УДК 517.983.246

В. А. ЕРОВЕНКО

О САМОСОПРЯЖЕННОСТИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть $H=L^2(R^1;\ s(x))$ — гильбертово пространство комплекснозначных измеримых функций $f(x)$, для которых $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2 s(x)dx<\infty$.

Рассмотрим формально самосопряженное дифференциальное выражение $lf(x)=l_1f(x)+l_2f(x)$, где

$$l_1f(x)=\{s(x)\}^{-1}[\{r(x)f''(x)\}''], \tag{1}$$

$$l_2f(x)=\{s(x)\}^{-1}[-\{p(x)f'(x)\}'+q(x)f(x)], \tag{2}$$

причем $s(x)\geqslant s_0>0$, $r(x)\geqslant r_0>0$, $p(x)$, $q(x)$ — вещественные периодические функции периода 1; $r(x)$, $p(x)$ имеют кусочно-непрерывные производные второго и первого порядков соответственно, а $s(x)$ и $q(x)$ — кусочно-непрерывные функции.

Обозначим через $A_n(R^1)$ множество комплекснозначных функций $f(x)$, заданных на R^1, для которых существует производная порядка $(n-1)$ и $f^{(n-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на каждом компактном подмножестве из R^1. Пусть L — максимальный оператор, порожденный дифференциальным выражением $l=l_1+l_2$, задаваемый формулами (1), (2), т. е. $Lf(x)=lf(x)$, для всех $f(x)\in D(L)$, где область определения $D(L)=\{f(x)\,|\,f(x)\in A_4(R^1)\cap H,\ lf(x)\in H\}$.

Цель работы — изложение одного из способов доказательства самосопряженности оператора L. Для этого используется следующая известная [1]

Теорема А. *Если A — самосопряженный, а B — симметрический оператор, такой, что $D(A)\subset D(B)$ и*

$$\|Bf(x)\|\leqslant a\|Af(x)\|+b\|f(x)\|,\quad f(x)\in D(A), \tag{3}$$

выполняется для $a<1$, то $A+B$ самосопряжен.

Когда выполняется условие (3), то говорят, что оператор B A-ограничен с A-границей a.

Обозначим через L_1 и L_2 дифференциальные операторы, порожденные формально самосопряженными дифференциальными выражениями l_1 (1) и l_2 (2) соответственно, с областями определения $D(L_1)=\{f(x)\,|\,f(x)\in A_4(R^1)\cap H,\ \ l_1f(x)\in H\}$ и $D(L_2)=\{f(x)\,|\,f(x)\in A_2(R^1)\cap H,\ l_2f(x)\in H\}$. Введем также дифференциальный оператор L_0 с областью определения $D(L_0)$, состоящей из функций, принадлежащих $D(L_1)$, имеющих компактный носитель, и действующий по формуле $L_0f(x)=l_1f(x)$ $\forall f(x)\in D(L_0)$. Оператор L_0 симметрический, так как для любых $f(x)$, $g(x)$, принадлежащих области определения оператора L_0, $D(L_0)$, плотной в H, $(L_0f(x),\ g(x))=(f(x),\ L_0g(x))$. Следовательно, можно определить сопряженный к нему оператор L_0^*.

Лемма 1. *Оператор L_1 является сопряженным к оператору L_0, т. е. $L_1=L_0^*$.*

Доказательство. Из того, что $(L_0f(x),\ g(x))=(f(x),\ L_1g(x))$ для всех $f(x)\in D(L_0)$ и $g(x)\in D(L_1)$, следует $L_1\subset L_0^*$.

Докажем обратное включение $L_0^*\subset L_1$. Пусть для всех $f(x)\in D(L_0)$ выполняется равенство

$$(L_0f(x),\ g(x))=(f(x),\ g^*(x)). \tag{4}$$

Покажем, что $g(x)\in D(L_1)$ и $L_1 g(x)=g^*(x)$. Распишем равенство (4):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\{r(x)f''(x)\}''\overline{g(x)}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\overline{g^*(x)}s(x)dx. \tag{5}$$

Интегрируя по частям правую часть равенства (5), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\{r(x)f''(x)\}''\overline{g(x)}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\{r(x)f''(x)\}''[\overline{G(x)}+\overline{W(x)}]dx, \tag{6}$$

