Алгебра и логика, 11, № 6 (1972), 694–710.

УДК 519.45

СОПРЯЖЕННОСТЬ В СВОБОДНЫХ ПОЛИНИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ

Р.А.САРКИСЯН

В настоящей работе положительно решается проблема сопряженности для свободных полинильпотентных групп. Для некоторых других классов разрешимых групп эта задача рассматривалась раньше. Так, для свободных разрешимых групп проблема сопряженности решена в работе М.И.Каргаполова и В.Н.Ремесленникова [1], а для конечно-порожденных нильпотентных – в работе Блэкберна [2]. Более того, для этих двух типов групп доказана финитная аппроксимируемость относительно сопряженности в работе В.Н.Ремесленникова и В.Г.Соколова [3] и в той же работе Блэкберна.

Для свободной метабелевой группы проблема сопряженности была впервые решена Мэтьюз [4], а финитная аппроксимируемость относительно сопряженности доказана Е.И.Тимошенко [5].

Настоящая статья написана по тому же плану, что и работы [4] и [3]. Сначала мы рассматриваем построенное А.Л.Шмелькиным [6] мономорфное вложение $\beta : F/V(N) \to F/V(F) \, wr_V \, G = M$, где F – свободная группа, $V(H)$ обозначает вербальную подгруппу группы H, соответствующую множеству слов V, N – нормальный делитель в F, а M – вербальное сплетение групп $F/V(F)$ и $G = F/N$, соответствующее множеству слов V (подробности см. в [6]), и доказываем теорему 1.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $F = \{x_\alpha\}$ – свободная группа, $N \lhd F$, $F/N = G$ без кручения. Элементы $v, w \in F/V(N)$ тогда и только тогда сопряжены, когда $\beta(v)$ и $\beta(w)$ сопряжены в $M = F/V(F) \, wr_V \, G$.*

В том частном случае, когда V соответствует n-му нижнему централу свободной группы F_∞ счётного ранга, т.е. $\gamma_n(F_\infty)=V(F_\infty)$, вербальное сплетение называется n -ступенно нильпотентным и обозначается через M_n. Для решения проблемы сопряженности в свободных полинильпотентных группах изучим сперва группы M_n. Имеет место

ТЕОРЕМА 2[*]. Если G - без кручения, то для разрешимости в M_n проблемы сопряженности необходимо и достаточно, чтобы: а) она была разрешима в G; б) проблема вхождения в циклические, была разрешима в G

Поскольку свободная полинильпотентная группа вкладывается с соблюдением условий теоремы 1 в подходящее нильпотентное сплетение M_n, причём G оказывается свободной полинильпотентной группой меньшего полинильпотентного ранга (см. § 1), индукция позволяет вывести из доказанных теорем основной результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА. В свободной полинильпотентной группе проблема сопряженности разрешима.

Отметим, наконец, что, когда $V(F_\infty)=\gamma_1(F_\infty)=[F_\infty, F_\infty]$, теорема 1 доказана в работе (3), а теорема 2 является частным случаем теоремы, доказанной в работе (4).

§ 1.

В этом параграфе собраны необходимые предварительные сведения.

Буквой F мы всегда будем обозначать свободную группу, а равенство $F=\{x_\alpha\}$ будет обозначать, что в F выбрана свободная система образующих x_α. Нижний центральный ряд произвольной группы будет обозначаться так: $G\supset\gamma_1(G)\supset\cdots\gamma_k(G)\supset\cdots$

Свободная полинильпотентная группа P_k с r образующими определяется набором $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ k натуральных чисел $n_i\geq 1$ следующим образом: берется свободная группа F ранга r и в ней ряд

[*] Более точно, проблема сопряженности будет решена для некоторого представления группы M_n, связанного с заданным представлением группы G (подробности см. в § 3).

