ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1978 МАТЕМАТИКА № 12 (199)

УДК 517.987

Н. В. Трунов, А. Н. Шерстнев

К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В АЛГЕБРАХ ОПЕРАТОРОВ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ВЕСА, II

Предлагаемая статья является продолжением работы [2]. Продолжается нумерация параграфов и утверждений. Сохранены и все обозначения.

§ 4. Условное ожидание в классе интегрируемых билинейных форм и теорема Фубини

Здесь нами введено и изучено понятие условного ожидания применительно к классу интегрируемых (относительно точного нормального полуконечного веса) билинейных форм. Показано, что это понятие является естественным распространением известного понятия условного ожидания, как отображения алгебры Неймана на свою подалгебру. Здесь же приведен некоммутативный аналог теоремы Фубини для весов.

Пусть φ — точный нормальный полуконечный вес на алгебре Неймана M. Реализация пространства $L_1(\varphi)$ в виде пространства M_* ультраслабо непрерывных линейных функционалов на алгебре M позволяет по-новому взглянуть на известное понятие условного ожидания в алгебрах операторов [1], [10]. Нашей целью является определение условного ожидания на классе всех интегрируемых б. ф. и установление связи этого понятия с понятием условного ожидания, как отображения алгебры Неймана на свою подалгебру.

Пусть N — подалгебра Неймана алгебры M такая, что $\varphi_0 = \varphi | N^+$ является полуконечным весом на N. Пусть

$$\gamma : L_1(\varphi) \to M_*, \quad \gamma_0 : L_1(\varphi_0) \to N_*$$

— канонические изоморфизмы. Условимся снабжать нулевым индексом известные объекты, канонически связанные с $\varphi_0 : \pi_0$, β_0, $\mathfrak{H}_0$, J_0 и т. п.

Предложение 4. *Существует и однозначно определено условием*

$$\gamma(a)(x) = \gamma_0(Ea)(x) \; (x \in N, \; a \in L_1(\varphi)) \tag{8}$$

отображение $E : L_1(\varphi) \to L_1(\varphi_0)$. *При этом*

E1. E — *линейная сюръекция*;

E2. E *положительно и точно*;

E3. $\|E\| = 1$;

E4. $\varphi_0(Ea) = \varphi(a)$ $(a \in L_1(\varphi))$;

E5. *если* $a_n \nearrow a\,(n=1, 2, \ldots)$ *в* $L_1^+(\varphi)$, *то* $Ea_n \nearrow Ea$ (символ $a_n \nearrow a$ означает, что последовательность a_n не убывает и $\sup a_n = a \in L_1^+(\varphi)$ в смысле порядка, определяемого конусом $L_1^+(\varphi)$).

Доказательство. Пусть б. ф. $a \in L_1(\varphi)$ произвольна. Тогда функционал $\gamma(a) \in M_*$ является ультраслабо непрерывным функционалом и на подалгебре N. Следовательно, $\gamma(a) \in N_*$. Пусть $Ea\,(\in L_1(\varphi_0))$ — б. ф., являющаяся прообразом функционала $\gamma(a) \in N_*$ относительно отображения $\gamma_0 : L_1(\varphi_0) \to N_*$. Тем самым определено отображение $E: L_1(\varphi) \to L_1(\varphi_0)$, удовлетворяющее условию (8). Так как γ_0 — изоморфизм, то требованием (8) отображение E определено однозначно. Проверим теперь выполнение свойств E1 — E5. Свойства E1 — E4 следуют непосредственно из (8). Проверим E5. Пусть $a_n \nearrow a$ в $L_1^+(\varphi)$. Тогда последовательность $\gamma(a_n)$ не убывает и ограничена сверху функционалом $\gamma(a)$. В силу слабой секвенциальной полноты M_* (см. [8]) существует б. ф. $b \in L_1^+(\varphi)$ такая, что $\gamma(a_n) \to \gamma(b)\ (n \to \infty)$. Так как изоморфизм γ сохраняет порядковые свойства конусов $L_1^+(\varphi)$ и M_*^+ (см. теорему 3), мы имеем $a = b$. Следовательно, $\gamma(a)(x) = \lim\limits_n \gamma(a_n)(x)\ (x \in M)$. Последовательность Ea_n также не убывает и ограничена сверху билинейной формой $Ea \in L_1^+(\varphi_0)$. Следовательно, существует б. ф. $c \in L_1^+(\varphi_0)$ такая, что $c = \sup Ea_n$, $\gamma_0(c)(x) = \lim\limits_n \gamma_0(Ea_n)(x)\ (x \in N)$. Для любого $x \in N$ имеем, таким образом,

$$\gamma(a)(x) = \lim_n \gamma(a_n)(x) = \lim_n \gamma_0(Ea_n)(x) = \gamma_0(c)(x),$$

откуда $c = Ea$. Предложение доказано.

