ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2017, том 57, № 3, с. 429–447

УДК 517.956

Памяти С.И. Похожаева посвящается

ОБ ЭНТРОПИЙНОМ РЕШЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА–ОРЛИЧА

© 2017 г. Л. М. Кожевникова

(453103 Стерлитамак, ул. Ленина, 49, СФ БашГУ;
423604 Елабуга, ул. Казанская, 89, Елабужский ин-т КФУ)
e-mail: kosul@mail.ru

Поступила в редакцию 26.07.2016 г.

Для некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений с L_1-правой частью в произвольных неограниченных областях рассматривается задача Дирихле с неоднородным граничным условием. Доказаны существование и единственность энтропийного решения в анизотропных пространствах Соболева–Орлича. Библ. 17.

Ключевые слова: анизотропное эллиптическое уравнение, энтропийное решение, единственность решения, существование решения, пространство Соболева–Орлича, N-функции.

DOI: 10.7868/S0044466917030103

ВВЕДЕНИЕ

Пусть Ω – произвольная область пространства $\mathbb{R}^n = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $n \geq 2$. Рассматривается задача Дирихле для уравнения вида

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,\nabla u))_{x_i} = a_0(x,u) \tag{0.1}$$

с неоднородным краевым условием

$$u(x)|_{\partial\Omega} = \psi(x)|_{\partial\Omega}. \tag{0.2}$$

Модельным примером уравнений (0.1) служит уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{n}(B_i'(u_{x_i}))_{x_i} = f(x), \quad f \in L_1(\Omega), \tag{0.3}$$

где B_i – N-функции, удовлетворяющие Δ_2-условию (см. разд. 1).

С 80-х годов прошлого столетия ведутся активные исследования нелинейных эллиптических уравнений второго порядка вида

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,u,\nabla u))_{x_i} - a_0(x,u,\nabla u) = f(x) \tag{0.4}$$

с $f \in L_1$ и мерами в качестве правых частей. Слабые решения уравнений вида (0.4) со степенными нелинейностями во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ с $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ исследовались в [1]–[3]. Существование слабого решения задачи Дирихле в ограниченной области Ω с функцией $f \in L_1(\Omega)$ установлено в [4] и [5].

В [6], [7] для эллиптических уравнений со степенными нелинейностями с L_1-правой частью было предложено понятие энтропийного решения задачи Дирихле и доказаны его существование и единственность. Свойства суммируемости и оценки энтропийных решений задачи Дирихле для нелинейного эллиптического уравнения (0.4) с условием вырождающейся коэрцитивности установлены в [8].

Изучению существования энтропийных решений задачи Дирихле в пространствах Орлича для эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями второго порядка с $f \in L_1(\Omega)$ (Ω – ограниченная область) посвящена статья [9].

Для уравнений с L_1-правыми частями или мерами в качестве правых частей введено также понятие ренормализованного решения. Такие решения являются элементами того же функционального класса, которому принадлежат энтропийные решения, но в отличие от последних удовлетворяют другому семейству интегральных соотношений. В ряде случаев понятия энтропийного и ренормализованного решения эквивалентны. Вопросы существования и единственности ренормализованных решений эллиптических задач в пространствах Орлича исследовались в [10], [11].

Следует заметить, что в известных автору работах результаты установлены для энтропийных и ренормализованных решений эллиптических задач в ограниченных областях (за исключением статьи [6]) с однородными граничными условиями.

В настоящей статье доказаны теоремы существования и единственности энтропийного решения задачи Дирихле (0.1), (0.2) в анизотропных пространствах Соболева–Орлича для произвольной неограниченной области Ω.

1. N-ФУНКЦИИ И ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА

Неотрицательная непрерывная выпуклая вниз функция $B(z)$, $z \in \mathbb{R}$, называется *N-функцией*, если она четна и удовлетворяет предельным соотношениям

$$\lim_{z\to 0} B(z)/z = 0, \quad \lim_{z\to\infty} B(z)/z = \infty.$$

Отметим, что $B(\varepsilon z) \le \varepsilon B(z)$, $z \in \mathbb{R}$, при $0 < \varepsilon \le 1$.

N-функция

$$\overline{B}(z) = \sup_{y\ge 0}(y|z| - B(y)), \quad z \in \mathbb{R},$$

называется *дополнительной* к N-функции $B(z)$. Очевидно неравенство Юнга:

$$|zy| \le B(y) + \overline{B}(z), \quad z, y \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Кроме того, имеет место равенство

$$zB'(z) = \overline{B}(B'(z)) + B(z), \quad z \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

где $B'(z)$ — правая производная N-функции $B(z)$.

N-функция $B(z)$ растет существенно быстрее N-функции $M(z)$ ($M(z) \prec\prec B(z)$), если для любого числа $l > 0$ имеет место соотношение

$$\lim_{z\to\infty} M(z)/B(lz) = 0.$$

Говорят, что N-функция $B(z)$ удовлетворяет Δ_2-условию при больших значениях z, если существуют такие числа $c > 0$, $z_0 \ge 0$, что $B(2z) \le cB(z)$ для любых $|z| \ge z_0$. Δ_2-условие эквивалентно выполнению при $|z| \ge z_0$ неравенства

$$B(lz) \le c(l)B(z), \tag{1.3}$$

где l – любое число, большее единицы, $c(l) > 0$.

N-функция $B(z)$ удовлетворяет Δ_2-условию тогда и только тогда, когда существуют числа $c > 1$, $z_0 \ge 0$ такие, что при $|z| \ge z_0$ справедливо неравенство

$$zB'(z) \le cB(z), \tag{1.4}$$

(см. [12, гл. I, § 4, теорема 4.1]). В дальнейшем в работе предполагается, что Δ_2-условие для рассматриваемых N-функций выполняется при всех значениях $z \in \mathbb{R}$ (т.е. $z_0 = 0$).

Для N-функции $B(z)$, ввиду выпуклости и неравенства (1.3), существует $c > 0$ такое, что справедливо неравенство

$$B(y+z) \le cB(z) + cB(y), \quad z, y \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Пусть Q — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n$. Будем рассматривать пространство Орлича $L_B(Q)$ с нормой Люксембурга

$$\|v\|_{B,Q} = \inf\left\{k > 0 | \int\limits_Q B\left(v(x)/k\right)dx \le 1\right\}.$$

Справедливы неравенства (см. [12. II, § 9, неравенства (9.21), (9.12)])

$$\int\limits_Q B\left(v(x)/\|v\|_{B,Q}\right)dx \le 1, \tag{1.6}$$

$$\|v\|_{B,Q} \le \int\limits_Q B(v)dx + 1. \tag{1.7}$$

Норму в пространствах $L_p(Q)$, $p \in [1,\infty)$, будем обозначать через $\|\cdot\|_{p,Q}$. Индекс $Q = \Omega$ в обозначениях $\|\cdot\|_{p,Q}$, $\|\cdot\|_{B,Q}$ будет опускаться. Для любой N-функции $B(z)$, если $\operatorname{mes}Q < \infty$, то $L_B(Q) \subset L_1(Q)$ и выполнено неравенство

$$\|v\|_{1,Q} \le A_0(\operatorname{mes}Q)\|v\|_{B,Q}, \quad v \in L_B(Q). \tag{1.8}$$

Для N-функций $B_1(z), \ldots, B_n(z)$ определим анизотропное пространство Соболева–Орлича $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)$ как пополнение $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|v\|_{\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)} = \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{B_i,Q}.$$

Положим $h(\theta) = \left(\prod_{i=1}^n B_i^{-1}(\theta)/\theta\right)^{\frac{1}{n}}$ и будем предполагать, что интеграл $\int_0^1 h(\theta)/\theta d\theta$ сходится. Тогда можно определить N-функцию $B_*^{-1}(z)$ по формуле

$$B_*^{-1}(z) = \int\limits_0^{|z|} h(\theta)/\theta d\theta.$$

Приведем теорему вложения из [13].

Лемма 1. *Пусть* $v \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)$.

1) *Если*

$$\int\limits_1^\infty h(\theta)/\theta d\theta = \infty, \tag{1.9}$$

то $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q) \subset L_{B_*}(Q)$ *и*

$$\|v\|_{B_*,Q} \le A_1\|v\|_{\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)}; \tag{1.10}$$

2) *если*

$$\int\limits_1^\infty h(\theta)/\theta d\theta < \infty,$$

то $\overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{B}}(Q) \subset L_\infty(Q)$ *и*

$$\|v\|_{\infty,Q} \le A_2 \|v\|_{\overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{B}}(Q)},$$

где $A_1 = \dfrac{n-1}{n}$, $A_2 = \int\limits_0^\infty h(\theta)/\theta d\theta$.

2. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть N-функции $B_1(z), \ldots, B_n(z)$ и дополнительные к ним $\overline{B}_1(z), \ldots, \overline{B}_n(z)$ подчиняются Δ_2-условию.

Через $L_{\mathrm{B}}(\Omega)$ обозначим пространство $L_{B_1}(\Omega) \times \ldots \times L_{B_n}(\Omega)$ с нормой

$$\|v\|_{\mathrm{B}} = \|v_1\|_{B_1} + \ldots + \|v_n\|_{B_n}, \quad v = (v_1, \ldots, v_n) \in L_{\mathrm{B}}(\Omega).$$

Аналогично определяется пространство $L_{\overline{\mathrm{B}}}(\Omega)$. Будем считать, что $\psi(x) \in L_\infty(\Omega)$, $\nabla\psi \in L_{\mathrm{B}}(\Omega)$.

Через $s \cdot t$ обозначим скалярное произведение $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_n)$, $\mathrm{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ и

$$a(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = (a_1(\mathrm{x}, \mathrm{s}), \ldots, a_n(\mathrm{x}, \mathrm{s})).$$

Приведем условия на функции, входящие в уравнение (0.1). Предполагается, что функции $a_i(\mathrm{x}, \mathrm{s})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $a_0(\mathrm{x}, s_0)$ непрерывны по $s_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{s} \in \mathbb{R}^n$ и измеримы по $x \in \Omega$. Функция $a_0(\mathrm{x}, s_0)$ неубывающая по $s_0 \in \mathbb{R}$.

