Б. М. Бредихин, Ю. В. Линник, Применение теорем о простых числах в диофантовых задачах особого типа,
Матем. заметки, 1972, том 12, выпуск 3, 243–250

https://www.mathnet.ru/mzm9874

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 12, № 3 (1972), 243—250

УДК 511

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМ О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ В ДИОФАНТОВЫХ ЗАДАЧАХ ОСОБОГО ТИПА

Б. М. Бредихин, Ю. В. Линник

В работе рассматривается вопрос о разрешимости и об оценке снизу числа решений уравнения

$$n\ \frac{\nu_1\varphi_1 - \nu_2\varphi_2}{\nu_1 - \nu_2} \qquad (\nu_1 \neq \nu_2)$$

при некоторых ограничениях на плотность чисел ν и на распределенность чисел φ в арифметических прогрессиях. Библ. 5 назв.

1. Метод оценки тригонометрических сумм по простым числам, открытый И. М. Виноградовым [1], доставляет решение многих трудных задач с простыми числами. В 1953 г. И. М. Виноградов [2] указал элементарный путь исследования некоторых задач с простыми числами. Основой элементарных соображений (как и метода тригонометрических сумм), является фундаментальная идея И. М. Виноградова по оценке двойных сумм при помощи неравенства Коши — Буняковского с целью последующего их «сглаживания».

Простейшие применения идеи И. М. Виноградова приводят к диофантовым задачам несколько необычного типа.

Примем следующие обозначения: n — заданное натуральное число, (ν) и (φ) — заданные строго возрастающие последовательности натуральных чисел.

Рассмотрим уравнение

$$n = \frac{\nu_1\varphi_1 - \nu_2\varphi_2}{\nu_1 - \nu_2} \qquad (\nu_1 \neq \nu_2), \tag{1}$$

где ν_1 и ν_2 принадлежат последовательности (ν), φ_1 и φ_2 принадлежат последовательности (φ), φ_1 и $\varphi_2 < n$.

Пусть $Q(n)$ — число решений уравнения (1). Целью этой заметки является доказательство разрешимости уравнения (1) и получение для числа решений этого уравнения достаточно хороших оценок снизу при дополнительных ограничениях на плотность чисел ν и на распределенность чисел φ в арифметических прогрессиях.

Уравнение (1) очевидным образом связано с уравнением

$$\nu D + \varphi = n, \tag{2}$$

где $\nu \in (\nu)$, $\varphi \in (\varphi)$, D — произвольное натуральное число. В самом деле, если уравнению (2) при некотором D удовлетворяют две различные пары чисел (ν_2, φ_1) и (ν_1, φ_2), то число n представимо в виде (1).

Пусть $S(n)$ — число решений уравнения (2). Введем также следующие обозначения: $S(n, D)$ — число решений уравнения (2) при фиксированном D, $M(n)$ — число различных φ, удовлетворяющих уравнению (2), $N(n) = \sum\limits_{D, S(n,D)\neq 0} 1$ — число различных D, удовлетворяющих уравнению (2). Дефектом уравнения (2) будем называть величину

$$\mathrm{Def}(n) = S(n) - N(n).$$

Сформулируем несколько общих теорем.

ТЕОРЕМА А. *Для числа представлений натурального n в виде* (1) *выполняется оценка*

$$Q(n) \geqslant \frac{S(n)}{N(n)} \mathrm{Def}(n). \tag{3}$$

Теорема A, носящая столь общий характер, еще не гарантирует разрешимости уравнения (1), поскольку дефект уравнения (2) может равняться нулю. Поэтому представляют интерес такие специализации этой теоремы, которые обеспечивают разрешимость уравнения (1), а в некоторых случаях позволяют получить для $Q(n)$ оценку снизу. Нижеследующие теоремы являются примерами подобных специализаций.

