V. V. Kozlov, V. A. Yaroshchuk, On invariant measures of Euler–Poincaré equations on unimodular groups, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1993, Number 2, 91–95

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А. А., Ленский В. С. Сопротивление материалов. М., 1959.
2. Березкин Е. Н. Курс теоретической механики. М., 1974.
3. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М., 1990.
4. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., 1965.
5. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М., 1980.
6. Бровко Г. Л. Материальные и пространственные представления определяющих соотношений деформируемых сред//Прикл. матем. и механ. 1990. **54**, вып. 5. 814—824.
7. Ильюшин А. А. Пластичность. Ч. 1. М.; Л., 1948.
8. Математическая энциклопедия. Т. 3. М., 1982.

Поступила в редакцию
19.06.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 531.01

В. В. Козлов, В. А. Ярощук

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ МЕРАХ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА—ПУАНКАРЕ НА УНИМОДУЛЯРНЫХ ГРУППАХ

1. Пусть G — группа Ли, g — ее алгебра, T — левоинвариантная метрика на группе G (кинетическая энергия механической системы с пространством положений G). Если $\omega=(\omega^1,\dots,\omega^n)\in g$ — скорость системы, то

$$T=I_{ij}\omega^i\omega^j/2.$$

Здесь и всюду ниже по повторяющимся индексам производится суммирование. Ввиду предположения о левоинвариантности $I_{ij}=\mathrm{const}$. Тензор $I=\|I_{ji}\|$ можно назвать тензором инерции системы.

Введем еще кинетический момент $m=(m_1,\dots,m_n)$, полагая $m_k=I_{ki}\omega^i$. Теорема об изменении момента приводит к уравнениям Эйлера — Пуанкаре [1]

$$\dot m_k=c_{ik}^l\omega^i m_l, \tag{1}$$

где c_{ik}^l—структурные постоянные алгебры g.

Уравнения (1) следует дополнить кинематическими соотношениями

$$\dot x^l=v_i^l\omega^i,\quad 1\leqslant l\leqslant n. \tag{2}$$

Здесь $x^1,\dots,x^n$ — локальные координаты на группе $G, v_k=(v_k^1,\ \dots,\ v_k^n)$— левоинвариантные поля G, для которых справедливы коммутационные соотношения

$$[v_i,\ v_j]=c_{ij}^k v_k.$$

Система (1)—(2) эквивалентна обычным уравнениям Лагранжа с лагранжианом T.

Пусть $w_1,\dots,w_n$ — правоинвариантные векторные поля на группе G. Их фазовые потоки представляют семейства левых сдвигов. Поскольку лагранжиан T левоинвариантен, то уравнения (1)—(2) допускают n независимых нетеровых интегралов.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} w^i = c_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

С использованием этих соотношений скорости ω можно представить в виде однозначных функций на группе G (при фиксированных значениях $c_1, \ldots, c_n$). В результате получаем динамическую систему на группе G

$$\dot{x}^l = v_i^l(x)\,\omega^i(x, c), \tag{3}$$

которую будем называть приведенной системой уравнений Эйлера—Пуанкаре. Наш основной результат составляет

Теорема 1. *Если группа G унимодулярна, то фазовый поток приведенной системы* (3) *сохраняет меру Хаара на G.*

Для группы SO (3) этот факт установлен ранее в работе [2]. Напомним, что на каждой группе имеется единственная (с точностью до постоянного множителя) мера, инвариантная при всех левых (правых) сдвигах. В случае унимодулярной группы эта мера (называемая мерой Хаара) биинвариантна. В частности, все компактные группы унимодулярны.

Теорема 1 является следствием одного более общего результата, представляющего самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Фазовый поток приведенной системы* (3) *сохраняет правоинвариантную меру на G.*

Ниже приводится доказательство теоремы 2.