нормальных делителей: $F=N_0 \supset N_1 \supset \dots \supset N_K$, такой, что $N_i=\gamma_{n_i}(N_{i-1})$; тогда $P_K = F/N_K$. При этом K называется ее полинильпотентным рангом (или просто рангом). Таким образом, при $K=1$ получаем просто свободную n -ступенно нильпотентную группу, при $K>1$ $P_K = F/\gamma_{n_K}(N_{K-1})$, где $F/N_{K-1}=P_{K-1}$ – свободная полинильпотентная группа полинильпотентного ранга $K-1$.

Напомним теперь некоторые факты из [6]; их доказательства могут быть найдены там же. Зафиксируем некоторое множество слов V; предполагается, что все рассматриваемые далее вербальные произведения и т.д. определены именно этим множеством V. Группа будет называться V - свободной, если она изоморфна $F/V(F)$ (где, как уже отмечалось, $V(F)$ обозначает вербальную подгруппу группы F). Такие группы мы будем обозначать буквой A, естественный гомоморфизм $F \to A$ -буквой ρ, а $\rho(x_\alpha)$ – через a_α. Таким образом, a_α образуют относительно свободную систему образующих (мы будем называть ее также V -свободной) V -свободной группы A. Пусть $A(g)$- изоморфные копии группы A, занумерованные элементами некоторой группы G. Буквой T будет обозначаться вербальное произведение групп $A(g)$ по всем $g \in G$: $T=\prod_{g\in G}^{V} A(g)$; мы будем называть его также V -произведением. Это V -свободная группа, а элементы $a_\alpha(g)$ для $\forall g \in G$ и $\forall \alpha$ образуют V -свободную систему ее образующих. Вербальное сплетение $M=A\,wr_V\,G$ групп A и G определяется как полупрямое расширение T с помощью G, с действием G на T, продолжающим действие $b^{-1}a_\alpha(g)b=a_\alpha(gb), a_\alpha(g)\in A(g)$; мы будем называть его V -сплетением. Естественный гомоморфизм $M \to G$ мы будем обозначать буквой θ, а естественное вложение $G \to M$ - буквой i; впрочем, иногда мы будем отождествлять группу G с ее образом и записывать элементы из M в виде произведения $g\cdot k$, где $g\in G$, $k\in T$. Здесь g и k определены, очевидно, однозначно.

Пусть N – нормальный делитель в $F=\{x_\alpha\}$, δ – гомоморфизм $F \xrightarrow{\text{на}} G$ с ядром N, $A=\rho(F)$. Тогда отображение $x_\alpha \to \delta(x_\alpha)\,a_\alpha(e)$ продолжается до мономорфизма $F/V(N) \to A\,wr_V\,G$; он будет обозначаться буквой β, а гомоморфизм $F/V(N) \to G$, индуцированный гомоморфизмом δ, – буквой μ. Очевидно, $\beta(N/V(N)) \subset T$; мы будем обозначать $\beta(N/V(N))$ через Q. Также очевидно, что $\theta\beta=\mu$. В [6] доказано, что в существует такая подгруппа (мы будем обозначать ее буквой L), что T является V -произведением подгрупп L и Q : $T=L \underset{V}{*} Q$, причём Q и L V-свободны. Напомним, что в [6] изложен способ построения L. Пусть S – произвольная двусторонняя шрейерова система представителей смежных классов F по N. Рассмотрим всевозможные отличные от единицы элементы вида $s_\varepsilon x_\alpha \overline{s_\varepsilon x_\alpha}^{-1}$, где $s_\varepsilon \in S$, а $\overline{s_\varepsilon x_\alpha} \in S$ – шрейеров представитель своего класса $Ns_\varepsilon x_\alpha$. Обозначим множество элементов такого вида через R, тогда множество элементов $\beta(\tau), \tau \in R$, является относительно свободной системой образующих группы Q, а множество всех элементов вида $q_\alpha[\delta(s_\varepsilon x_\alpha)^{-1}]$, таких, что $s_\varepsilon x_\alpha = \overline{s_\varepsilon x_\alpha}$, можно взять в качестве относительно свободной системой образующих группы L. Таким образом, результат зависит от выбора S. Заметим еще, что в рассуждениях из [6] используется только левосторонняя шрейеровость системы S; поэтому сказанное верно и для таких систем. Это замечание будет использовано в дальнейшем. Левыми смежными классами мы называем классы вида Ns_ε.