где

$$G(x)=\int_0^x\{r(t)\}^{-1}(x-t)\int_0^t g^*(u)s(u)(t-u)dudt, \tag{7}$$

$$W(x)=C_1\int_a^x t\{r(t)\}^{-1}(x-t)dt+C_2\int_a^x\{r(t)\}^{-1}(x-t)dt+C_3x+C_4,$$

C_i, $i=\overline{1,4}$,— произвольные константы и $a>0$ — некоторое произвольное фиксированное число. Обозначим $Q(x)=G(x)+W(x)-g(x)$, тогда (6) можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\{r(x)f''(x)\}''\overline{Q(x)}dx=0. \tag{8}$$

Зададим функцию $f(x)$ следующим образом: положим

$$f(x)=\int_{-a}^x Q(u)\int_u^x\{r(t)\}^{-1}(x-t)(t-u)dtdu$$

для $x\in[-a,a]$ и будем считать $f(x)=0$ для $x\notin[-a,a]$. Выберем константы C_i, $i=\overline{1,4}$, таким образом, чтобы выполнялась система равенств

$$\int_{-a}^a Q(u)\int_u^a\{r(t)\}^{-1}(a-t)(t-u)dtdu=0,$$

$$\int_{-a}^a Q(u)\int_u^a\{r(t)\}^{-1}(t-u)dtdu=0,$$

$$\int_{-a}^a Q(u)\{r(a)\}^{-1}(a-u)du=0,\quad \int_{-a}^a Q(u)du=0. \tag{9}$$

Равенства (9), начиная с последнего, можно записать в виде следующей системы линейных относительно $C_1,\ldots,C_4$ неоднородных уравнений:

$$\begin{aligned}
&C_4(\varphi_1,\psi_1)+C_3(\varphi_2,\psi_1)+C_2(\varphi_3,\psi_1)+C_1(\varphi_4,\psi_1)=(\tilde g,\psi_1),\\
&C_4(\varphi_1,\psi_2)+C_3(\varphi_2,\psi_2)+C_2(\varphi_3,\psi_2)+C_1(\varphi_4,\psi_2)=(\tilde g,\psi_2),\\
&C_4(\varphi_1,\psi_3)+C_3(\varphi_2,\psi_3)+C_2(\varphi_3,\psi_3)+C_1(\varphi_4,\psi_3)=(\tilde g,\psi_3),\\
&C_4(\varphi_1,\psi_4)+C_3(\varphi_2,\psi_4)+C_2(\varphi_3,\psi_4)+C_1(\varphi_4,\psi_4)=(\tilde g,\psi_4),
\end{aligned} \tag{10}$$

где $(\varphi_i,\psi_j)=\int_{-a}^a\varphi_i(x)\psi_j(x)dx$, $i,j=\overline{1,4}$; $(\tilde g,\psi_i)=\int_{-a}^a\tilde g(x)\psi_i(x)dx$.

$i=\overline{1, 4}$, а функции $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$, $i=\overline{1, 4}$, и $\tilde{g}(x)$ определяются по следующим формулам:

$$\varphi_1(x)=1, \quad \varphi_2(x)=x, \quad \varphi_3(x)=\int_a^x \{r(t)\}^{-1}(x-t)\,dt,$$

$$\varphi_4(x)=\int_a^x t\{r(t)\}^{-1}(x-t)\,dt,$$

$$\psi_1(x)=1, \quad \psi_2(x)=(a-x),$$

$$\psi_3(x)=\int_x^a \{r(t)\}^{-1}(t-x)\,dt=\int_a^x \{r(t)\}^{-1}(x-t)\,dt.$$

$$\psi_4(x)=\int_x^a \{r(t)\}^{-1}(a-t)(t-x)\,dt=\int_a^x (a-t)\{r(t)\}^{-1}(x-t)\,dt,$$

$$\tilde{g}(x)=g(x)-G(x).$$

Нетрудно видеть, что $\psi_1(x)=\varphi_1(x)$, $\psi_2(x)=a\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$, $\psi_3(x)=\varphi_3(x)$ и $\psi_4(x)=a\varphi_3(x)-\varphi_4(x)$. Таким образом, в системе (10) матрица коэффициентов, стоящих при неизвестных C_i, $i=\overline{1, 4}$, представляет собой линейную комбинацию строк матрицы Грама G, имеющей вид (в нашем случае $m=4$):

$$G=\begin{bmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_m, \varphi_1) \\ (\varphi_1, \varphi_2) & (\varphi_2, \varphi_2) & \cdots & (\varphi_m, \varphi_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_1, \varphi_m) & (\varphi_2, \varphi_m) & \cdots & (\varphi_m, \varphi_m) \end{bmatrix},$$

определитель которой в силу линейной независимости $\varphi_i(x)$, $i=\overline{1, 4}$, отличен от нуля, поэтому система (9) разрешима.