Пусть существуют неотрицательные функции $\phi(\mathrm{x})$, $\Phi(\mathrm{x}) \in L_1(\Omega)$ и положительные константы $\hat{a}$, $\overline{a}$ такие, что при почти всех $\mathrm{x} \in \Omega$ и всех $\mathrm{s}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}^n$ $\mathrm{s} \ne \mathrm{t}$, справедливы неравенства

$$\overline{\mathrm{B}}(a(\mathrm{x}, \mathrm{s})) \le \Phi(\mathrm{x}) + \hat{a}\mathrm{B}(\mathrm{s}), \quad \overline{\mathrm{B}}(a) = \sum_{i=1}^n \overline{B}_i(a_i), \quad \mathrm{B}(\mathrm{s}) = \sum_{i=1}^n B_i(s_i); \tag{2.1}$$

$$(a(\mathrm{x}, \mathrm{s}) - a(\mathrm{x}, \mathrm{t})) \cdot (\mathrm{s} - \mathrm{t}) > 0; \tag{2.2}$$

$$a(\mathrm{x}, \mathrm{s}) \cdot \mathrm{s} \ge \overline{a}\mathrm{B}(\mathrm{s}) - \phi(\mathrm{x}). \tag{2.3}$$

Сформулируем дополнительные условия, которые используются в теореме существования. Положим $a_0(\mathrm{x}, s_0) = a_0(\mathrm{x}, \psi) + b(\mathrm{x}, s_0)$. Будем считать, что

$$a_0(\mathrm{x}, \psi) \in L_1(\Omega). \tag{2.4}$$

Функция $b(\mathrm{x}, s_0)$ удовлетворяет условию Каратеодори, неубывающая по $s_0 \in \mathbb{R}$, $b(\mathrm{x}, \psi) = 0$ для почти всех $\mathrm{x} \in \Omega$, поэтому для почти всех $\mathrm{x} \in \Omega$, $s_0 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$b(\mathrm{x}, s_0)(s_0 - \psi) \ge 0. \tag{2.5}$$

Предположим, что

$$\sup_{|s_0| \le k} |b(\mathrm{x}, s_0)| = G_k(\mathrm{x}) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega). \tag{2.6}$$

Кроме того, потребуем существования $\delta_0 > 0$ такого, что

$$b(\mathrm{x}, \psi \pm \delta_0) \in L_1(\Omega). \tag{2.7}$$

Определим функцию

$$T_k(r) = \begin{cases} k, & r > k, \\ r, & |r| \le k, \\ -k, & r < -k. \end{cases}$$

Введем обозначение $\langle uv \rangle = \int_\Omega uv dx$.

Определение 1. *Энтропийным решением задачи* (0.1), (0.2) называется измеримая функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ такая, что

$$1)\quad A_0(\mathrm{x}) = a_0(\mathrm{x}, u) \in L_1(\Omega);$$

$$2)\quad T_k(u - \psi) \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{B}}(\Omega) \quad \text{при всех} \quad k > 0;$$

при всех $k > 0$, $\xi(\mathrm{x}) \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\langle a_0(\mathrm{x}, u) T_k(u - \psi - \xi) \rangle + \langle a(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - \psi - \xi) \rangle \le 0. \tag{2.8}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1.9), (2.1)–(2.3). *Тогда энтропийное решение задачи* (0.1), (0.2) *единственно.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1.9), (2.1)–(2.7). *Тогда существует энтропийное решение задачи* (0.1), (0.2).

3. ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Все постоянные, встречающиеся ниже в работе, положительны.

Рассмотрим функции Каратеодори $a_{i\psi}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = a_i(\mathrm{x}, \mathrm{s} + \nabla\psi(\mathrm{x}))$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{0\psi}(\mathrm{x}, s_0) = a_0(\mathrm{x}, s_0 + \psi(\mathrm{x}))$, $\mathrm{x} \in \Omega$, $s_0 \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^n$. Функция $a_{0\psi}(\mathrm{x}, s_0)$ неубывающая по s_0. Применяя (2.2), (2.1), (1.5), для вектор-функции $a_\psi(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = (a_{1\psi}(\mathrm{x}, \mathrm{s}), \ldots, a_{n\psi}(\mathrm{x}, \mathrm{s}))$ при почти всех $\mathrm{x} \in \Omega$ и любых $\mathrm{s}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{s} \ne \mathrm{t}$ выводим неравенства

$$(a_\psi(\mathrm{x}, \mathrm{s}) - a_\psi(\mathrm{x}, \mathrm{t})) \cdot (\mathrm{s} - \mathrm{t}) > 0, \tag{2.2'}$$

$$\overline{\mathrm{B}}(a_\psi(\mathrm{x}, \mathrm{s})) = \overline{\mathrm{B}}(a(\mathrm{x}, \mathrm{s} + \nabla\psi(\mathrm{x}))) \le \Phi(\mathrm{x}) + \hat{a}\mathrm{B}(\mathrm{s} + \nabla\psi(\mathrm{x})) \le \Phi(\mathrm{x}) + c\hat{a}\mathrm{B}(\nabla\psi(\mathrm{x})) + c\hat{a}\mathrm{B}(\mathrm{s}).$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$\overline{\mathrm{B}}(a_\psi(\mathrm{x}, \mathrm{s})) \le \Phi_\psi(\mathrm{x}) + \hat{a}_\psi \mathrm{B}(\mathrm{s}). \tag{2.1'}$$

Используя (2.3), (1.5), (2.1') для почти всех $\mathrm{x} \in \Omega$ и всех $\mathrm{s} \in \mathbb{R}^n$, получаем неравенства

$$a_\psi(\mathrm{x}, \mathrm{s}) \cdot \mathrm{s} = a(\mathrm{x}, \mathrm{s} + \nabla\psi(\mathrm{x})) \cdot \mathrm{s} \ge a_\psi(\mathrm{x}, \mathrm{s}) \cdot \nabla\psi + \overline{a}\mathrm{B}(\mathrm{s} + \nabla\psi) - \phi(\mathrm{x}) \ge$$
$$\ge -\varepsilon\overline{\mathrm{B}}(a_\psi(\mathrm{x}, \mathrm{s})) - (C(\varepsilon) + \overline{a})\mathrm{B}(\nabla\psi(\mathrm{x})) + \overline{a}/c\,\mathrm{B}(\mathrm{s}) - \phi(\mathrm{x}) \ge (\overline{a}/c - \varepsilon\hat{a}_\psi)\mathrm{B}(\mathrm{s}) -$$
$$- (C(\varepsilon) + \overline{a})\mathrm{B}(\nabla\psi(\mathrm{x})) - \varphi(\mathrm{x}) - \varepsilon\Phi_\psi(\mathrm{x}).$$

Выбирая $\varepsilon < \overline{a}/(c\hat{a}_\psi)$, устанавливаем неравенство

$$a_\psi(\mathrm{x}, \mathrm{s}) \cdot \mathrm{s} \ge \overline{a}_\psi \mathrm{B}(\mathrm{s}) - \phi_\psi(\mathrm{x}). \tag{2.3'}$$

Очевидно, что $\phi_\psi(\mathrm{x}), \Phi_\psi(\mathrm{x}) \in L_1(\Omega)$ – неотрицательные функции.

Положим $a_{0\psi}(\mathrm{x}, s_0) = a_0(\mathrm{x}, \psi) + b(\mathrm{x}, s_0 + \psi) = a_{0\psi}(\mathrm{x}, 0) + b_\psi(\mathrm{x}, s_0)$. Согласно (2.4), имеем

$$A^0_{0\psi}(\mathrm{x}) = a_{0\psi}(\mathrm{x}, 0) \in L_1(\Omega). \tag{2.4'}$$

Функция $b_\psi(\mathrm{x}, s_0)$ каратеодориева, неубывающая по $s_0 \in \mathbb{R}$, $b_\psi(\mathrm{x}, 0) = 0$ для почти всех $\mathrm{x} \in \Omega$, поэтому для почти всех $\mathrm{x} \in \Omega$, $s_0 \in \mathbb{R}$

$$b_\psi(\mathrm{x}, s_0)s_0 \ge 0. \tag{2.5'}$$

Из (2.6) имеем

$$\sup_{|s_0| \le k} |b_\psi(\mathrm{x}, s_0)| \le \sup_{|s_0 + \psi| \le k + \|\psi\|_\infty} |b(\mathrm{x}, s_0 + \psi)| = G_{k + \|\psi\|_\infty}(\mathrm{x}) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega). \tag{2.6'}$$

Наконец, из (2.7) следует, что существует $\delta_0 > 0$ такое, что

$$b_\psi(\mathrm{x}, \pm\delta_0) \in L_1(\Omega). \tag{2.7'}$$

Пусть u – энтропийное решение задачи (0.1), (0.2). Положив $w = u - \psi$, определение 1 можно переписать следующим образом.

Определение 1'. *Энтропийным решением задачи* (0.1), (0.2) называется измеримая функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ такая, что $u(\mathrm{x}) = w(\mathrm{x}) + \psi(\mathrm{x})$ и выполнены условия

$$1')\quad A_{0\psi}(\mathrm{x}) = a_{0\psi}(\mathrm{x}, w) \in L_1(\Omega);$$

$$2')\quad T_k(w) \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{B}}(\Omega) \quad \text{при всех} \quad k > 0;$$

при всех $k > 0$, $\xi(\mathrm{x}) \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\left\langle a_{0\psi}(\mathrm{x}, w) T_k(w - \xi)\right\rangle + \left\langle a_\psi(\mathrm{x}, \nabla w) \cdot \nabla T_k(w - \xi)\right\rangle \le 0. \tag{2.8'}$$

Пусть $\chi(P)$ обозначает логическую функцию, равную 1, когда P истинно, и 0, когда P ложно.

Из условия 2' определения энтропийного решения следует, что для любого $k > 0$

$$\chi\left(|w| < k\right) \nabla w \in \mathrm{L}_{\mathrm{B}}(\Omega). \tag{3.1}$$

Отсюда, применяя (2.1'), устанавливаем, что для любого $k > 0$

$$\chi(|w| < k) a_\psi(\mathrm{x}, \nabla w) \in \mathrm{L}_{\overline{\mathrm{B}}}(\Omega). \tag{3.2}$$

Лемма 2. *Если* $u = w + \psi$ — *энтропийное решение задачи* (0.1), (0.2), *то для всех* $k \ge 1$ *справедливо неравенство*

$$\left\|\mathrm{B}(\nabla T_k w)\right\|_1 = \int\limits_{\{\Omega : |w| < k\}} \mathrm{B}(\nabla w) d\mathrm{x} \le C_1 k. \tag{3.3}$$

Доказательство. Согласно неравенству (2.8') и условию 1' для $\xi = 0$ имеем

$$\int\limits_{\{\Omega : |w| < k\}} a_\psi(\mathrm{x}, \nabla w) \cdot \nabla w d\mathrm{x} = \int\limits_\Omega a_\psi(\mathrm{x}, \nabla w) \cdot \nabla T_k(w) d\mathrm{x} \le -\int\limits_\Omega a_{0\psi}(\mathrm{x}, w) T_k(w) d\mathrm{x} \le k \left\|A_{0\psi}\right\|_1.$$

Применяя неравенство (2.3'), устанавливаем, что

$$\overline{a}_\psi \int\limits_{\{\Omega : |w| < k\}} \mathrm{B}(\nabla w) d\mathrm{x} \le k \left\|A_{0\psi}\right\|_1 + \left\|\varphi_\psi\right\|_1.$$

Лемма 3. *Пусть выполнено условие* (1.9) *и для измеримой функции* $v : \Omega \to \mathbb{R}$ *такой, что* $T_k v \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$ *при всех* $k \ge 1$ *и справедливо неравенство*

$$\left\|\mathrm{B}(\nabla T_k v)\right\|_1 = \int\limits_{\{\Omega : |v| < k\}} \mathrm{B}(\nabla v) d\mathrm{x} \le C_2 k, \tag{3.4}$$

тогда верно следующее:

$$\operatorname{mes}(\{\Omega : |v| \ge k\}) \to 0, \quad k \to \infty. \tag{3.5}$$

Доказательство. Для N-функции $\overline{B}$, удовлетворяющей Δ_2-условию, справедливо соотношение

$$\lim_{\|\omega\|_B \to \infty} \left\|B(\omega)\right\|_1 / \left\|\omega\right\|_B = \infty \tag{3.6}$$

(см. [14, лемма 3.14]).