При доказательстве теоремы 1 нам будет полезно также следующее замечание: если $B=C \underset{V}{*} D$, то корректно определены проекции f_C и f_D группы B на множители C и D.

Как уже отмечалось (см. введение), вербальное сплетение называется (n -ступенно) нильпотентным и обозначается через M_n, если множество слов V таково, что $V(F_\infty)=\gamma_n(F_\infty)$. В этом случае V -свободная группа есть просто свободная (n -ступенно) нильпотентная группа; мы будем обозначать ее через A_n; V – произведение групп $A_n(g)$ есть просто нильпотентное произведение, обозначаемое через T_n, β обозначается через β_n и т.д., впрочем, индекс n будет иногда опускаться, когда это возможно без ущерба для понимания. Заметим, что в T_n есть нормальный ряд: $T_n=\gamma_0(T_n)\supset\gamma_1(T_n)\supset\ldots\supset\gamma_n(T_n)=1$ такой, что $M_n/\gamma_i(M_n)=M_i=A_i\, wr_{\gamma_i}\, G$. Мы будем обозначать естественный гомоморфизм $M_k \to M_i$ через $m_{k,i}$, а образ элемента $x_k \in M_k$ в M_i – через x_i. Примем еще, что центр произвольной группы G будет обозначаться через $Z(G)$, группа целых чисел – через Z. Для произвольного множества $W\subset G$ W^y обозначает множество элементов $y^{-1}Wy$.

Отметим, наконец, что свободная полинильпотентная группа P_k ранга k вкладывается в подходящее n_k -ступенно нильпотентное сплетение групп A_{n_k} и P_{k-1}, где P_{k-1} – свободная полинильпотентная группа ранга $k-1$. Это ясно, так как (как уже отмечалось), имеет место изоморфизм $P_k \approx F/\gamma_{n_k}(N_{k-1})$, $F/N_{k-1} = P_{k-1}$.

Доказательство теоремы 2 существенным образом использует тот факт, что для произвольного элемента $h \in i_n(G) \subset M_n$ в T_n существует система C базисных коммутаторов, инвариантная относительно сопряжения элементом h. Способ ее построения аналогичен способу, примененному в работе Ю.В.Кузьмина [7]. Сначала фиксируем множество S_ε представителей правых смежных классов $S_\varepsilon H$ группы G по бесконечной циклической подгруппе $H = \{h\}$, порожденной элементом h. Упорядочим множество $\{\varepsilon\}$ произвольным образом. Упорядочим также произвольным образом множество $\{\alpha\}$ индексов системы $\{a_\alpha\}$ образующих группы A_n. Тогда на множестве $a_\alpha(g)$ образующих T_n можно ввести следующее упорядочение: $a_{\alpha_1}(S_{\varepsilon_1} h^p) < a_{\alpha_2}(S_{\varepsilon_2} h^m)$, если тройка $(\alpha_1, \varepsilon_1, p)$ больше тройки $(\alpha_2, \varepsilon_2, m)$ относительно естественного лексикографического порядка, который определен на них. Заметим, что как определенный порядок на множестве устойчив относительно сопряжений с помощью элементов из H. Построим теперь индукцией по весу базисные коммутаторы в группе T_n, придерживаясь следующего правила: после совершения каждого индуктивного шага будем вводить среди вновь построенных коммутаторов порядок так: коммутатор $c_1 = [u_1, v_1] > c_2 = [u_2, v_2]$, если $u_1 > u_2$, или же $u_1 = u_2$, но $v_1 > v_2$; только на множестве C_n базисных коммутаторов веса n будем вводить порядок особым образом. Заметим сперва, что при сопряжении элементами из группы H так построенные базисные коммутаторы переходят в базисные, а порядок (на $C \setminus C_n$) не нарушается (доказательство этих двух предложений проводится одновременно легкой индукцией по весу коммутаторов, см. лемму работы [7]). Таким образом, очевидно, что множество C_n разбивается на траектории, на каждой из которых h действует как сдвиг. Упорядочим произвольным образом множество $\{\beta\}$ этих траекторий, а после занумеруем элементы траектории β двойным индексом (β, p), $p \in Z$, так, чтобы $c^h_{(\beta, p)} = c_{(\beta, p+1)}$. Очевидно, это всегда возможно (правда, неоднозначно). Положим $(\beta_1, p_1) > (\beta_2, p_2)$, если $\beta_1 > \beta_2$, или $\beta_1 = \beta_2$, но $p_1 > p_2$. Это и есть нужный нам порядок на множестве C_n.

