения, будут ли равномерно устойчивы полиномиальные пучки дисперсионных уравнений гидродинамических приближений достаточно высокого порядка?
3. В чем природа неустойчивости пост-навье–стокс–фурье-приближений? Как соотносятся устойчивость систем моментов и неустойчивость их пост-навье–стокс–фурье-приближений?

## 3. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА–ПАЙЕРЛСА

Структура полиномов цепочки достаточно сложна. Попробуем ее упростить. Сравним полученные результаты с разложением Чепмена–Энскога для более простого кинетического уравнения Больцмана–Пайерлса (см. [4]) с одной консервативной (базовой) переменной: для систем моментов порядка $M$

$$
\begin{gathered}
\partial_t\widetilde{e}+\partial_{x_k}p_k=0,\\
\partial_t p_j+\frac{1}{3}c^2\partial_{x_j}\widetilde{e}+\partial_{x_k}N_{\langle jk\rangle}+\frac{1}{\tau_{\mathrm{R}}}p_j=0,\\
\partial_t N_{\langle ij\rangle}+\frac{2}{5}c^2\partial_{x_{j\rangle}}p_{\langle i}+\frac{1}{\tau}N_{\langle ij\rangle}=0,\\
\partial_t N_{\langle i_1\dots i_n\rangle}+\frac{n}{2n+1}c^2\partial_{x_{i_n\rangle}}N_{\langle\langle i_1\dots i_{n-1}\rangle}+\frac{1}{\tau}N_{\langle i_1\dots i_n\rangle}=0,\\
i_1\le i_2\le\ldots\le i_n,\qquad i_k=1,2,3,\qquad 1<n\le M.
\end{gathered}\tag{7}
$$

Рассмотрим проекцию Чепмена–Энскога в фазовое пространство консервативной переменной $\widetilde{e}=e/c$ или в фазовое пространство моментов на единицу меньшего порядка, т.е. в фазовое пространство переменных $\widetilde{e}=e/c,p_1,\ldots,p_n$. Здесь мы использовали соотношения $\partial_{x_{j\rangle}}p_{\langle i}$, $\partial_{x_{i_n\rangle}}N_{\langle\langle i_1\dots i_{n-1}\rangle}$ для симметрических бесследовых тензоров [1], $c$ — скорость звука Дебая (Debye), $e$ — распределение энергии фононов [4]. В (7) предполагается суммирование по повторяющимся индексам; $\tau$, $\tau_{\mathrm{R}}$ — времена релаксации нормального и R-процессов соответственно.

Суть подхода Чепмена и Энскога, например, для проекции диффузионного типа состоит в нахождении операторной зависимости неравновесных переменных $p_j$, $N_{\langle i_1\dots k\dots l\dots i_n\rangle}$ от консервативной величины $e$. Наша задача — доказать следующую теорему.

**Теорема.** *Для любой системы моментов уравнения Больцмана–Пайерлса четного порядка $2k$ ($2k+1$ уравнений в одномерном случае) существуют критические значения*

$$(q^*_{2k+1},q^{**}_{2k+1}),\qquad 1>q^*_{2k+1}\ge q^{**}_{2k+1}>0,$$

*параметра $q=\tau/\tau_{\mathrm{R}}$ такие, что*

1) *в окне параметров $1>q>q^*_{2k+1}$ существует проекция Чепмена–Энскога в фазовое пространство консервативной переменной $\widetilde{e}$:*

$$\partial_t\widetilde{e}+Q(-\Delta)\widetilde{e}=0;$$

*здесь $\tau=-iQ(|\xi|^2)$ — чисто мнимые корни дисперсионного уравнения одномерной системы моментов кинетического уравнения Больцмана–Пайерлса того же порядка (гладкие по $|\xi|^2$);*

2) *в окне параметров $q^{**}_{2k+1}>q>0$ существует проекция Чепмена–Энскога системы моментов уравнения Больцмана–Пайерлса четного порядка в псевдодифференциальное замыкание системы моментов нечетного порядка $2k-1$ (в псевдодифференциальную систему гиперболических уравнений с релаксацией первого порядка).*

*Для любой системы моментов уравнения Больцмана–Пайерлса нечетного порядка $2k+1$ ($2(k+1)$ уравнений в одномерном случае) существуют критические значения $q^{***}_{2(k+1)}$, $1>q^{***}_{2(k+1)}>0$, такие, что в окне параметров $q^{***}_{2(k+1)}>q>0$ существует проекция Чепмена–Энскога в фазовое пространство переменных $(\widetilde{e},p_1,\ldots,p_n)$:*

$$
\begin{gathered}
\partial_t\widetilde{e}+\partial_{x_j}p_j=0,\\
\partial_t p_j+\left(\frac{1}{3}c^2+\sigma_j(-\Delta)\right)\partial_{x_j}\widetilde{e}+Q_{jk}(-\Delta)p_k=0.
\end{gathered}\tag{8}
$$

*Результатом проекции является система (8) гиперболических псевдодифференциальных уравнений первого порядка с релаксацией.*

**Структура проекции Чепмена–Энскога для уравнения Больцмана–Пайерлса.** Проведенные нами исследования дают почву для интереснейших математических постановок совершенно новых и бесспорно актуальных задач для целого класса кинетических уравнений, например уравнений Больцмана и Фоккера–Планка. В принципе предложенный подход универсален: по регулярной асимптотике действительно угадывается квантование иерархии моментов, которая позволяет сформулировать операторный анзац проекции Чепмена–Энскога. Основные задачи:

а) описать класс неприводимых проекций (непредставимых как композиция проекций), тем самым выделить соответствующие решения иерархии систем моментов, описывающие основные процессы моментной аппроксимации кинетического уравнения;

б) выяснить, насколько класс неприводимых проекций выделяет решения общего положения.

Из построения проекции Чепмена–Энскога становится понятной причина неустойчивости пост-навье–стокс-приближений (так называемой ультрафиолетовой катастрофы). Производящие функции как решения полиномиальных пучков являются функциями типа кинка, которые очень плохо приближаются на высоких частотах своими разложениями в ряды Тейлора в нуле.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Müller I., Ruggeri T.* Extended thermodynamics. New York: Springer, 1993.
2. *Levermore C.D.* Moment closure hierarchies for kinetic theories // J. Stat. Phys. 1996. V. 83. P. 1021–1065.
3. *Chapman S., Cowling T.* Mathematical theory on non-uniform gases. 3rd ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1970.
4. *Peierls R.* Zur kinetischen Theorie der Warmeleitung in Kristallen // Ann. Phys. 1929. Bd. 3. S. 1055–1096.
5. *Dreyer W., Struchtrup H.* Heat pulse experiments revisted // Continuum Mech. and Thermodyn. 1993. V. 5. P. 3–50.
6. *Раджевич Е.В.* Корректность математических моделей механики сплошных сред и трмодинамика // Совр. математика. Фунд. напр. 2003. Т. 3. С. 5–32.
7. *Захарченко П.А., Раджевич Е.В.* О свойствах представления уравнения Фоккера–Планка в базисе функций Эрмита // ДАН. 2004. Т. 395, №1. С. 36–39.
8. *Волевич Л.Р., Раджевич Е.В.* Устойчивые пучки гиперболических полиномов и задача Коши для гиперболических уравнений с малым параметром при старших производных // Тр. Моск. мат. о-ва. 2004. Т. 65. С. 69–113.
9. *Struchtrup H., Weiss W.* Temperature jump and velocity slip in the moment method // Continuum Mech. and Thermodyn. 2000. V. 12. P. 1–18.