Определим для последовательностей (ν) и (φ) комплексы условий:

(F_1): (ν) — последовательность простых чисел $\nu > z$, $0 < z < \exp(\sqrt{\ln n})$, $\sum\limits_{\varphi<n,\ \varphi\in(\varphi)} 1 > \alpha \frac{n}{z}$, где константа $\alpha > 1$;

(F_2): (ν) и (φ) — последовательности натуральных чисел, для которых выполняются соотношения

$$0 < z < \nu < z' < n,$$

$$\sum_{\substack{z<\nu<z' \\ \nu\in(\nu),\ (\nu,n)=1}} \ \sum_{\substack{\varphi\equiv n (\mathrm{mod}\ \nu) \\ \varphi\in(\varphi),\ \varphi\leqslant n}} 1 > (1+\theta(n))\frac{n}{z}(1+o(1)),$$

где $\theta(n) > 0$.

ТЕОРЕМА В. *Если для последовательностей* (ν) *и* (φ) *выполняется комплекс условий* (F_1), *то всякое достаточно большое натуральное число* n *представимо в виде* (1).

ТЕОРЕМА С. *Если для последовательностей* (ν) *и* (φ) *выполняется комплекс условий* (F_2), *то для числа представлений натурального* n *в виде* (1) *выполняется оценка*

$$Q(n) > \theta(n)(1+\theta(n))\frac{n}{z}(1+o(1)). \tag{4}$$

2. Для доказательства теоремы А оцениваем сумму

$$S(n) = \sum_{D,S(n,D)\neq 0} S(n,D)$$

с помощью неравенства Коши — Буняковского. Получим неравенство

$$S^2(n) \leqslant N(n)\sum_D S^2(n,D). \tag{5}$$

Из определения последовательностей (ν) и (φ) следует, что

$$\sum_D S^2(n,D) = S(n) + \sum_{\substack{n=\nu_2 D+\varphi_1 \\ n=\nu_1 D+\varphi_2}\ (\nu_1\neq\nu_2)} 1. \tag{6}$$

Неравенство (5) может только усилиться, если второе слагаемое в (6) заменить на $Q(n)$. В результате из (5) выводим оценку (3).

Рассмотрим доказательство теоремы В. Обозначим через Ω_z множество натуральных чисел, все простые делители которых не превосходят z. Нетрудно видеть, что

$$M(n) = \sum_{\varphi<n,\ \varphi\in(\varphi)} 1 - M_z,$$

где

$$M_z = \sum_{\substack{\varphi < n, \varphi \in (\varphi) \\ n - \varphi \in \Omega_z}} 1.$$

На основании теоремы А. И. Виноградова [3] о числах с малыми простыми делителями получаем оценку

$$M_z < \sum_{m < n, m \in \Omega_z} 1 = o(n \exp(-\sqrt{\ln n})).$$

Следовательно,

$$M(n) > \alpha \frac{n}{z} + o(n \exp(-\sqrt{\ln n})) > \frac{n}{z}$$

для достаточно больших значений n. В то же время

$$N(n) < n/z.$$

Поэтому

$$M(n) > N(n). \tag{7}$$

Поскольку $S(n) \geqslant M(n)$, то из (7) вытекает, что $S(n) > 0$ и $\mathrm{Def}(n) > 0$. Применяя теорему A, убеждаемся в разрешимости уравнения (1) в условиях теоремы B.

Замечание 1. Теорема B может быть доказана независимо от теоремы A. Достаточно к неравенству (7) применить принцип Дирихле.

Замечание 2. Применение теоремы A позволяет получить оценки снизу для числа решений уравнения (1) в условиях теоремы B. Однако теорема C является более точным инструментом для получения подобных оценок.

При доказательстве теоремы C принимаем во внимание, что в условиях этой теоремы будут выполняться неравенства

$$S(n) > (1 + \theta(n)) \frac{n}{z}(1 + o(1)), \quad N(n) < \frac{n}{z}.$$

Следовательно, $\mathrm{Def}(n) > \theta(n) \frac{n}{z}(1 + o(1))$. Теперь из неравенства (3) выводим неравенство (4). Тем самым теорема C доказана.