В заключение § 1 условимся о следующем: хорошо известно, что всякий элемент $k \in T_n$ обладает однозначной записью $k = c_{\tau_1}^{n_1} c_{\tau_2}^{n_1} \ldots c_{\tau_K}^{n_K}$, где $c_{\tau_i} \in C$, а $c_{\tau_i} < c_{\tau_s}$, если $i < s$. Такую запись будем называть канонической. Иногда мы просто будем писать $k = \prod_\varepsilon c_\varepsilon^{n_\varepsilon}$. Введем теперь еще одно понятие, а именно: пусть $k = K(a_\alpha(g))$ – какая-нибудь запись элемента k через образующие, тогда через X_K будет обозначаться множество образующих, входящих в эту запись. Для базисного коммутатора c через $supp\ c$ будем обозначать множество образующих, входящих в его запись.

§ 2.

Здесь будет доказана

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F = \{x_\alpha\}$ – свободная группа, $N \triangleleft F$, $F/N \approx G$ – без кручения. Тогда два элемента $v, w \in F/V(N)$ тогда и только тогда сопряжены, когда $\beta(v)$ и $\beta(w)$ сопряжены в $M = F/V(F)\ wr_V\ G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в (3), разберем два случая.

1. Предположим сперва, что $v, w \in N/V(N)$. Пусть элемент $s \in M$ таков, что $\beta(v) = s\beta(w)s^{-1}$. Возьмем в $F/V(N)$ какой-нибудь прообраз $u = \mu^{-1}(g)$ элемента $g = \theta(s)$. Тогда, очевидно, можно считать, что $\beta(v)$ и $\beta(uwu^{-1})$ сопряжены в M с помощью элемента $k = su^{-1} \in T$. Возьмем любую подгруппу L такую, что $T = Q \underset{V}{*} L$ (такие L, мы знаем, существуют). Применим теперь к равенству $k^{-1}\beta(v)k = \beta(uwu^{-1})$ гомоморфизм f_Q. Так как $\beta(v), \beta(uwu^{-1}) \in Q$, то $k_1 = f_Q(k) \in Q$ по-прежнему сопрягает $\beta(v)$ и $\beta(uwu^{-1})$.

II. Пусть теперь $\mu(v) \neq e$. Тогда можно считать, что $\mu(w) \neq e$ (ибо в противном случае $\beta(v)$ и $\beta(w)$ не сопряжены).

а) Снова, выбирая u, как в 1, т.е. полагая $u = \mu^{-1}(g)$, где $g = \theta(s)$, и заменяя $\beta(w)$ на $\beta(uwu^{-1})$, можно считать, что $\mu(v) = \mu(w) = h \neq e$, а сопрягающий их элемент k лежит в T. Поэтому до конца доказательства теоремы 1 мы будем считать, что эти условия выполнены.