Теперь мы введем определение условного ожидания. В сущности, нам осталось только постулировать аналог требования идемпотентности условного ожидания, т. к. остальные основные требования, предъявляемые к этому понятию, нами уже получены в предложении 4.

Определение 3. Отображение $E: L_1(\varphi) \to L_1(\varphi_0)$ назовем *условным ожиданием*, если это отображение удовлетворяет условиям (8) и

$$Ex = x \quad (x \in \mathfrak{m}_{\varphi_0}). \tag{9}$$

Замечание. Пусть N_1 — еще одна подалгебра Неймана алгебры M такая, что $N \subset N_1 \subset M$, и пусть $\varphi_1 = \varphi \,|\, N_1^+$ полуконечен. Справедливо следующее свойство транзитивности условного ожидания: коммутативная диаграмма условных ожиданий

$$\begin{tikzcd} L_1(\varphi) \arrow[r, "E"] \arrow[d, "E_1"'] & L_1(\varphi_0) \\ L_1(\varphi_1) \arrow[ur, "E_2"'] & \end{tikzcd}$$

имеет место, коль скоро определены условные ожидания E_1 и E_2 либо E и E_1.

Пусть б. ф. $a \in L_1(\varphi_0)$. Через $\tilde{a}$ условимся обозначать ее ограничение на линеал $D_\varphi (\subset D_{\varphi_0})$:

$$\tilde{a}(f, g) = a(f, g) \ (f, g \in D_\varphi).$$

Лемма 6. *Пусть* $a \in L_1(\varphi_0)$. *Тогда* $\tilde{a} \in L_1(\varphi)$, *причем* $\|\tilde{a}\|_\varphi \leqslant \|a\|_{\varphi_0}$.

Доказательство. Установим сначала неравенство

$$\|\beta(x)\| \leqslant \|\beta_0(x)\| \ (x \in \mathfrak{m}_{\varphi_0}). \tag{10}$$

Пусть p — ортогональный проектор в $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathfrak{H}_0$, являющееся замыканием $\hat{\mathfrak{n}}_{\varphi_0}$. Нетрудно видеть, что для любого $x' \in \pi(M)'$ оператор $(px' \mid \mathfrak{H}_0) \in \pi_0(N)'$. Для любых $y, z \in \mathfrak{n}_{\varphi_0}$ имеем

$$\|\beta(y^* z)\| = \sup_{x' \in \pi(M)', \|x'\|=1} |(x'\hat{z}, \hat{y})| =$$

$$= \sup_{x' \in \pi(M)', \|x'\|=1} |((px' \mid \mathfrak{H}_0)\hat{z}, \hat{y})| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x' \in \pi_0(N)', \|x'\|=1} |(x'\hat{z}, \hat{y})| = \|\beta_0(y^* z)\|.$$

Далее, пусть x_n — определяющая последовательность для б. ф. $a \in L_1^{\mathfrak{d}}(\varphi_0)$. Ясно, что x_n удовлетворяет условию $\tilde{a}(f, f) = \lim_n (x_n f, f) \ (f \in D_\varphi)$. Кроме того,

$$\|x_n - x_m\|_\varphi = \|\beta(x_n - x_m)\| \leqslant \|\beta_0(x_n - x_m)\| = \|x_n - x_m\|_{\varphi_0} \to 0,$$

так что x_n является определяющей последовательностью для б. ф. $\tilde{a}$. Таким образом, $\tilde{a} \in L_1^{\mathfrak{d}}(\varphi)$, и утверждение теперь сразу следует из определения $L_1(\varphi)$ и неравенства (10).

Лемма 7. *Если* $E: L_1(\varphi) \to L_1(\varphi_0)$ — *условное ожидание, то*

(*i*) $E\tilde{a} = a \ (a \in L_1(\varphi_0))$,

(*ii*) *отображение* $\tilde{}: L_1(\varphi_0) \to L_1(\varphi)$ *есть изометрический изоморфизм* $L_1(\varphi_0)$ *на замкнутое подпространство* $L_1^{\sim}(\varphi)$ *банахова пространства* $L_1(\varphi)$.

Доказательство. Утверждение (*i*) достаточно доказать для б. ф. $a \in L_1^{\mathfrak{d}}(\varphi_0)$. Если $x_n (\in \mathfrak{m}_{\varphi_0}^{\mathfrak{d}})$ — определяющая последовательность для a, то по лемме 6 она же — определяющая для б. ф. $\tilde{a} \in L_1^{\mathfrak{d}}(\varphi)$. В силу Е3 x_n — определяющая последовательность для б. ф. $E\tilde{a}$. Следовательно, $E\tilde{a} = a$. Утверждение (*ii*) справедливо в силу следующей выкладки, верной для любой б. ф. $a \in L_1(\varphi_0)$:

$$\|\tilde{a}\|_\varphi \leqslant \|a\|_{\varphi_0} = \|E\tilde{a}\|_{\varphi_0} \leqslant \|\tilde{a}\|_\varphi.$$

Лемма доказана.