По неравенствам (1.10), (3.4), с учетом (3.6), имеем

$$\left\|T_k v\right\|_{B_*} \le A_1 \left\|\nabla T_k v\right\|_{\mathrm{B}} \le A_1 \varepsilon(k) \left\|\mathrm{B}(\nabla T_k v)\right\|_1 \le C_3 k \varepsilon(k), \quad k \ge 1, \tag{3.7}$$

$\varepsilon(k) \to 0$ при $k \to \infty$.

Неравенство (3.7) установлено при условии $\left\|\nabla T_k v\right\|_{\mathrm{B}} \to \infty$ и $k \to \infty$. В противном случае $\left\|\nabla T_k v\right\|_{\mathrm{B}} \le C_4 = C_4 k \varepsilon(k)$, $k > 0$, поэтому неравенство (3.7) также справедливо.

Из (3.7) имеем

$$B_*\left(\frac{k}{\left\|T_k v\right\|_{B_*}}\right) \ge B_*\left(\frac{1}{C_3 \varepsilon(k)}\right) \to \infty, \quad k \to \infty. \tag{3.8}$$

Далее, применяя (1.6), получаем

$$1 \geq \int_{\Omega} B_*\left(\frac{T_k v}{\|T_k v\|_{B_*}}\right) d\text{x} \geq B_*\left(\frac{k}{\|T_k v\|_{B_*}}\right) \operatorname{mes}(\{\Omega : |v| \geq k\}).$$

Пользуясь (3.8), из последнего неравенства выводим (3.5).

Замечание 1. Если $u = w + \psi$ – энтропийное решение задачи (0.1), (0.2) и выполнено условие (1.9), то из лемм 2, 3 следует, что

$$\operatorname{mes}(\{\Omega : |w| \geq k\}) \to 0, \quad k \to \infty. \tag{3.9}$$

Лемма 4. *Пусть выполнено условие* (1.9) *и для измеримой функции* $v : \Omega \to \mathbb{R}$ *такой, что* $T_k v \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$ *при всех* $k \geq 1$ *и справедливо неравенство* (3.4), *верно, что*

$$\operatorname{mes}(\{\Omega : \mathrm{B}(\nabla v) \geq \rho\}) \to 0, \quad \rho \to \infty. \tag{3.10}$$

Доказательство. Положим $\Phi(k,\rho) = \operatorname{mes}\{\Omega : |v| \geq k,\ \mathrm{B}(\nabla v) \geq \rho\},\ k,\rho > 0$. Выше установлено (см. (3.5)), что

$$\Phi(k,0) \to 0, \quad k \to \infty.$$

Поскольку функция $\rho \to \Phi(k,\rho)$ невозрастающая, то для $k,\rho > 0$ справедливы неравенства

$$\Phi(0,\rho) \leq \frac{1}{\rho}\int_0^{\rho} \Phi(0,\varrho)d\varrho \leq \Phi(k,0) + \frac{1}{\rho}\int_0^{\rho}(\Phi(0,\varrho) - \Phi(k,\varrho))d\varrho. \tag{3.11}$$

Отметим, что

$$\Phi(0,\varrho) - \Phi(k,\varrho) = \operatorname{mes}\{\Omega : |v| < k,\ \mathrm{B}(\nabla v) \geq \varrho\}.$$

Поэтому из (3.4) следует, что

$$\int_0^{\infty}(\Phi(0,\varrho) - \Phi(k,\varrho))d\varrho = \int_{\{\Omega : |v| < k\}} \mathrm{B}(\nabla v)d\text{x} \leq C_2 k.$$

Теперь из (3.11) получаем неравенство

$$\Phi(0,\rho) \leq \Phi(k,0) + C_2 k/\rho.$$

Выбирая k так, чтобы $\Phi(k,0) < \varepsilon$, затем выбирая ρ, добиваемся неравенства $\Phi(0,\rho) < 2\varepsilon$. Тем самым (3.10) установлено.

Лемма 5. *Пусть* N*-функция* $\overline{B}(z)$ *удовлетворяет* Δ_2*-условию,* $v^m(x), m = 1, \ldots, \infty$*,* $v(x)$ *– такие функции из* $L_B(\Omega)$*, что*

$$\|v^m\|_B \leq C, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$$v^m \to v, \quad m \to \infty, \quad \text{п.в. в} \quad \Omega,$$

тогда $v^m \rightharpoonup v$ *при* $m \to \infty$ *слабо в* $L_B(\Omega)$.

Доказательство леммы 5 для $B(z) = |z|^a$, $a > 1$, проведено в [15, гл. I, § 1.4, лемма 1.3], для N-функции $B(z)$ осуществляется аналогичным образом.

Лемма 6. *Если* $u = w + \psi$ *является энтропийным решением задачи* (0.1), (0.2), *то неравенство* (2.8') *справедливо для любой функции* $\xi \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$.

Доказательство. По определению пространства $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$ существует последовательность $\xi^m \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $\nabla\xi^m \to \nabla\xi$ в $L_{\mathrm{B}}(\Omega)$ при $m \to \infty$. Отсюда, согласно (1.10), (1.8), следует сходимость $\xi^m \to \xi$, $\nabla\xi^m \to \nabla\xi$ в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ при $m \to \infty$, а значит, можно выделить подпоследовательность (обозначим ее так же) такую, что $\xi^m \to \xi$, $\nabla\xi^m \to \nabla\xi$ почти всюду в Ω. Тогда для любого $k > 0$ имеют место сходимости

$$T_k(w-\xi^m) \to T_k(w-\xi), \quad \nabla T_k(w-\xi^m) \to \nabla T_k(w-\xi) \quad \text{п.в. в} \quad \Omega \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{3.12}$$

Пусть $\hat{k} = k + \sup\limits_{m=1,2,\ldots}\left(\|\xi^m\|_\infty, \|\xi\|_\infty\right)$, тогда

$$\left|\nabla T_k(w-\xi^m)\right| \le \left|\nabla T_{\hat{k}}(w)\right| + \left|\nabla\xi^m\right|, \quad x \in \Omega, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Поскольку сходящаяся последовательность $\nabla\xi^m$ ограничена в $L_{\mathrm{B}}(\Omega)$, то отсюда, согласно (3.1), следует ограниченность норм $\left\|\nabla T_k(w-\xi^m)\right\|_{\mathrm{B}}$. Применяя (3.12), пользуясь леммой 5, при любом $k > 0$ имеем

$$\nabla T_k(w-\xi^m) \rightharpoonup \nabla T_k(w-\xi) \quad \text{в } L_{\mathrm{B}}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{3.13}$$

Теперь перейдем к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве

$$\int\limits_\Omega a_{0\psi}(x,w)T_k(w-\xi^m)d\mathrm{x} + \int\limits_\Omega a_\psi(\mathrm{x},\nabla w)\cdot\nabla T_k(w-\xi^m)d\mathrm{x} \le 0.$$

Поскольку $a_{0\psi}(\mathrm{x},w) \in L_1(\Omega)$, то в первом слагаемом, применяя (3.12), согласно теореме Лебега, можно перейти к пределу при $m \to \infty$. Ввиду того что $a_\psi(\mathrm{x},\nabla w)\chi(|w| < \hat{k}) \in L_{\overline{\mathrm{B}}}(\Omega)$ (см. (3.2)), применяя (3.13), устанавливаем, что второе слагаемое последнего неравенства также имеет предел при $m \to \infty$.

Замечание 2. В дальнейшем, чтобы избежать громоздкости в рассуждениях, вместо утверждения типа "из последовательности u^m можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду в Ω при $m \to \infty$", будем писать просто "последовательность u^m выборочно сходится почти всюду в Ω при $m \to \infty$". Соответственно, будем использовать термин "выборочно слабо сходится" и т.п.

Обозначим через $\mathcal{F}$ класс функций $T \in C^2(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$ таких, что

$$T(0) = 0; \quad T'(r) \ge 0, \quad r \in \mathbb{R}; \quad T'(r) = 0, \quad |r| \ge k;$$

$$T(-r) = -T(r), \quad r \in \mathbb{R}; \quad T''(r) \le 0, \quad r \ge 0.$$

Лемма 7. *Энтропийное решение* $u = w + \psi$ *задачи* (0.1), (0.2) *удовлетворяет неравенству*

$$\int\limits_\Omega \left(a_{0\psi}T(w-\xi) + a_\psi\cdot\nabla T(w-\xi)\right)d\mathrm{x} \le 0 \tag{2.8''}$$

при любом $\xi \in C_0^1(\Omega)$ *и всех* $T \in \mathcal{F}$.

Доказательство. Очевидно, что (2.8'') выполнено при $T(r) = \sum a_j T_{k_j}(r)$, $a_j \ge 0$. В общем случае приближаем функции $T \in \mathcal{F}$ такими линейными комбинациями в норме $C^1(\mathbb{R})$ (см. [6, лемма 3.2]).

Лемма 8. *Пусть* Q *— ограниченная область, выполнено условие* (1.9) *и* $M(z) \prec\prec B_*(z)$. *Тогда оператор вложения* $\mathring{H}_{\mathrm{B}}^1(Q) \subset L_M(Q)$ *вполне непрерывен* (см. [16, лемма 4]).

Лемма 9. *Пусть* (X, T, mes) *измеримое пространство такое, что* $\mathrm{mes}(X) < \infty$. *Пусть* $\gamma : X \to [0, +\infty]$ *— измеримая функция такая, что* $\mathrm{mes}(\{x \in X : \gamma(\mathrm{x}) = 0\}) = 0$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что неравенство*

$$\int\limits_Q \gamma(x)d\mathrm{x} \le \delta$$

влечет неравенство $\mathrm{mes}(Q) \le \varepsilon$ (см. [4, лемма 2]).

4. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим функцию $T_{k,h}(r) = T_k(r - T_h(r))$. Очевидно, что

$$T_{k,h}(r) = \begin{cases} 0, & |r| < h, \\ r - h\operatorname{sign} r, & h \le |r| < k + h, \\ k\operatorname{sign} r, & |r| \ge k + h. \end{cases}$$

Пусть $u = w + \psi$ – энтропийное решение задачи (0.1), (0.2), положим в (2.8') $\xi = T_h(w) \in L_\infty(\Omega)$, $\xi \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$. Имеем

$$\int_\Omega a_\psi \cdot \nabla T_{k,h} w d\mathrm{x} = \int_{\{\Omega: h \le |w| < k+h\}} a_\psi \cdot \nabla w d\mathrm{x} \le -\int_\Omega a_{0\psi}(\mathrm{x}, w) T_{k,h} w d\mathrm{x} \le k \int_{\{\Omega: h \le |w|\}} |A_{0\psi}| d\mathrm{x}.$$

Применяя (2.3'), выводим

$$\overline{a}_\psi \int_{\{\Omega: h \le |w| < k+h\}} \mathrm{B}(\nabla w) d\mathrm{x} \le k \int_{\{\Omega: h \le |w|\}} |A_{0\psi}| d\mathrm{x} + \int_{\{\Omega: h \le |w| < h+k\}} \phi_\psi d\mathrm{x}. \tag{4.1}$$

Отсюда, ввиду того что $A_{0\psi}, \phi_\psi \in L_1(\Omega)$, учитывая (3.9), следует, что правая часть в (4.1) стремится к нулю при $h \to \infty$.

Доказательство теоремы 1. Пусть u^1, u^2 – энтропийные решения задачи (0.1), (0.2). Положим $w^1 = u^1 - \psi$, $w^2 = u^2 - \psi$. Обозначим $A^i_\psi(\mathrm{x}) = a_\psi(\mathrm{x}, \nabla w^i(\mathrm{x}))$, $A^i_{0\psi}(\mathrm{x}) = a_{0\psi}(\mathrm{x}, w^i(\mathrm{x}))$, $i = 1, 2$. В неравенстве (2.8') для w^1 положим $\xi = T_h w^2$, а для w^2 $\xi = T_h w^1$. Сложив интегральные неравенства, получим

$$\begin{aligned} I = \int_{\Omega^1} A^1_\psi \cdot \nabla(w^1 - T_h w^2) d\mathrm{x} + \int_{\Omega^2} A^2_\psi \cdot \nabla(w^2 - T_h w^1) d\mathrm{x} \le \\ \le -\int_\Omega A^1_{0\psi} T_k(w^1 - T_h w^2) d\mathrm{x} - \int_\Omega A^2_{0\psi} T_k(w^2 - T_h w^1) d\mathrm{x} = J, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где $\Omega^1(k, h) = \{\mathrm{x} \in \Omega \mid |w^1 - T_h w^2| < k\}$, $\Omega^2(k, h) = \{\mathrm{x} \in \Omega \mid |w^2 - T_h w^1| < k\}$.

Множества Ω^1, Ω^2 представляются в виде объединения непересекающихся подмножеств: $\Omega^1(k, h) = \Omega_0 \cup \Omega^1_1 \cup \Omega^1_2$, $\Omega^2(k, h) = \Omega_0 \cup \Omega^2_1 \cup \Omega^2_2$,

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega : |w^1 - w^2| < k, |w^1| < h, |w^2| < h\},$$

$$\Omega^1_1 = \{\mathrm{x} \in \Omega : |w^1 - h| < k, |w^2| \ge h\}, \quad \Omega^1_2 = \{\mathrm{x} \in \Omega : |w^1 - w^2| < k, |w^1| \ge h, |w^2| < h\},$$

$$\Omega^2_1 = \{\mathrm{x} \in \Omega : |w^2 - h| < k, |w^1| \ge h\}, \quad \Omega^2_2 = \{\mathrm{x} \in \Omega : |w^1 - w^2| < k, |w^2| \ge h, |w^1| < h\}.$$

Интегралы в левой части (4.2) по множеству Ω_0 принимают вид

$$\int_{\Omega_0} (A^1_\psi - A^2_\psi) \cdot \nabla(w^1 - w^2) d\mathrm{x} = I_0. \tag{4.3}$$

Те же интегралы по множествам Ω^1_1, Ω^2_1 благодаря (2.3') имеют вид

$$\int_{\Omega^1_1} A^1_\psi \cdot \nabla(w^1 - h) d\mathrm{x} + \int_{\Omega^2_1} A^2_\psi \cdot \nabla(w^2 - h) d\mathrm{x} \ge -\int_{\Omega^1_1 \cup \Omega^2_1} \phi_\psi d\mathrm{x} = -I_1. \tag{4.4}$$

Наконец, пользуясь (2.3'), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^1_2} A^1_\psi \cdot \nabla(w^1 - w^2) d\mathrm{x} + \int_{\Omega^2_2} A^2_\psi \cdot \nabla(w^2 - w^1) d\mathrm{x} \ge -\int_{\Omega^1_2} A^1_\psi \cdot \nabla w^2 d\mathrm{x} - \int_{\Omega^2_2} A^2_\psi \cdot \nabla w^1 d\mathrm{x} - \\ - \int_{\Omega^1_2 \cup \Omega^2_2} \phi_\psi d\mathrm{x} = -I^1_2 - I^2_2 - I_2. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Соединяя (4.3)–(4.5), получаем оценку

$$I \geq I_0 - I_3, \quad I_3 = I_2^1 + I_2^2 + I_1 + I_2.$$

Покажем, что $I_3 \to 0$ при $h \to \infty$. Действительно, ввиду (3.9) и $\phi_\psi \in L_1(\Omega)$, интегралы $I_1, I_2 \to 0$. Используя (1.1), оценим интеграл

$$\left|I_2^1\right| \leq \left\|\chi\left(h \leq \left|w^1\right| < h + k\right)\overline{\mathrm{B}}(A_\psi^1)\right\|_1 + \left\|\chi\left(h - k \leq \left|w^2\right| < h\right)\mathrm{B}(\nabla w^2)\right\|_1.$$

Применяя (4.1), (2.1'), (3.9), устанавливаем, что $I_2^1 \to 0$ при $h \to \infty$. Аналогично оценивается интеграл I_2^2.

Очевидно представление: $\Omega = \widetilde{\Omega}_0 \cup \widetilde{\Omega}_1 \cup \widetilde{\Omega}_2$,

$$\widetilde{\Omega}_0 = \{\mathrm{x} \in \Omega \mid |w^1| < h, |w^2| < h\}, \quad \widetilde{\Omega}_1 = \{\mathrm{x} \in \Omega \mid |w^1| \geq h\}, \quad \widetilde{\Omega}_2 = \{\mathrm{x} \in \Omega \mid |w^2| \geq h\}.$$

Для интегралов в правой части неравенства (4.2) по множеству $\widetilde{\Omega}_0$, ввиду неубывания функции $a_{0\psi}(\mathrm{x}, s_0)$ по s_0, имеем

$$J_0 = -\int\limits_{\widetilde{\Omega}_0} (a_{0\psi}(\mathrm{x}, w^1) - a_{0\psi}(\mathrm{x}, w^2))T_k(w^1 - w^2)d\mathrm{x} \leq 0.$$

На множестве $\widetilde{\Omega}_1$ получаем оценку

$$\left|J_1\right| \leq k\int\limits_{\widetilde{\Omega}_1}\left(\left|A_{0\psi}^1\right| + \left|A_{0\psi}^2\right|\right)d\mathrm{x}. \tag{4.6}$$

Аналогичная оценка имеет место на множестве $\widetilde{\Omega}_2$:

$$\left|J_2\right| \leq k\int\limits_{\widetilde{\Omega}_2}\left(\left|A_{0\psi}^1\right| + \left|A_{0\psi}^2\right|\right)d\mathrm{x}. \tag{4.7}$$

Поскольку $A_{0\psi}^1$, $A_{0\psi}^2 \in L_1(\Omega)$ и мера множеств $\widetilde{\Omega}_1$, $\widetilde{\Omega}_2$ стремится к нулю при $h \to \infty$ (см. (3.9)), то из оценок (4.6), (4.7) следует, что $\lim\limits_{h\to\infty}(\left|J_1\right| + \left|J_2\right|) = 0$.

Таким образом, предельный переход в (4.2) дает соотношение

$$\lim_{h\to\infty} I_0 = \lim_{h\to\infty}\int\limits_{\Omega_0(h,k)} (A_\psi^1 - A_\psi^2)\cdot\nabla(w^1 - w^2)d\mathrm{x} \leq 0.$$

Множество $\Omega_0(h,k)$ при $h \to \infty$ сходится к $\widehat{\Omega}_0(k) = \{\mathrm{x} \in \Omega \mid \left|w^1 - w^2\right| < k\}$, поэтому при любом $k > 0$ справедливо неравенство

$$\lim_{h\to\infty} I_0 = \int\limits_{\widehat{\Omega}_0(k)} (A_\psi^1 - A_\psi^2)\cdot\nabla(w^1 - w^2)d\mathrm{x} \leq 0.$$

Это противоречит условию (2.2'), поэтому $\nabla(w^1 - w^2) = 0$ почти всюду в $\widehat{\Omega}_0(k)$ при любом $k > 0$. Отсюда следует, что $w^1 = w^2$ почти всюду в Ω.