2. Система уравнений (1)—(2) гамильтонова. Следовательно, по теореме Лиувилля фазовый поток этой системы, представленной в канонических переменных

$$x,\ y = \partial T/\partial \dot{x},$$

сохраняет стандартную меру. Поэтому плотность инвариантной меры системы (1)—(2) можно определить как якобиан преобразования

$$x,\ y \to x,\ \omega.$$

Положим

$$V = \|v_j^i\|, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \left\| \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right\|.$$

Так как

$$y^s = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^s} = \frac{\partial T}{\partial \omega^i} \frac{\partial \omega^i}{\partial \dot{x}^s} = m_i \frac{\partial \omega^i}{\partial \dot{x}^s},$$

то

$$\frac{\partial y}{\partial m} = \frac{\partial \omega}{\partial \dot{x}}.$$

Следовательно, плотность инвариантной меры системы уравнений (1)—(2) равна

$$M = \det \frac{\partial y}{\partial \omega} = \det\left(\frac{\partial y}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial \omega}\right) = (\det V)^{-1} \det I. \tag{4}$$

Пусть $w_i=(w_i^1, \dots, w_i^n)$, $1\leqslant i\leqslant n$, — правоинвариантные векторные поля на G из п. 1. По аналогии с (2) положим

$$\dot{x}^l=w_i^l s^i, \quad 1\leqslant l\leqslant n. \tag{5}$$

Здесь $s=(s^1, \dots, s^n)\in g$ — скорость рассматриваемой системы. Запишем в явном виде интегралы Нетер:

$$f_j=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^l}\frac{\partial \dot{x}^l}{\partial s^j}=m_k\frac{\partial \omega^k}{\partial \dot{x}^l}w_j^l=c_j, \quad 1\leqslant j\leqslant n. \tag{6}$$

Систему уравнений (1)—(2) можно заменить системой (3), добавив к ней тривиальные соотношения $\dot{c}_1=\dots=\dot{c}_n=0$. Плотность меры Лиувилля в переменных x, c равна

$$M_1=M\left(\det\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)^{-1}.$$

Эта функция, очевидно, дает плотность интегрального инварианта для приведенной системы (3).

Полагая $w=\|w_j{}^i\|$ и учитывая формулы (4), (6), получим

$$M_1=(\det V)^{-1}\det\left(\frac{\partial f}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial \omega}\right)^{-1}=(\det WI)^{-1}. \tag{7}$$

3. Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^l=v_i^l\omega^i, \tag{8}$$

в которую величины $\omega^1, \dots, \omega^n$ входят как постоянные параметры. При всех значениях ω фазовый поток системы (8) представляет семейство правых сдвигов на группе G.

Лемма 1. *Функция* $\det W^{-1}$ — *плотность интегрального инварианта системы* (8).

Следствие. Плотность правоинвариантной меры на группе G равна $c\det W^{-1}$, $c=\mathrm{const}\neq 0$.

Действительно, каждый правый сдвиг на группе G является сдвигом по траекториям системы (8) при некоторых значениях $\omega^1, \dots, \omega^n$.

Доказательство леммы 1. Предположим, что в некотором состоянии положение системы определяется координатами $x_0^1, \dots, x_0^n$, а правоинвариантные поля представляются векторами $w_1^0, \dots, w_n^0$. Положим

$$W^0=\|(w_j^0)^i\|.$$

При правом сдвиге на G координаты $x_0^1, \dots, x_0^n$ переходят в координаты $x^1, \dots, x_n$, а векторы $w_1^0, \dots, w_n^0$ — в векторы $w, \dots, w_n$. Как известно,

$$W=JW^0, \quad dx^1\dots dx^n=\det J\, dx_0^1\dots dx_0^n, \tag{9}$$

где J — матрица Якоби преобразования $x_0\to x$.

Из соотношения (9) получаем равенство

$$\det W^{-1}dx^1\dots dx^n=\det(W^0)^{-1}dx_0^1\dots dx_0^n.$$

Это означает, что фазовый поток системы (8) имеет интегральный инвариант с плотностью $\det W^{-1}$. Лемма доказана.

Применяя следствие из леммы 1 и учитывая равенство (7), приходим к заключению теоремы 2.

4. Небезынтересно привести прямое доказательство теоремы 1, использующее аналитический критерий унимодулярности [3]:

$$c^k_{ik}=0, \quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{10}$$

Лемма 2. *В предположении* (10) *для всех значений* ω *уравнения* (8) *имеют интегральный инвариант с плотностью* $\det V^{-1}$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$K=\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}V-\dot{V}, \tag{11}$$

где $\dot{V}$ — производная в силу системы (8). Легко проверить, что j-й столбец матрицы K равен

$$v_k c^k_{ij}\omega^i,$$

а элемент матрицы $V^{-1}K$ с номером k, j равен

$$c^k_{ij}\omega^i.$$

Умножим равенство (11) на V^{-1} слева и вычислим след правой и левой частей полученного матричного равенства:

$$\operatorname{tr} V^{-1}K=\operatorname{tr} V^{-1}\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}V-\operatorname{tr} V^{-1}\dot{V}.$$