Очевидно, что функция $f(x)$, определенная ранее, принадлежит $D(L_0)$, кроме того, $\{r(x)f''(x)\}''=Q(x)$ почти всюду в $[-a, a]$, поэтому по формуле (8) получаем $\int_{-a}^{a} |Q(x)|^2dx=0$. Таким образом, $Q(x)=0$ почти всюду в $[-a, a]$. По определению $Q(x)$ это означает, что

$$g(x)=G(x)+W(x) \tag{11}$$

почти всюду в $[-a, a]$. Подправляя $g(x)$ на множестве меры нуль, можно считать, что равенство (11) выполняется для всех точек из интервала $[-a, a]$. Из представления функции $G(x)$ (7) следует, что $G(x)\in D(L_1)$ и $l_1G(x)=g^*(x)$. Из (11) вытекает, что $g'''(x)$ существует, абсолютно непрерывна в $[-a, a]$ и $L_1g(x)=L_1G(x)=g^*(x)$ в $[-a, a]$. Так как a может быть произвольно большим, то $g(x)\in D(L_1)$ и $L_1g(x)=$ $=g^*(x)=L_0^*g(x)$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Оператор L_1 самосопряженный, являющийся единственным самосопряженным расширением симметрического оператора L_0.*

Индексы дефекта дифференциального оператора L_0 равны нулю. Это следует из свойств решений дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами $L_0^*f(x)=L_1f(x)=\lambda f(x)$, которое можно записать в векторном виде как систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами [2] $\mathbf{J}\dfrac{d\mathbf{z}}{dx}=(\mathbf{H}(x)+\lambda\mathbf{Q}(x))\mathbf{z}$, где $\mathbf{J}^*=-\mathbf{J}$; $\mathbf{Q}(x)=\operatorname{diag}[s(x), 0, \ldots, 0]$;

$\mathbf{H}(x)$ — самосопряженная периодическая матрица коэффициентов. Так как индексы дефекта оператора L_0 равны нулю, то симметрический оператор имеет единственное самосопряженное расширение, которое является его замыканием, т. е. $L_0^*=\overline{L_0}$. В силу леммы 1 $L_1=L_0^*$, следовательно, L_1 — самосопряженный оператор.

Обозначим через $\|\cdot\|_J$ норму в $L^2(J;\ s(x))$ — пространстве комплекснозначных измеримых функций, суммируемых в квадрате с весом $s(x)$ на подмножестве $J\subset R^1$, т. е. $\|f(x)\|_J=\left(\int\limits_J |f(x)|^2 s(x)\,dx\right)^{1/2}$.

Лемма 2. *Если* $f(x)\in W^n(R^1;\ s(x))=\{\varphi(x)\,|\,\varphi(x)\in A_n(R^1)\cap H,\ \varphi^{(n)}(x)\in H\}$ *и* $\sup\limits_{-\infty<x<\infty}\int\limits_x^{x+1}\{s(t)\}^m dt<\infty$ *для* $m=\pm1$, *то все производные* $f^{(k)}(x)$, $0\leqslant k\leqslant n$, *принадлежат* H, *и для любого* $\varepsilon>0$ *найдется константа* K, *зависящая от* ε, *такая, что для всех функций* $f(x)\in W^n(R^1;\ s(x))$ *имеет место неравенство*

$$\|f^{(k)}(x)\|^2\leqslant\varepsilon\|f^{(n)}(x)\|^2+K\|f(x)\|^2,\quad 0\leqslant k\leqslant n-1. \tag{12}$$

Докажем сначала лемму для $n=2$. Предположим, что $f(x)\in W^2(R^1;\ s(x))$, и представим R^1 в виде объединения непересекающихся ограниченных интервалов I_i длины d. Обозначая через J любой из интервалов I_i, разобьем его на три подынтервала равной длины и обозначим крайние из них через J_1, J_2.