3. Применим теоремы B и C к вопросу о разрешимости уравнения (1) и для оценки снизу числа решений этого уравнения в некоторых частных случаях.

Рассмотрим, например, уравнение

$$n = \frac{p_1 p - p_2 p'}{p_1 - p_2} \qquad (p_1 \neq p_2), \tag{8}$$

где простые числа p_1 и p_2 принадлежат интервалу (z, z'), простые числа p и p' меньше n.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть числа z и z' удовлетворяют условиям $\alpha \ln n < z < \exp(\sqrt{\ln n})$, где константа $\alpha > 1$, $z' = n$. Тогда всякое достаточно большое натуральное число n представимо в виде* (8).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $z = \ln n$, $z' = \ln^{c_0} n^{0}$, где $c_0 > e$. Тогда всякое достаточно большое натуральное число представимо в виде* (8). *Для числа $Q_1(n)$ таких представлений имеет место оценка*

$$Q_1(n) > (\ln c_0)(\ln c_0 - 1)\frac{n}{\ln n}(1 + o(1)).$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $z = n^{1/2}(\ln n)^{-C} - h$,

$$h = n^{1/2}(\ln n)^{-C-C_1}, \quad z' = n^{1/2}(\ln n)^{-C},$$

где C — достаточно большая положительная константа, константа $C_1 > 0$. Тогда всякое достаточно большое натуральное число представимо в виде (8). *Для числа $Q_2(n)$ таких представлений имеет место оценка*

$$Q_2(n) > 4n^{3/2}(\ln n)^{-C-2C_1-4}(1 + o(1)).$$

Можно сформулировать ряд аналогичных теорем, варьируя границы интервала (z, z'). От длины и границ этого интервала зависит «мера нетривиальности» доказательства соответствующих теорем. Теоремы 1—3 достаточно характерны в этом отношении.

Доказательство теоремы 1 основано на теореме о простых числах. В теореме В полагаем $\nu_1 = p_1$, $\nu_2 = p_2$, $\varphi_1 = p$ и $\varphi_2 = p'$.

Из теоремы о простых числах и условий теоремы 1 следует, что

$$\sum_{p<n} 1 > \frac{n}{\ln n} > \alpha \frac{n}{z}$$

при $\alpha \ln n < z$ для достаточно больших n.

Таким образом, выполняется комплекс условий (F_1). Теперь теорема 1 немедленно следует из теоремы B.

Доказательства теорем 2 и 3 основаны на законах распределения простых чисел в арифметических прогрессиях. При доказательстве этих теорем полагаем в теореме C $\nu_1 = p_1$, $\nu_2 = p_2$, $\varphi_1 = p$ и $\varphi_2 = p'$; число n считаем достаточно большим.

Из теоремы Зигеля — Вальфиша [4] и условий теоремы 2 находим, что при $z = \ln n$ и $z' = \ln^{c_0} n$ выполняется оценка

$$\sum_{\substack{z<p_1<z'\\ p_1 \nmid n}} \sum_{\substack{p\equiv n (\mathrm{mod}\ p_1)\\ p<n}} 1 > \sum_{z<p_1<z'} \frac{1}{p_1} \frac{n}{\ln n} (1 + o(1)) >$$

$$> (\ln c_0) \frac{n}{z} (1 + o(1)).$$

Таким образом, выполняется комплекс условий (F_2) с $\theta(n) = \ln c_0 - 1$. Теперь теорема 2 следует из теоремы C.