Перейдем теперь к установлению связи условного ожидания в смысле определения 3 с понятием условного ожидания, как отображения алгебры Неймана на свою подалгебру. Для того, чтобы отличать последнее (традиционное) понятие условного ожидания от нашего, примем еще одно определение (см. [10]).

Определение 4. Пусть N — подалгебра Неймана алгебры M и φ — точный нормальный полуконечный вес на M, причем вес $\varphi_0 = \varphi | N^+$ полуконечен на N. Отображение $\varepsilon : M \to N$ назовем *ограниченным условным ожиданием относительно* φ, *если*

$\varepsilon 1$. ε — линейная сюръекция, $\varepsilon^2 = \varepsilon$;

$\varepsilon 2$. ε положительно и точно;

$\varepsilon 3$. $\|\varepsilon\| = 1$;

$\varepsilon 4$. $\varphi_0(\varepsilon(x)) = \varphi(x)$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi^+)$;

$\varepsilon 5$. ε ультраслабо непрерывно.

Отметим, что если ограниченное условное ожидание ε существует, то оно единственно и обладает также следующими свойствами:

$\varepsilon 6$. $\varepsilon(yx) = y\varepsilon(x)$ $(x \in M,\ y \in N)$;

$\varepsilon 7$. $\varepsilon(x)^* \varepsilon(x) \leqslant \varepsilon(x^* x)$ $(x \in M)$.

Томияма показал [11], что свойства $\varepsilon 6$, $\varepsilon 7$ и положительность ε выполняются для любой линейной проекции нормы 1 C^*-алгебры на свою C^*-подалгебру. Покажем единственность условного ожидания. Пусть $\varepsilon_1 : M \to N$ — еще одно отображение, удовлетворяющее условиям определения 4. Для любого $x \in \mathfrak{m}_\varphi$ мы имеем

$$\varphi([\varepsilon(x) - \varepsilon_1(x)]^* [\varepsilon(x) - \varepsilon_1(x)]) =$$

$$= \varphi([\varepsilon(x) - \varepsilon_1(x)]^* \varepsilon(x) - [\varepsilon(x) - \varepsilon_1(x)]^* \varepsilon_1(x)) =$$

$$= \varphi(\varepsilon([\varepsilon(x) - \varepsilon_1(x)]^* x)) - \varphi(\varepsilon_1([\varepsilon(x) - \varepsilon_1(x)]^* x)) =$$

$$= \varphi([\varepsilon(x) - \varepsilon_1(x)]^* x) - \varphi([\varepsilon(x) - \varepsilon_1(x)]^* x) = 0.$$

Так как φ точен, то отсюда следует, что $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x)$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi)$. Из свойства $\varepsilon 5$ с учетом ультраслабой плотности $\mathfrak{m}_\varphi$ в M теперь следует, что $\varepsilon = \varepsilon_1$.

Теорема 5. *Пусть N — подалгебра Неймана алгебры M, φ — точный нормальный полуконечный вес на M и $\varphi_0 = \varphi | N^+$ — полуконечный вес. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) существует условное ожидание $E : L_1(\varphi) \to L_1(\varphi_0)$;

(ii) существует ограниченное условное ожидание $\varepsilon : M \to N$ относительно φ.

При этом ограничение $E | \mathfrak{m}_\varphi$ условного ожидания E на алгебру $\mathfrak{m}_\varphi$ совпадает с $\varepsilon | \mathfrak{m}_\varphi$ — ограничением на ту же алгебру ограниченного условного ожидания ε.

Лемма 8. *Если сеть $x_i \in \mathfrak{m}_\varphi^+$ $(i \in I)$ возрастает к 1, то $\varphi = \sup_{i \in I} [\gamma(x_i)](\cdot)$ на $\mathfrak{m}_\varphi^+$.*

Доказательство. Лемма справедлива в силу выкладки, верной для любого $x \in \mathfrak{A}$:

$$\varphi(x^* x) = |\hat{x}|^2 = |J\hat{x}|^2 = \sup_i (\pi(x_i) J\hat{x}, J\hat{x}) =$$

$$= \sup_i \beta(x_i)(J\pi(x^* x) J) = [\sup_i \gamma(x_i)](x^* x).$$

Доказательство теоремы 5. $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть $E: L_1(\varphi) \to L_1(\varphi_0)$, и$\widetilde{\ }: L_1(\varphi_0) \to L_1^{\sim}(\varphi)$ — изометрия, рассмотренная в лемме 7. При фиксированном $x \in M$ функционал $F_x(a) \equiv \gamma(\widetilde{a})(x)$ $(a \in L_1(\varphi_0))$ линеен на $L_1(\varphi_0)$, причем для любого $a \in L_1(\varphi_0)$ имеем

$$|F_x(a)| \leqslant \|\gamma(\widetilde{a})\| \, \|x\| = \|x\| \, \|\widetilde{a}\|_\varphi = \|x\| \, \|a\|_{\varphi_0}.$$