Ввиду предположения (10) $\operatorname{tr} V^{-1}K=0$. Далее,

$$\operatorname{tr} V^{-1}\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}V=\operatorname{tr}\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}$$

— это дивергенция правой части системы (8). Наконец,

$$\operatorname{tr} V^{-1}\dot{V}=\frac{d}{dt}\ln\det V.$$

В результате приходим к тождеству

$$\operatorname{tr}\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}+\frac{d}{dt}\ln(\det V)^{-1}=0,$$

которое по теореме Лиувилля определяет $(\det V)^{-1}$ как плотность интегрального инварианта системы (8). Лемма доказана.

Аналогичный результат справедлив и для системы дифференциальных уравнений (5), в которую $s^1,\dots,s^n$ входят как параметры и которая определяет левые сдвиги на группе G. Функция $(\det W)^{-1}$ — плотность ее интегрального инварианта при всех значениях s. Следовательно, для унимодулярной группы плотность меры Хаара равна $a(\det W)^{-1}$, $a=\mathrm{const}\neq 0$. Учитывая соотношение (7), приходим к выводу, что мера Хаара инвариантна относительно фазового потока приведенной системы на унимодулярной группе G.
Что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Poincaré A. Sur une forme nouvelle des équations de la méchanique//C. r. Acad. Sci. Paris. 1901. **132**. 369—371.

2. Козлов В. В. Вихревая теория волчка//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1990. № 4. 56—62.
3. Бурбаки Н. Интегрирование. М., 1970.

Поступила в редакцию
10.09.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 532.62

А. Е. Кулаго, В. П. Шкадова, В. Я. Шкадов

К ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НАНЕСЕНИЯ ТОНКОСЛОЙНЫХ ПОКРЫТИЙ НА ДВИЖУЩИЕСЯ ПОВЕРХНОСТИ

В работе [1] предложена первая математическая модель для расчета толщины слоя вязкой жидкости, образующегося на плоской твердой поверхности при извлечении ее из жидкого объема. В [2] дано обобщение на осесимметричный случай. Существенный недостаток примененного в [1, 2] подхода состоит в том, что он не позволяет учесть конвективные члены, роль которых возрастает с увеличением скорости движения твердой поверхности. В настоящей статье разработан метод расчета формы свободной поверхности, пригодный при конечных скоростях извлечения.

Выпишем основные уравнения для осесимметричного течения в цилиндрической системе координат r, z; уравнения для плоского течения получаются как частный случай. Пусть цилиндр бесконечной длины движется вдоль своей оси z с постоянной скоростью V через жидкий объем, ограниченный свободной поверхностью $z=0$. Вследствие прилипания вязкая жидкость выносится из жидкого объема в виде тонкого слоя увлечения на твердой поверхности $r=R$. Выход цилиндра из жидкого объема сопровождается образованием мениска под действием сил поверхностного натяжения. Возмущенная поверхность жидкости, объединяющая слой увлечения и мениск, непрерывно и гладко сопрягающиеся в промежуточной области, задается уравнением

$$r=s(z).$$

Определение $s(z)$ представляет основную цель исследования.

Течение жидкости описывается уравнениями Навье—Стокса, граничными условиями прилипания на теле и условиями для напряжений на возмущенной поверхности [3]. Введем безразмерные переменные соотношениями

$$\begin{gathered} r=R+h_0\eta,\ z=l\xi,\ v_r=h_0l^{-1}Uv,\ v_z=Uu, \\ p=p_a-\sigma h_0 l^{-1}\varkappa+\rho U^2(Ul\nu^{-1})\tilde{p},\ s=R+h_0H(\xi). \end{gathered} \tag{1}$$

Тогда получим следующие уравнения:

$$\begin{gathered} \Delta u-A\frac{d\varkappa}{d\xi}-F-\delta^2\tilde{p}_\xi=c(uu_\xi+vu_\eta), \\ \Delta v-\varepsilon^2\tilde{r}^{-2}v-\tilde{p}_\eta=c(uv_\xi+vv_\eta), \\ (\tilde{r}u)_\xi+(\tilde{r}v)_\eta=0. \end{gathered} \tag{2}$$