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ

Сначала рассмотрим задачу Дирихле

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i(\mathrm{x}, \nabla w))_{x_i} = a_0(\mathrm{x}, w), \tag{5.1}$$

$$w|_{\partial\Omega} = 0. \tag{5.2}$$

Пусть существуют неотрицательные функции $\phi(x)$, $\Phi(x) \in L_1(\Omega)$ и положительные числа $\overline{a}$, $\hat{a}$ такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\mathrm{s} = (s_0, \mathrm{s})$, $\mathrm{t} = (t_0, \mathrm{t}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathrm{s} \neq \mathrm{t}$ для функций Каратеодори $a(\mathrm{x}, \mathrm{s})$, $a_0(\mathrm{x}, s_0)$ справедливы неравенства

$$\overline{\mathrm{B}}(a(\mathrm{x}, \mathrm{s})) + \overline{B}_*(a_0(\mathrm{x}, s_0)) \leq \hat{a}(\mathrm{B}(\mathrm{s}) + B_*(s_0)) + \Phi(\mathrm{x}); \tag{5.3}$$

$$(a(\mathrm{x}, \mathrm{s}) - a(\mathrm{x}, \mathrm{t}))(\mathrm{s} - \mathrm{t}) + (a_0(\mathrm{x}, s_0) - a_0(\mathrm{x}, t_0))(s_0 - t_0) > 0; \tag{5.4}$$

$$a(\mathrm{x}, \mathrm{s}) \cdot \mathrm{s} + a_0(\mathrm{x}, s_0)s_0 \geq \overline{a}(\mathrm{B}(\mathrm{s}) + B_*(s_0)) - \phi(\mathrm{x}). \tag{5.5}$$

Определим пространство Соболева–Орлича $\overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{W^1_{\mathbf{B}}(\Omega)} = \|v\|_{B_*} + \|v\|_{\overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)}.$$

Предполагается, что N-функции $B_*(z), B_1(z), \ldots, B_n(z)$ и дополнительные к ним $\overline{B}_*(z)$, $\overline{B}_1(z), \ldots, \overline{B}_n(z)$ подчиняются Δ_2-условию.

Определение 2. *Обобщенным решением задачи* (5.1), (5.2) назовем функцию $w(\mathrm{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\langle a_0(x, w)v \rangle + \langle a(x, \nabla w) \cdot \nabla v \rangle = 0 \tag{5.6}$$

для любой функции $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$.

В [17, теорема 1] доказана

Теорема 3. *Если выполнены условия* (5.3)–(5.5), *то существует единственное обобщенное решение задачи* (5.1), (5.2).

На основе теоремы 3 строится

Доказательство теоремы 2.

Шаг 1. Выберем последовательность функций $A^m_{0\psi}(\mathrm{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$ так, чтобы

$$A^m_{0\psi} \to A^0_{0\psi}, \quad m \to \infty, \quad \text{в} \quad L_1(\Omega) \tag{5.7}$$

и при этом

$$\left\|A^m_{0\psi}\right\|_1 \leq \left\|A^0_{0\psi}\right\|_1, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{5.8}$$

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^n (a_i^m(\mathrm{x}, \nabla w))_{x_i} = a_0^m(\mathrm{x}, w) \tag{5.9}$$

с функциями $a_i^m(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = a_{i\psi}(\mathrm{x}, \mathrm{s})$, $a_0^m(\mathrm{x}, s_0) = A^m_{0\psi}(\mathrm{x}) + b^m(\mathrm{x}, s_0) + B'_*(s_0)/m$. Здесь $b^m(\mathrm{x}, s_0) = T_m b_\psi(\mathrm{x}, s_0)\kappa_m(\mathrm{x})$, $\kappa_m(\mathrm{x})$ – характеристическая функция множества $\Omega(m) = \{\mathrm{x} \in \Omega : |\mathrm{x}| < m\}$. Очевидно, что

$$\left|b^m(\mathrm{x}, s_0)\right| \leq \left|b_\psi(\mathrm{x}, s_0)\right|, \quad s_0 \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{x} \in \Omega. \tag{5.10}$$

Кроме того, применяя (2.5'), устанавливаем неравенства

$$b^m(\mathrm{x}, s_0)s_0 \geq 0, \quad s_0 B'_*(s_0) \geq B_*(s_0) \geq 0, \quad s_0 \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{x} \in \Omega. \tag{5.11}$$

Обобщенным решением задачи (5.9), (5.2) является функция $w^m \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\left\langle (A^m_{0\psi}(\mathrm{x}) + T_m b_\psi(\mathrm{x}, w^m)\kappa_m(\mathrm{x}) + B'_*(w^m)/m)v \right\rangle + \left\langle a_\psi(\mathrm{x}, \nabla w^m) \cdot \nabla v \right\rangle = 0 \tag{5.12}$$

для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$.

Для функций $a^m(\mathrm{x}, s)$, $a_0^m(\mathrm{x}, s_0)$ проверим условия (5.3)–(5.5). Очевидно, что

$$\overline{B}_*(b^m(\mathrm{x}, s_0)) = \overline{B}_*(T_m b_\psi(\mathrm{x}, s_0)\kappa_m(\mathrm{x})) \le \overline{B}_*(m)\kappa_m(\mathrm{x}) \in L_1(\Omega),$$

поэтому, применяя (1.5), (1.2), (1.4), устанавливаем, что

$$\begin{gathered}\overline{B}_*(a_0^m(\mathrm{x}, s_0)) \le c\overline{B}_*(A_{0\psi}^m(\mathrm{x})) + c\overline{B}_*(b^m(\mathrm{x}, s_0)) + c\overline{B}_*(\overline{B}'_*(s_0)/m) \le \\ \le \hat{a}_m B_*(s_0) + \Phi_m(\mathrm{x}), \quad \Phi_m(\mathrm{x}) \in L_1(\Omega).\end{gathered} \tag{5.13}$$

Из (2.1'), (5.13) следует неравенство (5.3).

Далее, применяя (1.1), (5.11), выводим

$$a_0^m(\mathrm{x}, s_0)s_0 = (A_{0\psi}^m(\mathrm{x}) + b^m(\mathrm{x}, s_0) + B'_*(s_0)/m)s_0 \ge B_*(s_0)/m - \varepsilon B_*(s_0) - C(\varepsilon)\overline{B}_*(A_{0\psi}^m).$$

Отсюда, выбирая $\varepsilon < 1/m$, получаем неравенство

$$a_0^m(\mathrm{x}, s_0)s_0 \ge \overline{a}_m B_*(s_0) - \phi_m(\mathrm{x}), \quad \phi_m(\mathrm{x}) \in L_1(\Omega). \tag{5.14}$$

Соединяя (2.3'), (5.14), устанавливаем неравенство (5.5).

Кроме того, ввиду неубывания функции $a_0^m(\mathrm{x}, s_0)$ по s_0 и (2.2') справедливо (5.4). Согласно теореме 3 существует единственное $w^m \in \overset{\circ}{W}{}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)$ обобщенное решение задачи (5.9), (5.2).

Шаг 2. В (5.12), положив $v = T_{k,h}w^m$, учитывая (5.11), будем иметь

$$\begin{gathered}\int\limits_{\{\Omega: h\le|w^m|<k+h\}} a_\psi(\mathrm{x}, \nabla w^m)\cdot\nabla w^m d\mathrm{x} + k\int\limits_{\{\Omega:|w^m|\ge k+h\}} \left(\left|b^m(\mathrm{x}, w^m)\right| + \left|B'_*(w^m)\right|/m\right)d\mathrm{x} + \\ + \int\limits_{\{\Omega: h\le|w^m|<k+h\}} \left(b^m(\mathrm{x}, w^m) + B'_*(w^m)/m\right)(w^m - h\operatorname{sign} w^m)d\mathrm{x} \le k\int\limits_{\{\Omega:\left|w^m\right|\ge h\}} \left|A_{0\psi}^m\right|d\mathrm{x}.\end{gathered} \tag{5.15}$$

Ввиду (5.11) для $h \le \left|w^m\right|$ справедливо неравенство

$$(b^m(\mathrm{x}, w^m) + B'_*(w^m)/m)(w^m - h\operatorname{sign} w^m) \ge 0.$$

Учитывая это, из (5.15) выводим

$$\int\limits_{\{\Omega: h\le|w^m|<k+h\}} a_\psi(\mathrm{x}, \nabla w^m)\cdot\nabla w^m d\mathrm{x} + k\int\limits_{\{\Omega:|w^m|\ge k+h\}} \left(\left|b^m(\mathrm{x}, w^m)\right| + \left|B'_*(w^m)\right|/m\right)d\mathrm{x} \le k\int\limits_{\{\Omega:|w^m|\ge h\}} \left|A_{0\psi}^m\right|d\mathrm{x}. \tag{5.16}$$

Применяя (2.3'), согласно (5.8), неравенство (5.16) приводим к виду

$$\begin{gathered}\overline{a}_\psi \int\limits_{\{\Omega: h\le|w^m|<k+h\}} \mathrm{B}(\nabla w^m)d\mathrm{x} + k\int\limits_{\{\Omega:|w^m|\ge k+h\}} \left(\left|b^m(x, w^m)\right| + \left|B'_*(w^m)\right|/m\right)d\mathrm{x} \le k\int\limits_{\{\Omega:|w^m|\ge h\}} \left|A_{0\psi}^m\right|d\mathrm{x} + \\ + \int\limits_{\{\Omega: h\le|w^m|<k+h\}} \phi_\psi d\mathrm{x} \le k\left\|A_{0\psi}^0\right\|_1 + \left\|\phi_\psi\right\|_1.\end{gathered} \tag{5.17}$$

Теперь в качестве пробной функции в (5.12) возьмем $T_k w^m$, получим

$$\int\limits_\Omega \{a_\psi(\mathrm{x}, \nabla w^m)\cdot\nabla T_k w^m + (A_{0\psi}^m(\mathrm{x}) + b^m(\mathrm{x}, w^m) + B'_*(w^m)/m)T_k w^m\} = 0.$$

Применяя (5.8), (5.11), получаем

$$\begin{gathered}\int\limits_{\{\Omega:|w^m|<k\}} a_\psi(\mathrm{x}, \nabla w^m)\cdot\nabla w^m d\mathrm{x} + k\int\limits_{\{\Omega:|w^m|\ge k\}} \left(\left|b^m(\mathrm{x}, w^m)\right| + \left|B'_*(w^m)\right|/m\right)d\mathrm{x} + \\ + \int\limits_{\{\Omega:|w^m|<k\}} \left(b^m(\mathrm{x}, w^m) + B'_*(w^m)/m\right)w^m d\mathrm{x} \le k\left\|A_{0\psi}^m\right\|_1 \le k\left\|A_{0\psi}^0\right\|_1.\end{gathered}$$

Отсюда, используя неравенство (2.3'), получаем

$$\begin{gathered}\overline{a}_{\psi}\int\limits_{\{\Omega:|w^m|<k\}}\mathrm{B}(\nabla w^m)dx+k\int\limits_{\{\Omega:|w^m|\ge k\}}\left(\left|b^m(x,w^m)\right|+\left|B'_*(w^m)\right|/m\right)dx+\\+\int\limits_{\{\Omega:|w^m|<k\}}\left(b^m(x,w^m)+B'_*(w^m)/m\right)w^m dx\le k\left\|A^0_{0\psi}\right\|_1+\left\|\phi_{\psi}\right\|_1.\end{gathered}\tag{5.18}$$

Согласно (5.10), (2.6'), имеем

$$\sup_{|w^m|\le k}\left(\left|b^m(x,w^m)\right|+\left|B'_*(w^m)\right|/m\right)\le\left|b_{\psi}(x,w^m)\right|+\left|B'_*(w^m)\right|\le G_{k+\|\psi\|_\infty}(x)+\left|B'_*(k)\right|\in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega).\tag{5.19}$$