Так как $f'(x)$ по предположению абсолютно непрерывна, то для каждого $t\in J$

$$|f'(t)|=\left|\int\limits_\xi^t f''(z)\,dz+f'(\xi)\right|\leqslant\int\limits_J |f''(z)|\,dz+3d^{-1}(|f(x)|+|f(y)|), \tag{13}$$

где $x\in J_1$, $y\in J_2$ и, следовательно, $|x-y|\geqslant d/3$, а точка ξ выбирается из соотношения $(f(x)-f(y))/(x-y)=f'(\xi)$.

Интегрируя неравенство (13) сначала по x на J_1, а затем по y на J_2, получим

$$3^{-2}d^2|f'(t)|\leqslant 3^{-2}d^2\int\limits_J |f''(z)|\,dz+\int\limits_{J_1}|f(x)|\,dx+\int\limits_{J_2}|f(y)|\,dy\leqslant$$

$$\leqslant 3^{-2}d^2\int\limits_J [s(x)]^{-1/2}\{|f''(x)|\,[s(x)]^{1/2}\}\,dx+$$

$$+\int\limits_J [s(x)]^{-1/2}\{|f(x)|\,[s(x)]^{1/2}\}\,dx.$$

Пользуясь неравенством Буняковского, имеем

$$|f'(t)|\leqslant M\|f''(x)\|_J+3^2d^{-2}M\|f(x)\|_J\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{2}\,M(\|f''(x)\|_J^2+3^4d^{-4}\|f(x)\|_J^2)^{1/2},$$

где $M=\left(\int\limits_J\{s(x)\}^{-1}dx\right)^{1/2}$. Наконец, из последнего неравенства следует: $\|f'(x)\|_J^2\leqslant 2C\|f''(x)\|_J^2+23^4d^{-4}C\|f(x)\|_J^2$, где $C=C(J)=M^2\int\limits_J s(x)\,dx=\int\limits_J\{s(x)\}^{-1}dx\int\limits_J s(x)\,dx$, а так как J — произвольный из интервалов I_i, окончательно получаем

$$\|f'(x)\|^2=\sum_i \|f'(x)\|^2_{I_i}\leqslant 2\tilde{C}\|f''(x)\|^2+2(3^4d^{-4})\tilde{C}\|f(x)\|^2, \qquad (14)$$

где $\tilde{C}=\sup\limits_{I_i} C(I_i)<\infty$.

Выбирая разбиение $\{I_i\}$ множества R^1 таким образом, чтобы $2\tilde{C}$ не превосходило ε, получим в силу (14) неравенство (12) в случае $n=2$. Завершается доказательство леммы индуктивным переходом.

В доказанной лемме рассматривались локально суммируемые функции $\{s(x)\}^m$, ведущие себя определенным образом на единичном интервале, смещающемся в бесконечность, в данном случае, для которых $\sup\limits_{-\infty<x<\infty}\int\limits_x^{x+1}\{s(t)\}^m dt<\infty$. Такие характеристики функций, в том числе стремление последнего интеграла к бесконечности или нулю при $|x|\to\to\infty$, использовались ранее в спектральной теории дифференциальных операторов, например, в известных работах А. М. Молчанова [3] и М. Ш. Бирмана [4].

Лемма 3. *Пусть при заданных ограничениях на коэффициенты формального дифференциального выражения* $l_1f(x)=\{s(x)\}^{-1}\times\times[\{r(x)f''(x)\}'']$ *функция* $f(x)$ *принадлежит области определения оператора* L_1, $D(L_1)$. *Тогда* $f^{(k)}(x)\in H$, $0\leqslant k\leqslant 4$, *и найдется такая константа* K, *что для всех функций* $f(x)\in D(L_1)$

$$\|f^{(k)}(x)\|^2\leqslant K(\|l_1f(x)\|^2+\|f(x)\|^2), \quad 0\leqslant k\leqslant 4. \qquad (15)$$