б) Рассмотрим теперь свободную группу F' со свободными образующими $\{y, x'_\alpha\}$. Определим гомоморфизм $\delta' : F' \to G$ так: $\delta(x'_\alpha) = \delta(x_\alpha)$, $\delta(y) = h$. Рассмотрим отображение $j : F \to F'$, $j(x_\alpha) = x'_\alpha$. Очевидно, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "\delta"'] & & F' \arrow[dl, "\delta'"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Также очевидно, что она, в свою очередь, порождает другую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} F/V(N) \arrow[r] \arrow[d, "j^*"'] & F/V(F)\, wr_V = M \arrow[d, "\tau"] \\ F'/V(N') \arrow[r] & F'/V(F')\, wr_V G = M' \end{tikzcd}$$

Здесь $N' = \ker \delta'$, отображение j^* индуцировано отображением j, а τ - вложением $F/V(F)$ в $F'/V(F')$ и изоморфизмом $F/N \approx F'/N'$.

в) Построим теперь некотрым специальным образом подгруппу L', о которой говорилось в § 1. Обозначим $\{N', y\} = R'$, и пусть t_β - произвольная левосторонняя шрейерова система представителей смежных классов $R't_\beta$ группы F' по подгруппе R'. Тогда произведения $S_\varepsilon = y^i t_\beta$ для $\forall i \in Z$ и $\forall \beta$ образуют такую же систему S представителей смежных классов F' по N'; очевидно, они несократимы. Построим с помощью этой системы множества E, Y относительно свободных образующих групп L', Q' соответственно. Заметим, что если $s_\gamma \in S$ и $f \in F'$ таковы, что $s_\gamma f = \overline{s_\gamma f}$, т.е. $s_\gamma f$ является представителем своего класса, то $y^i s_\gamma$ для $\forall i \in Z$ также обладает этим свойством: $y^i s_\gamma f = \overline{y^i s_\gamma f}$. Поэтому множество E инвариантно относительно сопряжения с помощью элемента h: $E^h = E$.

Положим $\tau\beta(v) = v_1 = h\alpha$, $\tau\beta(w) = w_1$, $\tau(k) = k_1$, где $\alpha \in T'$, $h \in G$. Итак, $k_1 v_1 k_1^{-1} = w_1$, откуда $v_1 \cdot (v_1^{-1} \cdot k_1 \cdot v_1) \cdot k_1^{-1} = w_1$, откуда $(v_1^{-1} k_1 v_1) \cdot k_1^{-1} = v_1^{-1} w_1$. Заметим, что $v_1^{-1} w_1 \in Q'$, откуда $f_{Q'}(v_1^{-1} w_1) = v_1^{-1} w_1$. Докажем, что $v_1^{-1} f_{Q'}(k_1) v_1 = f_{Q'}(v_1^{-1} k_1 v_1)$. Положим $f_{Q'}(k_1) = k_2 \in Q'$. Пусть $k_1 = z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n$ - какая-нибудь запись элемента k_1 через систему образующих $E \cup Y$ группы T. Если вычеркнуть в этой записи все $z_i \in E$, получим, очевидно, запись для k_2. Имеем:

$$f_{Q'}(v_1^{-1} k_1 v_1) = f_{Q'}(v_1^{-1} z_1 v_1) \cdot \ldots \cdot f_{Q'}(v_1^{-1} z_n v_1).$$

Если $z_i \in Q'$ то, очевидно, $v_1^{-1} z_i v_1 \in Q'$ и $f_{Q'}(v_1^{-1} z_i v_1) = v_1^{-1} z_i v_1$. Если же $z_i \in E$, то $f_{Q'}(v_1^{-1} z_i v_1) = f_{Q'}[\alpha^{-1}(h^{-1} z_i h)\alpha] =$

$$=f_{Q'}(\alpha)^{-1}\cdot f_{Q'}(h^{-1}z_i h)\cdot f_{Q'}(\alpha)=e,$$

так как $E^h=E$ и $f_{Q'}(E)=e$. Отсюда очевидно, что $v_1^{-1}k_2v_1=f_{Q'}(v_1^{-1}k_1v_1)$. Следовательно, применение $f_{Q'}$ к равенству $(v_1^{-1}k_1v_1)k_1^{-1}=v_1^{-1}w_1$ дает: $v_1^{-1}k_2v_1k_2^{-1}=v_1^{-1}w_1$, откуда $k_2v_1k_2^{-1}=w_1$. Рассмотрим теперь гомоморфизм $\varphi: F'\to F$, такой, что $\varphi_j=id$ (разумеется, φ существует). Он индуцирует гомоморфизм $\dot{\varphi}: F'/_{V(N')}\to F/_{V(N)}$. Очевидно, элемент $\dot{\varphi}(k_2)$ сопрягает v и w. Теорема доказана.