Вспоминая, что γ_0 осуществляет изометрический изоморфизм банахова пространства $L_1(\varphi_0)$ на N_*, заключаем, что существует и определен однозначно элемент $\varepsilon(x) \in N$, такой, что $F_x(a) = \gamma_0(a)(\varepsilon(x))$ $(a \in L_1(\varphi_0))$, причем $\|\varepsilon(x)\| \leqslant \|x\|$. Отображение $\varepsilon: M \to N$, определенное таким образом, очевидно, линейно. Если, в частности, $x \in N$, то в силу равенств

$$\gamma(\widetilde{a})(x) = \gamma_0(E\widetilde{a})(x) = \gamma_0(a)(x) \; (a \in L_1(\varphi_0))$$

мы имеем $\varepsilon(x) = x$. Таким образом, свойства $\varepsilon 1$ и $\varepsilon 3$ установлены. Установим $\varepsilon 4$. Возьмем возрастающую к 1 сеть $x_i \in \mathfrak{m}_{\varphi_0}^+$ $(i \in I)$. В силу леммы 8 имеем для любого $x \in \mathfrak{m}_\varphi^+$:

$$\varphi(x) = \sup_i \gamma(x_i)(x) = \sup_i \gamma(\widetilde{x}_i)(x) = \sup_i \gamma_0(x_i)(\varepsilon(x)) = \varphi_0(\varepsilon(x)).$$

Установим $\varepsilon 5$. Пусть $x \in M$ — произволен и сеть $x_i \to x$ ультраслабо. Для произвольного функционала $F \in N_*$ пусть б. ф. $a \in L_1(\varphi_0)$ такова, что $F = \gamma_0(a)$. Тогда

$$F(\varepsilon(x_i)) = \gamma_0(a)(\varepsilon(x_i)) = \gamma(\widetilde{a})(x_i) \to \gamma(\widetilde{a})(x) = \gamma_0(a)(\varepsilon(x)) = F(\varepsilon(x)).$$

Итак, ε — ультраслабо непрерывное отображение. Осталось установить $\varepsilon 2$. Достаточно установить точность (см. замечание после определения 4). Пусть при некотором $x \in M^+$: $\varepsilon(x) = 0$. Для любого $y \in \mathfrak{n}_{\varphi_0}$: $y^* xy \in \mathfrak{m}_\varphi^+$. Следовательно,

$$\varphi(y^* xy) = \varphi(\varepsilon(y^* xy)) = \varphi(y^* \varepsilon(x) y) = 0.$$

Так как φ точен, отсюда следует, что $y^* xy = 0$. Пусть сеть $y_i \in \mathfrak{n}_{\varphi_0}^{\ni}$ сильно сходится к 1. Тогда $y_i x y_i \to x$ слабо. Отсюда $x = 0$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть определено ограниченное условное ожидание $\varepsilon: M \to N$. Отметим, что

$$\pi_0(x) p = \pi(x) p, \tag{11}$$

где p — ортопроектор на подпространство $\mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{H}$, и

$$p\hat{x} = \widehat{\varepsilon(x)} \; (x \in \mathfrak{A}). \tag{12}$$

Последнее равенство следует из выкладки, верной для любого $y \in \mathfrak{A}_0 (= \mathfrak{n}_{\varphi_0} \cap \mathfrak{n}_{\varphi_0}^*)$:

$$(p\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}, \hat{y}) = \varphi(y^* x) = \varphi(\varepsilon(y^* x)) = \varphi(y^* \varepsilon(x)) = (\widehat{\varepsilon(x)}, \hat{y}).$$

Несколько ниже мы установим равенство:

$$J_0 p = Jp = pJ, \tag{13}$$

а теперь завершим доказательство теоремы, пользуясь равенствами (11) — (13). Для этого рассмотрим отображение E, однозначно определенное равенством (8). В частности,

$$\gamma(y^* x)(z) = \gamma_0(E(y^* x))(z) \quad (x,\ y \in \mathfrak{A},\ z \in \mathfrak{A}_0). \tag{14}$$

С другой стороны, для любых $z \in \mathfrak{A}_0$, x, $y \in \mathfrak{A}$ имеем

$$\gamma_0(\varepsilon(y^* x))(z) = (\hat{z},\ J_0 \varepsilon \widehat{(y^* x)}) = (\widehat{\varepsilon(y^* x)},\ J\hat{z}) =$$

$$= (\widehat{y^* x},\ pJ\hat{z}) = (\widehat{y^* x},\ Jp\hat{z}) = (\hat{z},\ J\widehat{(y^* x)}) = \gamma(y^* x)(z).$$