Доказательство. Пусть J — произвольный компактный интервал из R^1. Из того, что $f^{(k)}(x)$, $0\leqslant k\leqslant 3$, непрерывны на J, и из представления $f^{(4)}(x)$ в виде

$$f^{(4)}(x)=\frac{s(x)\{l_1f(x)\}-\{2r'(x)f'''(x)+r''(x)f''(x)\}}{r(x)}$$

следует, что $f^{(4)}(x)\in L^2(J;\ s(x))$, и, кроме того, справедливо неравенство

$$\|f^{(4)}(x)\|_J\leqslant N^2(\|l_1f(x)\|_J+\|f'''(x)\|_J+\|f''(x)\|_J)\leqslant$$
$$\leqslant N^2\{3(\|l_1f(x)\|^2_J+\|f'''(x)\|^2_J+\|f''(x)\|^2_J)\}^{1/2},$$

где N — наибольшая существенная верхняя грань на множестве $(-\infty,\infty)$ коэффициентов $s(x)$, $1/r(x)$, $2r'(x)$, $r''(x)$. Из последнего неравенства имеем

$$\|f^{(4)}(x)\|^2_J\leqslant K_0(\|l_1f(x)\|^2_J+\|f'''(x)\|^2_J+\|f''(x)\|^2_J), \qquad (16)$$

K_0 — константа, зависящая от N.

Из доказательства леммы 2 следует, что для любого $\varepsilon>0$ найдется положительная константа K_1, зависящая от ε, которую можно выбрать невозрастающей, если ее рассматривать как функцию длины интервала J, причем имеет место неравенство

$$\|f^{(k)}(x)\|^2_J\leqslant\varepsilon\|f^{(4)}(x)\|^2_J+K_1\|f(x)\|^2_J, \quad 0\leqslant k\leqslant 3, \qquad (17)$$

справедливое для всех функций $f(x)$ таких, что $f(x)$, $f^{(4)}(x)\in L^2(J;\ s(x))$. Таким образом, из (16) и (17) получим

$$(1-2K_0\varepsilon)\|f^{(4)}(x)\|^2_J\leqslant K_0\|l_1f(x)\|^2_J+2K_0K_1\|f(x)\|^2_J,$$

поэтому для достаточно малых $\varepsilon>0$, например, когда выполняется $1-2K_0\varepsilon\geqslant 1/2$, получим

$$\|f^{(4)}(x)\|^2_J\leqslant 2K_0(1+2K_1)\{\|l_1f(x)\|^2+\|f(x)\|^2\}. \qquad (18)$$

Представляя R^1 в виде объединения компактных интервалов J_i, $J_i \subset J_{i+1}$, $i=1, 2, \ldots$, и пользуясь тем, что константа K_1 в неравенстве (17) может быть выбрана невозрастающей как функция длины интервала J, получим из (18), что $f^{(4)}(x) \in H$ и для $f(x) \in D(L_1)$

$$\|f^{(4)}(x)\|^2 \leqslant K(\|l_1 f(x)\|^2 + \|f(x)\|^2).$$

Наконец, пользуясь неравенством (17), получим соотношение (15) для всех k, $0 \leqslant k \leqslant 4$.

Доказанная лемма справедлива для любого дифференциального выражения порядка n вида $\tilde{l}_1 = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$ и соответствующих функций $f(x)$ из области определения максимального оператора, порожденного $\tilde{l}_1$ при условии существенной ограниченности на $(-\infty, \infty)$ коэффициентов $a_n^{-1}(x)$, $a_k(x)$, $k=\overline{0, n}$, оператора $\tilde{l}_1$.

Лемма 4. *Пусть $a(x)$ — локально интегрируемая функция, тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется константа $K > 0$, зависящая от ε, что для всех функций $f(x)$, принадлежащих области определения максимального оператора T, порожденного дифференциальной операцией $\frac{d}{dx}$, т. е. $D(T) = \{\varphi(x) \mid \varphi(x) \in A_1(R^1) \cap H,\ \varphi'(x) \in H\}$, справедливо неравенство*

$$\|a(x) f(x)\|^2 \leqslant (\varepsilon \|f'(x)\|^2 + K \|f(x)\|^2) \sup_{-\infty < x < \infty} \int_x^{x+1} |a(t)|^2 s(t)\, dt.$$