§ 3.

В этом параграфе мы решим проблему сопряженности для сплетения $M_n=A_n wr_{\gamma_n} G$, где $A_n=\{\alpha_\alpha\}$ – n –ступенно свободная нильпотентная группа. Заметим, что если дано представление Дика D группы G с множеством образующих U, то с ним естественным образом связано представление Дика D' группы M_n, образующими которого является множество $U\cup\{\alpha_\alpha(e)\}$. Сформулируем теперь теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Если G – без кручения, то для разрешимости в M_n в представлении D' проблемы сопряженности необходимо и достаточно, чтобы а) она была разрешима в группе G в представлении D; б) проблема вхождения в циклические была разрешима в G.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть в M разрешима проблема сопряженности. Рассмотрим два элемента $v,w\in G$. Докажем, что они сопряжены в G тогда и только тогда, когда элементы $i(v), i(w)$ сопряжены в M. Очевидно, что из сопряженности w, v в G следует сопряженность $i(v)$, $i(w)$ в M. Докажем обратное. Пусть $si(v)s^{-1}=i(w)$, $s\in M$. Запишем: $s=i(g)\cdot k$, $g\in G$, $k\in T$, тогда

$$i(g)\cdot ki(v)\cdot k^{-1}\cdot i(g)^{-1}=i(w)$$

и применение гомоморфизма θ дает нам $gvg^{-1}=w$.

Чтобы доказать, что в G разрешима проблема вхождения в циклические подгруппы, достаточно заметить, как и в работе (4), что элемент $b\in G$ тогда и только тогда входит в подгруппу $\{h\}\in G$, когда h и hk сопряжены в M_n, где $k=c^{-1}(e)\cdot c(b)$, c – произвольный ненулевой элемент из $Z(A)$. Это легко доказывается, если рассмотреть в T ту систему базисных коммутаторов, инвариантную относительно сопряжений элементом h, которая построена в § 1; мы не будем на этом останавливаться.

<u>Достаточность</u>. Пусть в G в представлении Дика D разрешима проблема сопряженности (и проблема вхождения в циклические подгруппы). Прежде чем начинать рассуждение, отметим, что мы будем использовать другое множество образующих группы M, равное $U \cup \{a_\alpha(g)\}$ для $\forall \alpha$ и $\forall g \in G$. Элемент $u \in M$, заданный в представлении Дика D', легко можно записать в виде $g \cdot k$, где g – слово об образующих группы G, а $k \in T_n$ записано через $a_\alpha(g)$.

1. Предположим, что $v \in T_n$. Это предположение можно алгоритмически проверить, так как в G проблема тождества разрешима, как следует из наших предположений. Если $w \notin T_n$, то v и w не сопряжены. Если $w \in T_n$, легко определить i такое, что $w \in \gamma_{i-1}(T)$, но $w \notin \gamma_i(T)$. Это можно сделать, воспользовавшись канонической записью w по какой-нибудь системе базисных коммутаторов от образующих $a_\alpha(g)$ группы T. Пусть также $v \in \gamma_{i-1}(T)$, $v \notin \gamma_i(T)$ (очевидно, это условие необходимо для сопряженности v, w). Если теперь элемент $s = gk, g \in G, k \in T$ сопрягает v и w, то в $T_i = T/\gamma_i(T)$ $s_i v_i s_i^{-1} = v_i^g = w_i$. Возьмем какие-нибудь записи $v_i = V(a_\alpha(g)_i)$, $w_i = W(a_\alpha(g)_i)$ элементов v_i, w_i в виде слов V, W от образующих $a_\alpha(g)_i$ группы T_i. Тогда равенство $v_i = w_i^g$ дает что $X_V \cap X_W^g \neq 0$; действительно, рассмотрим канонические записи элементов v_i и w_i^g: $v_i = \Pi c_\varepsilon^{n_\varepsilon}$, $w_i^g = \Pi c_\varepsilon^{m_\varepsilon}$. Очевидно, что