Сопоставляя это равенство с (14) и учитывая ультраслабую плотность в N многообразия $\mathfrak{A}_0$, имеем

$$\gamma_0(E(y^* x)) = \gamma_0(\varepsilon(y^* x)) \quad (x,\ y \in \mathfrak{A}).$$

Следовательно, $E(y^* x) = \varepsilon(y^* x)$ $(x,\ y \in \mathfrak{A})$, так что $E|\mathfrak{m}_\varphi = \varepsilon|\mathfrak{m}_\varphi$. Итак, нам осталось установить равенство (13). Пусть S (соответственно, S_0) — замыкание антилинейного отображения $\hat{x} \to \hat{x}^*$ $(x \in \mathfrak{A})$ в пространстве $\mathfrak{H}$ (соответственно, отображения $\hat{x} \to \hat{x}^*$ $(x \in \mathfrak{A}_0)$ в $\mathfrak{H}_0$) и $S = J\Delta^{1/2}$, $S_0 = J_0 \Delta_0^{1/2}$ — их полярные разложения. Покажем, что оператор S коммутирует с p. Для любого $x \in \mathfrak{A}$ имеем

$$pS\hat{x} = p\hat{x}^* = \widehat{\varepsilon(x)}^* = S\widehat{\varepsilon(x)} = Sp\hat{x} = S_0 p\hat{x}.$$

Пусть теперь $\xi \in D(S)$ произволен и последовательность $x_n \in \mathfrak{A}$ такова, что $\hat{x}_n \to \xi$, $S\hat{x}_n \to S\xi$. Тогда $p\hat{x}_n \to p\xi$, $S(p\hat{x}_n) = pS\hat{x}_n \to pS\xi$, так что $p\xi \in D(S)$ и $Sp\xi = pS\xi$. Таким образом, $Sp \supset pS$. Поэтому с оператором p коммутируют и компоненты J и $\Delta^{1/2}$ полярного разложения S. В частности, отсюда следует второе равенство в (13). Обратим теперь внимание на то, что оператор S_0 является ограничением S на $\mathfrak{H}_0$. Отсюда без труда следует, что $\Delta_0 p = \Delta p$, и потому $J_0 p = Jp$. Теорема доказана.

Следствие Пусть $E: L_1(\varphi) \to L_1(\varphi_0)$ — условное ожидание и ε — соответствующее ограниченное условное ожидание. Если (x_n) — определяющая последовательность для б. ф. $a \in L_1^{\mathfrak{s}}(\varphi)$, то $\varepsilon(x_n)$ — определяющая для б. ф. $Ea \in L_1^{\mathfrak{s}}(\varphi_0)$.

Займемся теперь аналогом теоремы Фубини для нашей схемы интегрирования. Соответствующая техника идейно связана с рассмотренным понятием условного ожидания. Пусть M_i $(i = 1, 2)$ — алгебры Неймана с точными нормальными полуконечными весами φ_i, H_i — гильбертовы пространства, в которых действуют алгебры M_i. Через $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ обозначим тензорное произведение этих весов в смысле определения 1.1.3 [6]. Таким образом, $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ есть единственный точный нормальный полуконечный вес на алгебре $M_1 \otimes M_2$, определенный условиями:

(*i*) $x_i \in \mathfrak{m}_{\varphi_i}$ влечет $x_1 \otimes x_2 \in \mathfrak{m}_{\varphi_1 \otimes \varphi_2}$ и $(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(x \otimes x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$;

(*ii*) $\sigma_t^{\varphi_1 \otimes \varphi_2} = \sigma_t^{\varphi_1} \otimes \sigma_t^{\varphi_2}$ $(t \in R)$.

Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H}$, π, J, γ ($\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{H}_i$, π_i, J_i, γ_i $(i = 1, 2)$) — канонические объекты, определяемые весом $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ (соответственно, весом φ_i $(i = 1, 2)$). Тогда (см. [6], [9])

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2, \ \pi = \pi_1 \otimes \pi_2, \ J = J_1 \otimes J_2. \tag{15}$$

Теорема 6. *Существует единственная пара точных положительных линейных сюръекций* $\mathscr{E}_i : L_1(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \to L_1(\varphi_i)$ *с нормой* 1 *таких, что*

$$\mathscr{E}_1(x_1 \otimes x_2) = \varphi_2(x_2)x_1, \ \mathscr{E}_2(x_1 \otimes x_2) = \varphi_1(x_1)x_2 \ (x_i \in \mathfrak{m}_{\varphi_i};\ i = 1, 2).$$

При этом $\varphi_1 \otimes \varphi_2(a) = \varphi_1(\mathscr{E}_1 a) = \varphi_2(\mathscr{E}_2 a)$ $(a \in L_1(\varphi_1 \otimes \varphi_2))$.