Доказательство. Возьмем $\delta > 0$, и пусть $\varphi(x)$ — функция класса $C'[0, \delta]$, такая, что $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ на $[0, \delta]$, $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(\delta) = 0$. Для $f(x) \in D(T)$ имеем

$$f(t) = -\int_0^\delta \frac{d}{dx} (\varphi(x) f(t+x))\, dx = -\int_0^\delta \varphi(x) f'(t+x)\, dx -$$

$$- \int_0^\delta \varphi'(x) f(t+x)\, dx.$$

Обозначая через $C = \max_{0 \leqslant x \leqslant \delta} |\varphi'(x)|$ и применяя к правой части полученного соотношения неравенство Буняковского, получим

$$|f(t)| \leqslant \int_0^\delta [s(t+x)]^{-1/2} \{|f'(t+x)|\, [s(t+x)]^{1/2}\}\, dx +$$

$$+ C \int_0^\delta [s(t+x)]^{-1/2} \{|f(t+x)|\, [s(t+x)]^{1/2}\}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant P \left\{ \left(\int_0^\delta |f'(t+x)|^2 s(t+x)\, dx \right)^{1/2} + C \left(\int_0^\delta |f(t+x)|^2 s(t+x)\, dx \right)^{1/2} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2} P \left\{ \int_t^{t+\delta} |f'(x)|^2 s(x)\, dx + C^{1/2} \int_t^{t+\delta} |f(x)|^2 s(x)\, dx \right\}^{1/2}, \qquad (19)$$

где $P = \sup_{-\infty < t < \infty} \int_0^\delta \{s(t+x)\}^{-1} dx = \sup_{-\infty < t < \infty} \int_t^{t+\delta} \{s(x)\}^{-1} dx.$

При достаточно малом δ из неравенства (19) следует

$$|f(t)|^2 \leqslant \varepsilon \int_t^{t+\delta} |f'(x)|^2 s(x)\,dx + K \int_t^{t+\delta} |f(x)|^2 s(x)\,dx. \tag{20}$$

В силу теоремы Фубини из соотношения (20) получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |a(t) f(t)|^2 s(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \int_t^{t+\delta} |a(t)|^2 s(t) \{(\varepsilon |f'(x)|^2 + K |f(x)|^2) s(x)\}\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} (\varepsilon |f'(x)|^2 + K |f(x)|^2) s(x)\,dx \int_{x-\delta}^{x} |a(t)|^2 s(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant (\varepsilon \|f'(x)\|^2 + K \|f(x)\|^2) \sup_{-\infty<x<\infty} \int_x^{x+1} |a(t)|^2 s(t)\,dt,$$

что завершает доказательство леммы.

При рассмотрении лемм 2—4 мы следовали схеме доказательства соответствующих утверждений для операторов в пространстве $L^p(a, \infty)$ [5]. Из лемм 2—4 непосредственно следует

Теорема 2. *Оператор L_2 L_1-ограничен и для любого $\varepsilon>0$ найдется константа $K>0$, что для всех $f(x) \in D(L_1)$*

$$\|L_2 f(x)\| \leqslant \varepsilon \|L_1 f(x)\| + K \|f(x)\|, \tag{21}$$

т. е. можно выбрать L_1-границу оператора L_2, строго меньше единицы, и оператор $L = L_1 + L_2$ есть максимальный оператор, порожденный формально самосопряженной дифференциальной операцией $l_1 + l_2$ с областью определения $D(L) = D(L_1)$.

Доказательство. Пусть J — любой компактный интервал из R^1. Пользуясь тем, что для любых неотрицательных чисел a, b $(a^2 + b^2)^{1/2} \leqslant a + b$, в силу лемм 2, 4 для любой функции $f(x) \in D(L_1)$ получим

$$\|a_k(x) f^{(k)}(x)\|_J \leqslant \varepsilon_1 \|f^{(k+1)}(x)\|_J + K_1 \|f^{(k)}(x)\|_J, \quad 0 \leqslant k \leqslant 2,$$

где $a_0(x) = \{s(x)\}^{-1} q(x)$; $a_1(x) = -\{s(x)\}^{-1} p'(x)$; $a_2(x) = -\{s(x)\}^{-1} p(x)$, причем коэффициенты $a_k(x)$, $0 \leqslant k \leqslant 2$, удовлетворяют соотношению $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} \int_x^{x+1} |a_k(x)|^2 s(x)\,dx < \infty$ и $\|f^{(k)}(x)\|_J \leqslant \varepsilon_2 \|f^{(4)}(x)\|_J + K_2 \|f(x)\|_J$, $0 \leqslant k \leqslant 3$. Из этих неравенств следует, что $\forall f(x) \in D(L_1)$

$$\|a_k(x) f^{(k)}(x)\|_J \leqslant \varepsilon_3 \|f^{(4)}(x)\|_J + K_3 \|f(x)\|_J, \quad 0 \leqslant k \leqslant 2. \tag{22}$$