Из теоремы Е. Бомбиери [5] и условий теоремы 3 находим, что имеют место неравенства

$$\sum_{\substack{z<p_1<z'\\ p_1 \nmid n}} \sum_{\substack{p\equiv n\ (\mathrm{mod}\ p_1)\\ p<n}} 1 >$$

$$> \sum_{z<p_1<z'} \frac{1}{p_1} \frac{n}{\ln n} (1 + o(1)) + O(n (\ln n)^{-C_2}) >$$

$$> 2z (\ln n)^{-C_1-2} \frac{n}{z} (1 + o(1)),$$

где $C_2 > C_1 + 2$, $C = C(C_2)$. Следовательно, выполняется комплекс условий (F_2) с

$$\theta(n) = 2z (\ln n)^{-C_1-2} - 1.$$

Теперь теорема 3 немедленно получается из теоремы C.

Можно аналогично исследовать уравнение

$$n = \frac{p_1^r p - p_2^r p'}{p_1^r - p_2^r} \qquad (p_1 \neq p_2), \tag{9}$$

где p_1 и p_2 — простые числа, $r > 1$ — фиксированное натуральное число, p_1^r и p_2^r принадлежат интервалу (z, z'), простые числа p и p' меньше n. Сформулируем одну из теорем, относящихся к уравнению (9).

ТЕОРЕМА 4. *Пусть*

$$z = \ln^{c_3} n, \quad z' = \ln^{c_4} n,$$

где c_3 *и* c_4 *—положительные константы,* $c_4 - c_4/r + 1 < c_3 < c_4$. *Тогда всякое достаточно большое натуральное число* n *представимо в виде* (9). *Для числа* $Q_3(n)$ *таких представлений имеет место оценка*

$$Q_3(n) > \frac{1}{(c_4/r)^2 (\ln\ln n)^2} \frac{n}{(\ln n)^{c_4 - c_4/r+1}} (1 + o(1)).$$

Доказательство теоремы 4 вполне аналогично доказательству теоремы 2. Нужно положить в теореме С $\nu_1 = p_1^r$, $\nu_2 = p_2^r$, $\varphi_1 = p$ и $\varphi_2 = p'$. Затем следует воспользоваться теоремой Зигеля — Вальфиша.

4. Изложенные результаты можно развить в нескольких направлениях.

Во-первых, теоремы А, В и С и их следствия переносятся на алгебраические поля. Для этого уравнение (2) рассматривается с заданным комплексным числом n и с комплексными числами ν, φ и D, принимающими конечные числа различных значений. Вместо законов распределения простых чисел в натуральном ряду и в арифметических прогрессиях надлежит использовать аналоги этих законов для алгебраических полей.

Во-вторых, можно взять за основу уравнение

$$\nu D - \varphi = a, \tag{10}$$

где $\nu \in (\nu)$, $\varphi \in (\varphi)$, a — фиксированное натуральное число, отличное от нуля, $\varphi < n$.

Заметим, что в уравнении (2) последнее условие выполняется автоматически. Поэтому уравнение (10) можно считать «неопределенным» аналогом уравнения (2). В результате мы получим «неопределенные» аналоги рассмотренных нами ранее общих и частных теорем.

Далее теоремы А, В и С и им аналогичные можно обобщить, приняв во внимание возможность повторения значений ν и φ. Это внесет только некоторые усложнения в формулировки теорем. Сами доказательства существенно не изменяется. Однако сфера применимости теорем значительно расширится.

В заключение авторы искренне благодарят С. Утияма за обсуждение работы и ценные замечания к ней.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
23.XI.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградов И. М., Избранные труды, М., 1952.
[2] Виноградов И. М., Элементарное доказательство одной теоремы теории простых чисел, Изв. АН СССР, Сер. матем., 17 (1953), 3—12.
[3] Виноградов А. И., О числах с малыми простыми делителями, Докл. АН СССР 109, № 4 (1956), 683—686.
[4] Чудаков Н. Г., Введение в теорию L-функций Дирихле, М.—Л., 1947.
[5] Дэвенпорт Г., Мультипликативная теория чисел, М., 1971.