$$\bigcup_{n_\varepsilon \neq 0} supp\, c_\varepsilon \subseteq X_V, \quad \bigcup_{m_\varepsilon \neq 0} supp\, c_\varepsilon \subseteq X_W^g,$$

а условие $v_i = w_i^g$ влечет, что для $\forall \varepsilon$ $m_\varepsilon = n_\varepsilon$. Отсюда ясно, что $X_V \cap X_W^g \neq 0$. Так как множества X_V, X_W конечны и явно находятся, если явно заданы записи v, w через образующие $a_\alpha(g)$ в группе T, то все элементы g с требуемым свойством явно строятся и их число конечно.

Далее, легко определяется, решается ли уравнение $kvk^{-1} = w^g$ при фиксированных v, w, g относительно k, так как в свободной нильпотентной группе T проблема сопряженности разрешима. Тем самым случай 1 полностью разобран.

П. $v=ha$, $w=fb$, $f,h\in G$, $a,b\in T$, причём $h\neq e$. Тогда $f\neq e$ (иначе v и w не сопряжены, и доказательство закончено). Если существует элемент $gk\in M$, $g\in G, k\in T$, сопрягающий v и w, то $gkha=fbgk$, откуда $ghk^h a=fgb^g k$. Следовательно, v и w сопряжены тогда и только тогда, когда существуют $g\in G$ и $k\in T$ такие, что $gh=fg$ и $k^h a=b^g k$. Поскольку проблема сопряженности в G решается, мы можем установить, сопряжены ли h и f. Предположим, что это так (иначе v и w не сопряжены). В таком случае, если бы существовали решения α, ν уравнений $x^h a=x$, $y^f=by$ соответственно, то элемент $\nu^g\alpha$ являлся бы решением уравнения $k^h a=b^g k$, и, следовательно, v и w были бы сопряжены (действительно, тогда $(\nu^f)^g=b^g\nu^g$, откуда $(\nu^g)^h=b^g\nu^g$ (так как $fg=gh$), откуда, умножая последнее равенство справа на равенство $\alpha^h a=\alpha$, получаем требуемое). Отсюда ясно значение следующей леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть $h\neq e$, $f\neq e$ — элементы $G\subset M_n$, a,b,d — элементы $T_n\subset M_n$. Тогда мы сможем алгоритмически выяснить, разрешимо ли в T_n каждое из уравнений $x^h a=x$, $y^f=by$, $k^h a=dk$; решение каждого из уравнений, если оно существует, единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно исследовать только последнее уравнение, так как два других являются его частными случаями (во втором вместо h взято f; это несущественно, так как h произвольно). Доказательство проведем индукцией по n. Предположим, что для M_n при $n\le i$ лемма верна. Пусть $n=i+1$. Рассмотрим уравнение $k_i^h a_i=d_i k_i$ в $T_i=T_{i+1}/\gamma_i(T_{i+1})$. Пусть s_i — его решение (иначе наше уравнение неразрешимо, и доказывать нечего). Возьмем какой-нибудь прообраз $s_{i+1}=m_{i+1,i}^{-1}(s_i)$ элемента s_i в T_{i+1}. Тогда если решение Δ_{i+1} нашего уравнения существует, то $\Delta_{i+1}=s_{i+1}\cdot t$, где $t\in Z(T_{i+1})$, так как $\Delta_i=s_i$ (потому что Δ_i вместе с s_i удовлетворяет уравнению $k_i^h a_i=d_i k_i$, а по индуктивному предположению его решение единственно). Имеем: $s_{i+1}^h t^h a=ds_{i+1}t$, отсюда $s_{i+1}^h a t^h=ds_{i+1}t$ $(t\in Z(T_{i+1}))$. Но $s_{i+1}^h a=ds_{i+1}z$, где $z\in Z(T_{i+1})$, так как $s_i^h a_i=d_i s_i$. Поэтому, очевидно, уравнение $k^h a=dk$ разрешимо в T_{i+1} тогда и только тогда, когда в $Z(T_{i+1})$ разрешимо уравнение $zt^h=t$, $z\in Z(T_{i+1})$; если решение в