А так как по лемме 3 $\|f^{(4)}(x)\|_J \leqslant K_4 (\|l_1 f(x)\|_J + \|f(x)\|_J)$, то из соотношения (22) получаем

$$\|l_2 f(x)\|_J \leqslant \sum_{k=0}^{2} \|a_k(x) f^{(k)}(x)\|_J \leqslant \varepsilon \|l_1 f(x)\|_J + K \|f(x)\|_J, \tag{23}$$

где константа K зависит от ε, откуда следует неравенство (21).

Докажем оставшуюся часть теоремы. Если $f(x) \in D(L_1)$, то в силу (23) $l_2 f(x) \in H$ и, следовательно, $f(x) \in D(L_1)$. Обратно, если $f(x) \in D(L)$, то $lf(x) = (l_1 + l_2) f(x) \in H$, и так как $f^{(k)}(x)$, $0 \leqslant k \leqslant 3$, непрерывны на каждом компактном интервале, то $l_2 f(x)$ и $l_1 f(x) = (l_1 + l_2) f(x) - l_2 f(x)$

принадлежат классу $L^2(J;\ s(x))$, поэтому из (23) следует

$$\|l_2 f(x)\|_J \leqslant \varepsilon(\|(l_1+l_2)f(x)\|_J + \|l_2 f(x)\|_J) + K\|f(x)\|_J,$$

Следовательно,

$$\|l_2 f(x)\|_J \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\|lf(x)\| + \frac{K}{1-\varepsilon}\|f(x)\|,$$

и поэтому включение $l_2 f(x) \in H$ влечет $l_1 f(x) = lf(x) - l_2 f(x) \in H$, и, таким образом, теорема полностью доказана.

Теорема 3. *Оператор L, порожденный формально самосопряженной дифференциальной операцией четвертого порядка с периодическими коэффициентами $l = l_1 + l_2$ в гильбертовом пространстве H, с областью определения $D(L)$ самосопряжен.*

Доказательство следует из теорем A и 1, 2.

Из доказанного следует, что если рассмотреть симметрическое (формально самосопряженное) дифференциальное выражение

$$l'_2 = \sum_{k=0}^{3} a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}, \tag{24}$$

с коэффициентами $a_k(x)$, $0 \leqslant k \leqslant 3$, не обязательно периодическими, удовлетворяющими соотношениям $\sup\limits_{-\infty<x<\infty}\int\limits_x^{x+1}|a_k(t)|^2 s(t)\,dt < \infty$, $0 \leqslant k \leqslant 3$, и через L'_2 обозначить максимальный оператор, порождаемый операцией l'_2 (24) в пространстве H, а через L_1 — определенный ранее в H самосопряженный оператор $(L_1 f(x) = \{s(x)\}^{-1}[\{r(x)f''(x)\}'']$) с периодическими коэффициентами $s(x) \geqslant s_0 > 0$, $r(x) \geqslant r_0 > 0$, то для оператора $L = L_1 + L_2$ с областью определения $D(L) = D(L_1) \cap D(L_2)$ справедлива

Теорема 4. *Оператор $L = L_1 + L'_2$ является самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве H, причем его область определения $D(L)$ совпадает с областью $D(L_1)$ и он представляет собой максимальный дифференциальный оператор, порожденный дифференциальной операцией $l = l_1 + l'_2$, где l_1, l'_2 определяются соответственно формулами (1) и (24).*

В работе [6] исследован спектр дифференциального оператора четвертого порядка, полученного при относительно компактном возмущении самосопряженного дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими коэффициентами.

Литература

1. Schechter M. Spectra of partial differential operators.— Amsterdam—London, 1971.—268 p.
2. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.— М.: Наука, 1972.—718 с.
3. Молчанов А. М.— Труды Моск. мат. о-ва, 1953, т. 2, с. 169—200.
4. Бирман М. Ш.— Мат. сб., 1961, т. 55, № 2, с. 125—173.
5. Goldberg S. Unbounded linear operators. Theory and applications.— New-York, 1966.—199 p.
6. Еровенко В. А.— Докл. АН БССР, 1980, т. 24, № 6, с. 485—488.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 30 октября 1979 г.