Лемма 9. *Множество элементов вида* $x_1 \otimes x_2$ $(x_i \in \mathfrak{m}_{\varphi_i})$ *порождает линеал, плотный в банаховом пространстве* $L_1(\varphi_1 \otimes \varphi_2)$, *причем*

$$\gamma(x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2) = \gamma_1(x_1)(y_1) \cdot \gamma_2(x_2)(y_2) \ (x_i \in \mathfrak{m}_{\varphi_i},\ y_i \in M_i) \tag{16}$$

Доказательство. Покажем, что $y = 0$ $(y \in M_1 \otimes M_2)$, коль скоро $\gamma(x_1 \otimes x_2)(y) = 0$ для всех $x_i \in \mathfrak{m}_{\varphi_i}$ $(i = 1, 2)$. Действительно, в этом случае

$$\gamma(u_1^* z_1 \otimes u_2^* z_2)(y) = (J\pi(y^*)Jz_1 \widehat{\otimes} z_2,\ u_1 \widehat{\otimes} u_2) =$$

$$= (J\pi(y^*)J(\hat{z}_1 \otimes \hat{z}_2),\ \hat{u}_1 \otimes \hat{u}_2)\ (u_i,\ z_i \in \mathfrak{m}_{\varphi_i},\ i = 1, 2).$$

Так как $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$, и $\hat{\mathfrak{A}}_i$ плотны в $\mathfrak{H}_i$ $(i = 1, 2)$, то $J\pi(y^*)J = 0$, а значит и $y = 0$. Равенство (16), очевидно, достаточно установить для элементов x_i вида $x_i = u_i^* z_i$ $(u_i,\ z_i \in \mathfrak{A}_i)$. С учетом (15) имеем

$$\gamma(u_1^* z_1 \otimes u_2^* z_2)(y_1 \otimes y_2) = (J\pi(y_1^* \otimes y_2^*)Jz_1 \widehat{\otimes} z_2,\ u_1 \widehat{\otimes} u_2) =$$

$$= ((J_1\pi_1(y_1^*)J_1) \otimes (J_2\pi_2(y_2^*)J_2)(\hat{z}_1 \otimes \hat{z}_2),\ \hat{u}_1 \otimes \hat{u}_2) =$$

$$= \prod_{j=1}^{2} (J_j\pi_j(y_j^*)J_j\hat{z}_j,\ \hat{u}_j) = \prod_{j=1}^{2} \gamma_j(u_j^* z_j)(y_j).$$

Доказательство теоремы 6. Для $a \in L_1(\varphi_1 \otimes \varphi_2)$ и $y \in M_1$ положим $F_a(y) = \gamma(a)(y \otimes 1_{H_2})$. Поскольку соответствие $y \leftrightarrow y \otimes 1_{H_2}$ определяет изоморфизм алгебр Неймана M_1 и $M_1 \otimes \mathbf{C}_{H_2}$, то F_a является ультраслабо непрерывным линейным функционалом на M_1. Вспоминая, что γ_1 осуществляет изометрический изоморфизм $L_1(\varphi_1)$ на M_{1*}, заключаем о существовании единственной б. ф. $\mathscr{E}_1 a \in L_1(\varphi_1)$ такой, что

$$F_a(y) = \gamma_1(\mathscr{E}_1 a)(y) \ (y \in M_1).$$

Отображение $\mathscr{E}_1 : L_1(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \to L_1(\varphi_1)$, определенное этим равенством, обладает, очевидно, следующими свойствами: $\mathscr{E}_1$ — линейная положительная точная сюръекция нормы 1. Кроме того,

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2(a) = \varphi_1(\mathscr{E}_1 a) \; (a \in L_1(\varphi_1 \otimes \varphi_2)), \tag{17}$$

$$\mathscr{E}_1(x_1 \otimes x_2) = \varphi_2(x_2) x_1 \; (x_i \in \mathfrak{m}_{\varphi_i} \; (i = 1, 2)). \tag{18}$$

Действительно, для любой б. ф. $a \in L_1(\varphi_1 \otimes \varphi_2)$ имеем

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2(a) = \gamma(a)(1_{H_1} \otimes 1_{H_2}) = \gamma_1(\mathscr{E}_1 a)(1_{H_1}) = \varphi_1(\mathscr{E}_1 a).$$

Свойство (18) вытекает из следующей выкладки, справедливой в силу (16) для любых $x_i \in \mathfrak{m}_{\varphi_i}$ $(i = 1, 2)$ и $y \in M_1$:

$$\gamma_1(\mathscr{E}_1(x_1 \otimes x_2))(y) = \gamma(x_1 \otimes x_2)(y \otimes 1_{H_2}) =$$

$$= \gamma_1(x_1)(y) \cdot \gamma_2(x_2)(1_{H_2}) = \gamma_1(\varphi_2(x_2) x_1)(y).$$

Единственность отображения $\mathscr{E}_1$ с указанными свойствами есть следствие плотности в пространстве $L_1(\varphi_1 \otimes \varphi_2)$ линеала, порожденного элементами вида $x_1 \otimes x_2$ $(x_i \in \mathfrak{m}_{\varphi_i})$. Аналогичные рассуждения справедливы для отображения $\mathscr{E}_2$. Теорема доказана.