Соединяя (5.18), (5.19), приходим к выводу, что для любого компакта $Q\subset\Omega$ справедливы неравенства

$$\left\|b^m(x,w^m)\right\|_{1,Q}+\left\|B'_*(w^m)\right\|_{1,Q}/m\le C_1,\quad m=1,2,\ldots.\tag{5.20}$$

Докажем, что

$$\left\|b^m(x,w^m)\right\|_1\le C_2,\quad m=1,2,\ldots.\tag{5.21}$$

Выбирая в (5.18) $k=\delta_0$, получаем

$$\int\limits_{\{\Omega:|w^m|\ge\delta_0\}}\left|b^m(x,w^m)\right|dx\le C_3,\quad m=1,2,\ldots.\tag{5.22}$$

Из (5.10), (2.7') имеем

$$\begin{gathered}\int\limits_{\{\Omega:|w^m|<\delta_0\}}\left|b^m(x,w^m)\right|dx\le\int\limits_{\{\Omega:|w^m|<\delta_0\}}\left|b_{\psi}(x,w^m)\right|dx\le\int\limits_{\{\Omega:0\le w^m<\delta_0\}}b_{\psi}(x,\delta_0)dx+\\+\int\limits_{\{\Omega:-\delta_0<w^m<0\}}\left|b_{\psi}(x,-\delta_0)\right|dx\le C_4.\end{gathered}\tag{5.23}$$

Соединяя (5.22), (5.23), выводим (5.21).

Шаг 3. Из (5.18) для любого $k>0$ следует оценка

$$\int\limits_{\Omega}\mathrm{B}(\nabla T_k w^m)dx=\int\limits_{\{\Omega:|w^m|<k\}}\mathrm{B}(\nabla w^m)dx\le kC_5+C_6,\quad m=1,2,\ldots.\tag{5.24}$$

Отсюда, согласно лемме 3, имеем

$$\operatorname{mes}(\Omega:|w^m|\ge k)\to 0,\quad k\to\infty,\quad \text{равномерно по}\quad m.\tag{5.25}$$

Установим сходимость

$$w^m\to w,\quad m\to\infty,\quad \text{п.в. в}\quad \Omega.\tag{5.26}$$

Пусть $\eta_R(r)=\min(1,\max(0,R+1-r))$, из оценки (5.24), применяя (1.5), выводим

$$\int\limits_{\Omega}\mathrm{B}(\nabla(\eta_R(|x|)T_k w^m))dx\le c\int\limits_{\{\Omega:|w^m|<k\}}\mathrm{B}(\nabla w^m)dx+c\int\limits_{\Omega}\mathrm{B}(T_k w^m\nabla\eta_R(|x|))dx\le C_7(k,R).$$

Отсюда при любых фиксированных $k,R>0$ следует ограниченность множества $\{\eta_R T_k w^m\}$ в $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega(R+1))$. Для N-функции $M\prec\prec B_*$, согласно лемме 8, имеем компактность вложения $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega(R+1))\subset L_M(\Omega(R+1))$. Таким образом, для любых фиксированных $k,R>0$ установлена сходимость $\eta_R T_k w^m\to v$ в $L_M(\Omega(R+1))$ при $m\to\infty$. Отсюда следует выборочная сходимость $T_k w^m\to v$ в $L_M(\Omega(R))$, а также выборочная сходимость $T_k w^m\to v$ почти всюду в $\Omega(R)$ при $m\to\infty$ для $k=1,2,\ldots$. Диагональным процессом устанавливается, что найдется измеримая функция

$w:\Omega\to\mathbb{R}$ такая, что $v = T_k w$ и $w^m \to w$ почти всюду в $\Omega(R)$ для любого $R>0$. Отсюда следует сходимость (5.26).

Из сходимости $w^m \to w$ почти всюду в $\Omega(R)$ для любого $R>0$ следует локальная сходимость по мере, а значит и локальная фундаментальность w^m по мере

$$\operatorname{mes}\{\Omega(R): \left|w^m - w^l\right| \ge \nu\} \to 0 \quad \text{при} \quad m,l\to\infty \quad \text{для любого} \quad \nu>0. \tag{5.27}$$

Шаг 4. Из (5.24), (2.1') при любом $k>0$ имеем оценку

$$\left\|\overline{\mathrm{B}}(a_\psi(x,\nabla w^m))\chi(|w^m|<k)\right\|_1 \le C_8(k), \quad m = 1,2,\ldots. \tag{5.28}$$

Из неравенства (5.24), согласно лемме 4, имеем

$$\operatorname{mes}\{\Omega: \mathrm{B}(\nabla w^m)\ge\rho\}\to 0 \quad \text{при} \quad \rho\to\infty \quad \text{равномерно по} \quad m. \tag{5.29}$$

Сначала установим сходимость

$$\nabla w^m \to \nabla w, \quad m\to\infty \quad \text{локально по мере.} \tag{5.30}$$

Рассмотрим множество

$$E_{\nu,\theta,\rho}(R) = \{\Omega(R): |w^l - w^m| < \nu,\ \mathrm{B}(\nabla w^l)\le\rho,\ \mathrm{B}(\nabla w^m)\le\rho,\ |w^l|<\rho,\ |w^m|<\rho,\ |\nabla(w^l - w^m)|\ge\theta\}.$$

Поскольку справедливо вложение

$$\{\Omega(R): |\nabla(w^l-w^m)|\ge\theta\}\subset\{\Omega: \mathrm{B}(\nabla w^l)>\rho\}\cup\{\Omega: \mathrm{B}(\nabla w^m)>\rho\}\cup$$
$$\cup\{\Omega(R): |w^l-w^m|\ge\nu\}\cup\{\Omega: |w^l|\ge\rho\}\cup\{\Omega: |w^m|\ge\rho\}\cup E_{\nu,\theta,\rho}(R),$$

то в силу (5.25), (5.29) выбором ρ добьемся выполнения неравенств

$$\operatorname{mes}\{\Omega(R): \left|\nabla(w^l-w^m)\right|\ge\theta\} < 4\varepsilon + \operatorname{mes}E_{\nu,\theta,\rho}(R) + \operatorname{mes}\{\Omega(R): \left|w^l-w^m\right|\ge\nu\}, \quad m,l=1,2,\ldots. \tag{5.31}$$

По условию монотонности (2.2') и известному факту, что непрерывная функция на компакте достигает наименьшего значения, найдется $\gamma(x)>0$ почти всюду в Ω такая, что при $\mathrm{B(s)}\le\rho$, $\mathrm{B(t)}\le\rho$, $|\mathrm{s}-\mathrm{t}|\ge\theta$ справедливо неравенство

$$(a_\psi(\mathrm{x},\mathrm{s}) - a_\psi(\mathrm{x},\mathrm{t}))\cdot(\mathrm{s}-\mathrm{t})\ge\gamma(\mathrm{x}). \tag{5.32}$$

Введем обозначение $A_0^m(\mathrm{x}) = A_{0\psi}^m(\mathrm{x}) + b^m(\mathrm{x},w^m) + B'_*(w^m)/m$, из (5.8), (5.20) следует ограниченность $A_0^m(\mathrm{x})$ в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ равномерно по m. Запишем (5.12) дважды для w^m и w^l и вычтем из первого второе, получим

$$\int_\Omega\left(a_\psi(\mathrm{x},\nabla w^m) - a_\psi(\mathrm{x},\nabla w^l)\right)\cdot\nabla v d\mathrm{x} + \int_\Omega(A_0^m - A_0^l)v d\mathrm{x} = 0.$$

Подставляя пробную функцию $v = \eta_R(|\mathrm{x}|)\eta_\rho(|w^l|)\eta_\rho(|w^m|)T_\nu(w^m-w^l)$, устанавливаем, что

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(a_\psi(\mathrm{x},\nabla w^m) - a_\psi(\mathrm{x},\nabla w^l))\cdot\nabla(\eta_R(|\mathrm{x}|)\eta_\rho(|w^l|)\eta_\rho(|w^m|)T_\nu(w^m-w^l))d\mathrm{x} =\\ &= -\int_\Omega(A_0^m - A_0^l)\eta_R(|\mathrm{x}|)\eta_\rho(|w^l|)\eta_\rho(|w^m|)T_\nu(w^m-w^l)d\mathrm{x}\le C_9(R)\nu.\end{aligned} \tag{5.33}$$

Далее, применяя (5.32), выводим

$$\begin{aligned}&\int_{E_{\nu,\theta,\rho}(R)}\gamma(\mathrm{x})d\mathrm{x}\le\int_{E_{\nu,\theta,\rho}(R)}(a_\psi(\mathrm{x},\nabla w^m) - a_\psi(\mathrm{x},\nabla w^l))\cdot\nabla(w^m-w^l)d\mathrm{x}\le\\ &\le\int_{\{\Omega:\left|w^m-w^l\right|<\nu\}}\eta_R(|\mathrm{x}|)\eta_\rho(|w^l|)\eta_\rho(|w^m|)(a_\psi(\mathrm{x},\nabla w^m) - a_\psi(\mathrm{x},\nabla w^l))\nabla(w^m-w^l)d\mathrm{x}.\end{aligned} \tag{5.34}$$

Используя (5.33), (5.24), (5.28), получаем

$$\int\limits_{E_{\nu,\theta,\rho}(R)} \gamma(\mathrm{x})d\mathrm{x} \leq 2\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\{\Omega:|w^m|<\rho+1,|\mathrm{x}|<R+1\}} \left|a_{i\psi}(\mathrm{x},\nabla w^m)\right|\left|T_\nu(w^m-w^l)\right|d\mathrm{x}+$$

$$+2\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\{\Omega:\rho<|w^l|<\rho+1,|w^m|<R+1\}} \left(\left|a_{i\psi}(\mathrm{x},\nabla w^m)\right|+\left|a_{i\psi}(\mathrm{x},\nabla w^l)\right|\right)\left|w^l_{x_i}\right|\left|T_\nu(w^m-w^l)\right|d\mathrm{x}+C_9(R)\nu \leq \tag{5.35}$$

$$\leq \nu\left(6\left\|\overline{\mathrm{B}}(a_\psi(\mathrm{x},\nabla w^m))\chi\left(\left|w^m\right|<\rho+1\right)\right\|_1+4\left\|\mathrm{B}(\nabla w^m)\chi\left(\left|w^m\right|<\rho+1\right)\right\|_1+C_{10}(R)\right) \leq C_{11}(R,\rho)\nu.$$

Для произвольного $\delta > 0$ при фиксированных R, ρ выбором ν из (5.35) устанавливаем неравенство

$$\int\limits_{E_{\nu,\theta,\rho}(R)} \gamma(x)d\mathrm{x} < \delta.$$

Применяя лемму 9, для любого $\varepsilon > 0$ находим

$$\operatorname{mes} E_{\nu,\theta,\rho}(R) < \varepsilon. \tag{5.36}$$

Кроме того, согласно (5.27), можно выбрать $m_0(\nu, R)$ такое, что

$$\operatorname{mes}\{\Omega(R) : |w^l - w^m| \geq \nu\} < \varepsilon, \quad m,l \geq m_0. \tag{5.37}$$

Соединяя (5.31), (5.36), (5.37), в итоге получаем неравенство

$$\operatorname{mes}\{\Omega(R) : |\nabla(w^l - w^m)| \geq \theta\} < 6\varepsilon, \quad m,l \geq m_0.$$

Отсюда следует фундаментальность по мере последовательности $\{\nabla w^m\}$ на множестве $\Omega(R)$ при любом $R > 0$, это влечет (5.30), а также выборочную сходимость:

$$\nabla w^m \to \nabla w, \quad m \to \infty, \quad \text{п.в. в} \quad \Omega. \tag{5.38}$$

Шаг 5. Докажем, что

$$b^m(\mathrm{x}, w^m) \to b_\psi(\mathrm{x}, w), \quad m \to \infty, \quad \text{в} \quad L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega), \tag{5.39}$$

$$b^m(\mathrm{x}, w^m) \to b_\psi(\mathrm{x}, w), \quad m \to \infty, \quad \text{п.в. в} \quad \Omega. \tag{5.40}$$

Из (5.17) при $h = k$ имеем

$$\int\limits_{\{\Omega:|w^m|\geq 2k\}} \left(\left|b^m(\mathrm{x},w^m)\right|+\left|B'_*(w^m)\right|/m\right)d\mathrm{x} \leq \int\limits_{\{\Omega:|w^m|\geq k\}} \left|A^m_{0\psi}-A^0_{0\psi}\right|d\mathrm{x}+$$

$$+\int\limits_{\{\Omega:|w^m|\geq k\}} \left|A^0_{0\psi}\right|d\mathrm{x}+\frac{1}{k}\int\limits_{\{\Omega:k\leq|w^m|<2k\}} \phi_\psi d\mathrm{x}.$$

Ввиду того что $A^0_{0\psi}$, $\phi_\psi \in L_1(\Omega)$, сходимости (5.7) и абсолютной непрерывности интегралов в правой части последнего неравенства, учитывая (5.25), для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать достаточно-большое k такое, что

$$\int\limits_{\{\Omega:|w^m|\geq 2k\}} \left(\left|b^m(\mathrm{x},w^m)\right|+\left|B'_*(w^m)\right|/m\right)d\mathrm{x} < \varepsilon, \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{5.41}$$

Из непрерывности $b_\psi(\mathrm{x}, s_0)$ по s_0 и сходимости $w^m \to w$ почти всюду в Ω следует, что

$$\kappa_m(\mathrm{x})b_\psi(\mathrm{x}, w^m) \to b_\psi(\mathrm{x}, w), \quad m \to \infty, \quad \text{п.в. в} \quad \Omega. \tag{5.42}$$

Теперь установим фундаментальность последовательности $\{b^m(\mathrm{x}, w^m)\}$ в пространстве $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$: для любого компакта $Q \subset \Omega$

$$\int_Q \left| b^m(\mathrm{x}, w^m) - b^l(\mathrm{x}, w^l) \right| d\mathrm{x} \to 0, \quad m, l \to \infty. \tag{5.43}$$

Для этого введем обозначение $\Delta^{ml}(\mathrm{x}) = | b^m(\mathrm{x}, w^m) - b^l(\mathrm{x}, w^l) |$ и запишем соотношение

$$\int_Q \Delta^{ml}(\mathrm{x}) d\mathrm{x} = \int_{\{Q: |w^m| \ge 2k, |w^l| \ge 2k\}} \Delta^{ml}(\mathrm{x}) d\mathrm{x} + \int_{\{Q: |w^m| < 2k, |w^l| < 2k\}} \Delta^{ml}(\mathrm{x}) d\mathrm{x} +$$

$$+ \int_{\{Q: |w^m| < 2k, |w^l| \ge 2k\}} \Delta^{ml}(\mathrm{x}) d\mathrm{x} + \int_{\{Q: |w^m| \ge 2k, |w^l| < 2k\}} \Delta^{ml}(\mathrm{x}) d\mathrm{x} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Согласно (5.41) для любого $\varepsilon > 0$ за счет выбора k справедлива оценка $I_1 < 2\varepsilon$, равномерная по m и l.

Очевидно неравенство

$$\mathrm{mes}\{Q : G_{2k+\|\psi\|_\infty} \ge k_1\} \le 1/k_1 \int_{\{Q: G_{2k+\|\psi\|_\infty} \ge k_1\}} G_{2k+\|\psi\|_\infty}(\mathrm{x}) d\mathrm{x} = C_{12}(Q, k)/k_1.$$

Поэтому, учитывая (5.10), (2.6'), можно выбрать $k_1 > 2k$ такое, что:

$$\int_{\{Q: |w^m| < 2k, G_{2k+\|\psi\|_\infty} \ge k_1\}} \left| b^m(\mathrm{x}, w^m) \right| d\mathrm{x} \le \int_{\{Q: G_{2k+\|\psi\|_\infty} \ge k_1\}} G_{2k+\|\psi\|_\infty}(\mathrm{x}) d\mathrm{x} < \varepsilon. \tag{5.44}$$

На множестве $\{Q : |w^m| < 2k, G_{2k+\|\psi\|_\infty} < k_1\}$ имеем: $|b^m(\mathrm{x}, w^m)| \le G_{2k+\|\psi\|_\infty}(\mathrm{x}) < k_1$ (см. (2.6')). Поэтому при $m, l > k_1$ $b^m(\mathrm{x}, w^m) = \kappa_m(\mathrm{x}) b_\psi(\mathrm{x}, w^m)$, $b^l(\mathrm{x}, w^l) = \kappa_l(\mathrm{x}) b_\psi(\mathrm{x}, w^l)$. Таким образом, применяя (5.44), (5.42), (5.19) и теорему Лебега, выбором m_0 можно установить неравенство

$$I_2 \le 2\varepsilon + \int_{\{Q: |w^m| < 2k, |w^l| < 2k, G_{2k+\|\psi\|_\infty} < k_1\}} \left| \kappa_m(\mathrm{x}) b_\psi(\mathrm{x}, w^m) - \kappa_l(\mathrm{x}) b_\psi(\mathrm{x}, w^l) \right| d\mathrm{x} < 3\varepsilon, \quad m, l > m_0.$$

Оценим интеграл I_3. Для области интегрирования в I_3 справедливо вложение

$$\left\{Q : \left|w^m\right| < 2k, \left|w^l\right| \ge 2k\right\} \subset \left\{Q : \left|w^m\right| \ge k, \left|w^l\right| \ge 2k\right\} \cup \left\{Q : \left|w^m\right| < k, \left|w^l\right| \ge 2k\right\}.$$

Согласно (5.41), выбором k можно установить оценки

$$I_{31} = \int_{\{Q: |w^m| \ge k, |w^l| \ge 2k\}} \left| b^m(\mathrm{x}, w^m) - b^l(\mathrm{x}, w^l) \right| d\mathrm{x} < 2\varepsilon,$$

$$I_{32} = \int_{\{Q: |w^m| < k, |w^l| \ge 2k\}} \left| b^m(\mathrm{x}, w^m) - b^l(\mathrm{x}, w^l) \right| d\mathrm{x} \le \int_{\{Q: |w^m| < k, |w^l| \ge 2k\}} G_{2k+\|\psi\|_\infty}(\mathrm{x}) d\mathrm{x} + \varepsilon,$$

равномерные по m. Поскольку $\mathrm{mes}\{Q : |w^m| < k, |w^l| \ge 2k\} \to \mathrm{mes}\{Q : |w| \le k, |w| \ge 2k\} \to 0$ при $k, l \to \infty$, то ввиду $G_{k+\|\psi\|_\infty}(\mathrm{x}) \in L_1(Q)$ и абсолютной непрерывности интеграла выбором m_0 можно установить неравенство

$$\int_{\{Q: |w^m| < k, |w^l| \ge 2k\}} G_{k+\|\psi\|_\infty}(\mathrm{x}) d\mathrm{x} < \varepsilon, \quad m, l \ge m_0.$$

Таким образом, $I_3 < 4\varepsilon$ для $m, l \ge m_0$. Интеграл I_4 оценивается аналогичным образом.

Соединяя оценки для I_i, $i = 1, 2, 3, 4$, устанавливаем (5.43). Ввиду полноты пространства $L_1(Q)$ найдется функция $v \in L_1(Q)$ такая, что

$$b^m(\mathrm{x}, w^m) \to v, \quad m \to \infty, \quad \text{в} \quad L_1(Q). \tag{5.45}$$

Кроме того, $b^m(\mathrm{x}, w^m) \to v$, $m \to \infty$, выборочно почти всюду в Ω. Отсюда для любого $k > 0$ имеем: $T_k b^m(\mathrm{x}, w^m) \to T_k v$, $m \to \infty$, почти всюду в Ω. Кроме того, ввиду (5.42), для любого $k > 0$ $T_k b^m(\mathrm{x}, w^m) \to T_k b_\psi(\mathrm{x}, w)$, $m \to \infty$, почти всюду в Ω. Отсюда следует, что $v(\mathrm{x}) = b_\psi(\mathrm{x}, w)$ почти всюду в Ω. Таким образом, (5.39), (5.40) доказаны.

Далее, установим сходимости

$$B'_*(w^m)/m \to 0, \quad m \to \infty, \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \tag{5.46}$$

$$B'_*(w^m)/m \to 0, \quad m \to \infty, \quad \text{в} \quad L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega). \tag{5.47}$$

Согласно (5.41), для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать k так, чтобы имело место

$$\int\limits_{\{\Omega:|w^m|\geq 2k\}} \left|B'_*(w^m)\right|/m d\mathrm{x} < \varepsilon, \quad m = 1, 2, \dots .$$

Кроме того, выбором m_0 можно добиться неравенства

$$\int\limits_{\{Q:|w^m|<2k\}} \left|B'_*(w^m)\right|/m d\mathrm{x} \leq \left|B'_*(2k)\right|/m \operatorname{mes} Q < \varepsilon, \quad m \geq m_0.$$

Из последних оценок следует сходимость (5.47), которая влечет (5.46).