§ 5. Заключение

В заключение статьи обсудим вопрос о включении пространства интегрируемых б. ф. $L_1(\varphi)$ в традиционную тройку $\{L_1, L_2, L_\infty\}$, а также коснемся феноменологии интегрируемых б. ф. и сделаем ряд библиографических примечаний, имеющих отношение к обсуждаемой проблеме.

Пусть, как обычно, φ — точный нормальный полуконечный вес, заданный на алгебре Неймана M, действующей в гильбертовом пространстве H. Как известно, аналогами существенно ограниченных измеримых функций являются в данном случае операторы из алгебры M. Их можно реализовать ограниченными б. ф., заданными на линеале веса D_φ. Каждому оператору $x \in M$ сопоставим ограниченную б. ф. $x(\cdot, \cdot)$, заданную на $D_\varphi : x(f, g) \equiv (xf, g)$ $(f, g \in D_\varphi)$. Положим по определению $\|x(\cdot, \cdot)\|_\infty = \|x\| \; (x \in M)$. Приведенная конструкция доставляет нам содержательное описание пространства $L_\infty(\varphi)$. Как банахово пространство, $L_\infty(\varphi)$ изометрически изоморфно пространству M. Это двойственное описание уже не зависит от конкретной реализации W^*-алгебры M, как алгебры Неймана. Отметим также, что этот факт согласуется с известным в традиционной теории изоморфизмом пространства L_∞ с сопряженным к L_1:

$$L_1(\varphi)^* \simeq (M_*)^* \simeq M \simeq L_\infty(\varphi).$$

Кроме того, как нетрудно видеть, $L_\infty(\varphi) \cap L_1(\varphi)$ плотно в $L_1(\varphi)$.

Перейдем к пространству $L_2(\varphi)$. L_2-метрикой относительно точного нормального полуконечного веса φ является метрика, определяемая скалярным произведением $\{x, y\} \to \varphi(y^*x)$ $(x, y \in \mathfrak{n}_\varphi)$. Пополнение левого идеала $\mathfrak{n}_\varphi$ по этой метрике приводит к гильбертову пространству $\mathfrak{H}$ представления алгебры M, индуцированному весом φ. Пространство $\mathfrak{H}$ не зависит от реализации W^*-алгебры M, как алгебры Неймана. Это дает нам двойственное описание искомого пространства $L_2(\varphi)$. Может быть предложено и содержательное описание $L_2(\varphi)$ в терминах б. ф., заданных на линеале веса. Именно, б. ф. a, заданная на D_φ, принадлежит $L_2(\varphi)$, если существует последовательность $(x_n) \subset \mathfrak{n}_\varphi$ такая что

$$(i)\ a(f, g) = \lim_n (x_n f, g) \quad (f, g \in D_\varphi),$$

$$(ii)\ \varphi((x_n - x_m)^*(x_n - x_m)) \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

Развернутая теория пространства $L_2(\varphi)$ обладает важными специфическими особенностями, определяющими ее вполне самостоятельное значение. Эта теория будет изложена в отдельной публикации.

Теория алгебр операторов является в настоящее время одним из основных математических инструментов, используемых в общей теории полей и частиц. Основными объектами, связанными с физической системой, являются наблюдаемые и состояния. Распространенными моделями систем являются модели, основанные на теории алгебр Неймана.

Одним из методологических приемов исследования системы является ограничение этой системы. Например, рассматривают алгебры ограниченных операторов, порожденные основными („поименованными") переменными. Еще одно ограничение можно связать с наличием априорной доминирующей меры φ: в нашем контексте — это точный нормальный полуконечный вес на алгебре Неймана. Наличие такой меры выделяет класс состояний, допустимых для системы: это нормальные состояния, мажорируемые с точностью до скалярного множителя весом φ. Реализация алгебры как алгебры, действующей в гильбертовом пространстве представления индуцированного весом, позволяет реализовать все нормальные состояния векторными состояниями. В частности, допустимые состояния описываются единичными векторами из линеала веса D_φ.

Общеизвестны трудности, которые возникают при введении неограниченных наблюдаемых. Они столь серьезны, что математический формализм понятия неограниченной наблюдаемой до сих пор не установился. Идея включения понятия б. ф. в математический формализм квантовых систем не нова. Трудности, которые сопутствуют такому включению, связаны с отсутствием спектральной теоремы для б. ф. Это уже делает невозможным последовательное развитие исчисления вероятностей для наблюдаемых. Возможности, которые открываются в связи с наличием теории интегрирования для б. ф., еще подлежат изучению. Феноменологический аспект теории интегрируемых б. ф. — это теория средних значений (ожиданий) наблюдаемых. Для интегрируемой б. ф. a величины $a(f, f)$ $(f \in D_\varphi)$ — суть средние значения соответствующей наблюдаемой в допустимых состояниях $((\cdot)f, f)$ $(f \in D_\varphi)$. Как и в традиционной феноменологии, наблюдаемая задана, если известны все

ее средние значения в допустимых состояниях. Двойственное описание пространства интегрируемых б. ф. как пространства, предвойственного к алгебре, также согласуется с двойственной ролью наблюдаемых и состояний в традиционной феноменологии. Отметим также смысл выделения класса допустимых состояний указанным выше способом: все наблюдаемые, обладающие ожиданием относительно доминирующей меры φ, обладают ожиданием в любом из допустимых состояний.

Сделаем в заключение примечания, имеющие отношение к истории обсуждаемой в данной статье проблемы. Идея включения понятия б. ф. в основной аппарат общей теории интегрирования в алгебрах операторов, по-видимому, впервые выдвинута в работе [3]. Задача содержательного описания некоммутативного аналога пространства L_1 для случая алгебры всех ограниченных операторов была решена в работе [4]. Для нормальных состояний на алгебре Неймана соответствующая задача решена в 1972 г. [5] [1]. Независимо попытка построения некоммутативного аналога пространства L_1, ассоциированного с весом, была предпринята японским математиком Иноу [7]. Метод Иноу основан на идее перенесения на веса сигаловской нормы

$$x \to \sup_{\|y\| \leqslant 1,\, y \in \mathfrak{M}_\tau} |\tau(yx)| \quad (x \in \mathfrak{M}_\tau).$$

В случае точного нормального полуконечного веса φ для этого необходимо сузить $\mathfrak{M}_\varphi$ так, чтобы соответствующее выражение имело смысл. Этому требованию отвечает в случае стандартной алгебры Неймана многообразие $l_\varphi = \pi(\mathfrak{B}^2)$, где $\mathfrak{B}$ — модулярная гильбертова алгебра, эквивалентная соответствующей обобщенной гильбертовой алгебре $\mathfrak{A}$. Тогда функция

$$x \to \sup_{\|y\| \leqslant 1,\, y \in l_\varphi} |\varphi(yx)| \quad (x \in l_\varphi) \tag{19}$$

является нормой на l_φ, и можно рассмотреть пополнение l_φ по этой норме. Однако, Иноу не занимался задачей содержательного описания своего пространства L_1; оно у него состоит просто из фундаментальных последовательностей операторов из l_φ относительно нормы (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. Голодец В. Я. Условные ожидания и модулярные автоморфизмы неймановских алгебр. Функц. анализ и его прилож., т. 6, вып. 3, 1972, с. 68—69.

2. Трунов Н. В., Шерстнев А. Н. К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса, I. Изв. вузов. Матем., 1978, № 7, с. 79—88.

3. Шерстнев А. Н. О представлении мер, заданных на ортопроекторах пространства Гильберта, билинейными формами. Изв. вузов. Матем., 1970, № 9, с. 90—97.

4. Шерстнев А. Н. Общая схема интеграла относительно мер, заданных на ортопроекторах пространства Гильберта. В сб. „Вероятностные методы и кибернетика". Изд. Казанск. ун-та, 1971, вып. 9, с. 108—119.

5. Шерстнев А. Н. К общей теории состояний на алгебрах фон Неймана. Функц. анализ и его прилож., т. 8, вып. 3, 1974, с. 89—90.

[1] В 1972 г. упомянутая работа получена редакцией журнала „Функциональный анализ и его приложения".

6. Connes A. Une classification des facteurs de type III. Ann. Sci. Ecole norm. super., 6, 1973, p. 133—252.
7. Inoue A. L^1-space associated with a weight. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., A27, № 2, 1973, p. 291—308.
8. Sakai S. C^*-algebras and W^*-algebras. Springer-Verlag, 1971.
9. Takesaki M. Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications. Lect. Notes Math., v. 128, 1970.
10. Takesaki M. Conditional expectations in von Neumann algebras. J. Funct. Analysis, v. 9, № 3, 1972, p. 306—321.
11. Tomiyama J. On the projection of norm one in W^* — algebras. Proc. Jap. Acad., v. 33, № 10, 1957, p. 608—612.

г. Казань

Поступила
1 XI 1977