Из оценки (5.21), ввиду (5.40), согласно теореме Фату следует, что $b_\psi(\mathrm{x}, w) \in L_1(\Omega)$, отсюда вытекает справедливость условия 1' определения 1'.

Шаг 6. Покажем, что $T_k w \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$ для любого $k > 0$. Соединяя (5.24), (1.7) для любого фиксированного $k > 0$, выводим оценку

$$\left\|T_k w^m\right\|_{\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)} = \left\|\nabla T_k w^m\right\|_{\mathrm{B}} \leq C_{13}(k), \quad m = 1, 2, \dots .$$

Рефлексивность пространства $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$ позволяет выделить слабо сходящуюся в $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$ подпоследовательность $T_k w^m \rightharpoonup v$, $m \to \infty$, причем $v \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$. Непрерывность естественного отображения $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega) \to L_{\mathrm{B}}(\Omega)$ влечет слабую сходимость

$$\nabla T_k w^m \rightharpoonup \nabla v, \quad m \to \infty, \quad \text{в} \quad L_{\mathrm{B}}(\Omega). \tag{5.48}$$

Пользуясь сходимостями (5.26), (5.38), для любого фиксированного $k > 0$ устанавливаем, что

$$\nabla T_k w^m \to \nabla T_k w, \quad m \to \infty, \quad \text{п.в. в} \quad \Omega.$$

Отсюда, применяя лемму 5, имеем слабую сходимость

$$\nabla T_k w^m \rightharpoonup \nabla T_k w, \quad m \to \infty, \quad \text{в} \quad L_{\mathrm{B}}(\Omega). \tag{5.49}$$

Из (5.48), (5.49) следует равенство $v = T_k w \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$.

Шаг 7. Чтобы доказать (2.8'), возьмем функции $T \in \mathcal{F}$, $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$ и применим пробную функцию $v = T(w^m - \xi)$ в тождестве (5.12). Получим

$$J = \int\limits_\Omega a_\psi(\mathrm{x}, \nabla w^m) \cdot \nabla T(w^m - \xi) d\mathrm{x} = -\int\limits_\Omega \left(b^m(\mathrm{x}, w^m) + B'_*(w^m)/m + A^m_{0\psi}\right) T(w^m - \xi) d\mathrm{x} = -I. \tag{5.50}$$

Интеграл в левой части можно записать в виде

$$J = \int\limits_\Omega a_\psi(\mathrm{x}, \nabla w^m) \cdot \nabla w^m T'(w^m - \xi) d\mathrm{x} - \int\limits_\Omega a_\psi(\mathrm{x}, \nabla w^m) \cdot \nabla \xi T'(w^m - \xi) d\mathrm{x} = J_1 - J_2. \tag{5.51}$$

Из сходимостей $w^m \to w$, $\nabla w^m \to \nabla w$ почти всюду в Ω (см. (5.26), (5.38)), ввиду непрерывности функций $a_\psi(\mathrm{x}, \mathrm{s})$ по s, $T'(r)$, имеем

$$a_\psi(\mathrm{x}, \nabla w^m) T'(w^m - \xi) \to a_\psi(\mathrm{x}, \nabla w) T'(w - \xi), \quad m \to \infty, \quad \text{п.в. в } \Omega.$$

Отсюда по лемме Фату получаем

$$\int_\Omega a_\psi(\mathrm{x}, \nabla w) \cdot \nabla w T'(w - \xi) d\mathrm{x} \le \liminf_{m\to\infty} J_1. \tag{5.52}$$

Из (5.28) следует ограниченность последовательности норм

$$\left\| \overline{\mathrm{B}}(a_\psi(\mathrm{x}, \nabla w^m) T'(w^m - \xi)) \right\|_1 \le \left\| \overline{\mathrm{B}}(a_\psi(\mathrm{x}, \nabla w^m)) \chi\left(\left| w^m \right| \le k + \|\xi\|_\infty \right) \right\|_1 \le C_{14}, \quad m = 1, 2, \dots .$$

Применяя лемму 5, устанавливаем слабую сходимость

$$a_\psi(\mathrm{x}, \nabla w^m) T'(w^m - \xi) \rightharpoonup a_\psi(\mathrm{x}, \nabla w) T'(w - \xi), \quad m \to \infty, \quad \text{в} \quad L_{\overline{\mathrm{B}}}(\Omega).$$

Выполняя предельный переход в J_2, имеем

$$\lim_{m\to\infty} J_2 = \int_\Omega a_\psi(\mathrm{x}, \nabla w) \cdot \nabla \xi T'(w - \xi) d\mathrm{x}. \tag{5.53}$$

Интеграл I также разобьем на два слагаемых. Первый интеграл

$$I_1 = \int_\Omega \left(b^m(\mathrm{x}, w^m) + B'_*(w^m)/m \right) T(w^m - \xi) d\mathrm{x}$$

оценивается следующим образом. Рассмотрим возрастающую последовательность $\{K^l\}$ компактных подмножеств Ω таких, что $\bigcup_{l=1}^\infty K^l = \Omega$. Пусть $\operatorname{supp} \xi \subset K^l$, $l \ge l_0$, $v^m = w^m - \xi$, $v = w - \xi$, $c^m(\mathrm{x}, w^m) = b^m(\mathrm{x}, w^m) + B_*(w^m)/m$, тогда, учитывая (5.11), при $l \ge l_0$ имеем

$$I_1 = \int_{\Omega \setminus K^l} c^m(\mathrm{x}, w^m) T(w^m) d\mathrm{x} + \int_{K^l} c^m(\mathrm{x}, w^m) T(v^m) d\mathrm{x} \ge \int_{K^l} c^m(\mathrm{x}, w^m) T(v^m) d\mathrm{x} = \overline{I}_1.$$

Рассмотрим интеграл

$$\tilde{I}_1 = \int_{K^l} (b_\psi(\mathrm{x}, w) T(v) - c^m(\mathrm{x}, w^m) T(v^m)) d\mathrm{x} = \int_{K^l} (b_\psi(\mathrm{x}, w) - c^m(\mathrm{x}, w^m)) T(v) d\mathrm{x} +$$
$$+ \int_{K^l} c^m(\mathrm{x}, w^m)(T(v) - T(v^m)) d\mathrm{x} = \tilde{I}_{11} + \tilde{I}_{12}.$$

В силу сходимостей (5.39), (5.47) интеграл $\tilde{I}_{11} \to 0$ при $m \to \infty$. Для $\tilde{I}_{12}$ имеем

$$\tilde{I}_{12} = \int_{\{K^l : |w^m| \ge L\}} c^m(\mathrm{x}, w^m)(T(v) - T(v^m)) d\mathrm{x} + \int_{\{K^l : |w^m| < L\}} c^m(\mathrm{x}, w^m)(T(v) - T(v^m)) d\mathrm{x} = \tilde{I}_{121} + \tilde{I}_{122}.$$

В силу (5.41) выбором большого L получим неравенство $\left|\tilde{I}_{121}\right| < \varepsilon$ (равномерно по m). А для фиксированного L, ввиду (5.19), применяя теорему Лебега, находим, что $\left|\tilde{I}_{122}\right| < \varepsilon$ при $m \ge m_0$.

Итак, $\tilde{I}_1 \to 0$ при $m \to \infty$, поэтому

$$\int_{K^l} b_\psi(\mathrm{x}, w) T(w - \xi) d\mathrm{x} = \lim_{m\to\infty} \overline{I}_1 \le \liminf_{m\to\infty} I_1. \tag{5.54}$$

Переходя к пределу при $l \to \infty$, заменяем K_l на Ω.

Выполняя предельный переход при $m \to \infty$ во втором интеграле, устанавливаем, что

$$I_2 = \int_\Omega A^m_{0\psi} T(w^m - \xi) d\mathrm{x} \to \int_\Omega A^0_{0\psi} T(w - \xi) d\mathrm{x}. \tag{5.55}$$

Соединяя (5.50)–(5.55), выводим (2.8').

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brezis H.* Semilinear equations in R_N without condition at infnity // Appl. Math. Optim. 1984. V. 12. № 3. P. 271–282.
2. *Boccardo L., Gallouet T., Vazquez J.L.* Nonlinear elliptic equaitons in Rn without growth restrictions on the data // J. Differential Equations. 1993. V. 105. № 2. P. 334–363.
3. *Bendahmane M., Karlsen K.* Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in Rn with advection and lower order terms and locally integrable data // Potential Analysis. 2005. V. 22. № 3. P. 207–227.
4. *Boccardo L., Gallouet Th.* Nonlinear elliptic equations with right-hand side measures // Comm. Partial Differential Equations. 1992. V. 17. № 3–4. P. 641–655.
5. *Boccardo L., Gallouet Th., Marcellini P.* Anisotropic equations in L1 // Differential Integral Equations. 1996. V. 9. № 1. P. 209–212.
6. *Benilan Ph., Boccardo L., Galluet Th., Pierre M., Vazquez J.L.* An L1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze. 1995. V. 22. № 2. P. 241–273.
7. *Boccardo L.* Some nonlinear Dirichlet problems in L1 involving lower order terms in divergence form // Pitman Res. Notes Math. Ser. 1996. V. 350. P. 43–57.
8. *Ковалевский А.А.* Априорные свойства решений нелинейных уравнений с вырождающейся коэрцитивностью и L1-данными // Современная матем. фундаментальные направл. 2006. Т. 16. С. 47–67.
9. *Benkirane A., Bennouna J.* Existence of entropy solutions for some elliptic problems involving derivatives of nonlinear terms in Orlicz spaces // Abstr. Appl. Anal. 2002. V. 7. № 2. P. 85–102.
10. *Aharouch L., Bennouna J., Touzani A.* Existence of renormalized solution of some elliptic problems in Orlicz spaces // Rev. Mat. Complut. 2009. V. 22. № 1. P. 91–110.
11. *Gwiazda P., Wittbold P., Wróblewska A., Zimmermann A.* Renormalized solutions of nonlinear elliptic problems in generalized Orlicz spaces. PhD programme: Mathematical methods in natural sciences (MMNS). 2011. Preprint № 2011-013.
12. *Рутицкий Я.Б., Красносельский М.А.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматлит, 1958.
13. *Королев А.Г.* Теоремы вложения анизотропных пространств Соболева–Орлича // Вестн. Моск. унив. 1983. Сер. 1. № 1. С. 32–37.
14. *Gossez J.P.* Nonlinear elliptic boundary value problems for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficients // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 190. P. 163–206.
15. *Лионс Ж.Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
16. *Кожевникова Л.М., Хаджи А.А.* Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях // Матем. сб. 2015. Т. 206. № 8. С. 99–126.
17. *Кожевникова Л.М., Хаджи А.А.* О решениях эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2015. № 19. С. 44–62.