$Z(T_{i+1})$ последнего уравнения единственно, то таково, очевидно, и решение исходного уравнения.

Для решения полученного уравнения построим в T_{i+1} систему базисных коммутаторов, о которой говорилось в § 1, инвариантную относительно действия элемента h. Возьмем каноническую запись элемента

$$\tau = \prod_{\beta} \left(\prod_{\rho} C_{(\beta,\rho)}^{\tau(\beta,\rho)} \right).$$

Здесь все $\tau(\beta,\rho)$ можно явно вычислить. Действительно, можно считать, что a и d даны нам в виде слов от образующих $a_\alpha(g)$ группы T_{i+1}, s_i – в виде слова $S(a_\alpha(g)_i)$ от образующих $a_\alpha(g)_i$ группы T_i, следовательно, мы можем явно найти запись прообраза s_{i+1}, например, просто взять $s_{i+1} = S(a_\alpha(g))$. Значит, можно найти τ в виде слова от образующих $a_\alpha(g)$, и для того, чтобы представить τ в требуемом виде, достаточно уметь определять, когда две образующие $a_\alpha(g_1)$ и $a_\alpha(g_2)$ принадлежат одной траектории относительно $H=\{h\}$, а для этого нужно только уметь решать, входит ли $g_1^{-1} g_2$ в H.

Для произвольного элемента $q \in Z(T_{i+1})$ определим функцию $\Pi_\beta(q) \in Z$ следующим образом: если $q = \prod_{\beta}\left(\prod_{\rho} c_{(\beta,\rho)}^{q(\beta,\rho)}\right)$, то $\Pi_\beta(q) = \sum_{\rho=-\infty}^{\rho=+\infty} q(\beta,\rho)$.

Заметим, что $\Pi_\beta(q^h) = \Pi_\beta(q)$, $\Pi_\beta(q_1 \cdot q_2) = \Pi_\beta(q_1) + \Pi_\beta(q_2)$ для $q_1, q_2 \in Z(T_{i+1})$. Таким образом, мы можем вычислить $\Pi_\beta(\tau)$ для $\forall \beta$. Заметим, что если уравнение $\tau t^h = t$ имеет решение, то, в силу приведенных свойств функции Π_β, $\Pi_\beta(\tau) = 0$ для $\forall \beta$. Это условие также и достаточно для разрешимости данного уравнения; действительно, система числовых уравнений $t(\beta,\rho) = \tau(\beta,\rho) + t(\beta,\rho-1)$ относительно неизвестных $t(\beta,\rho)$ имеет при этом условии решение $\zeta(\beta,\rho)$ такое, что только конечное число $\zeta(\beta,\rho) \neq 0$. Очевидно, $\zeta = \prod_{\beta}\left(\prod_{\rho} c_{(\beta,\rho)}^{\zeta(\beta,\rho)}\right)$ удовлетворяет уравнению $\tau t^h = t$, причём $\zeta \in Z(T_{i+1})$. Единственность решения уравнения тоже очевидна, так как $\zeta(\beta,\rho)$ является единственным решением нашей системы, для которого только только конечное число компонент $\neq 0$ (ясно, что решения в $Z(T_{i+1})$ данного уравнения взаимно-однозначно соответствуют таким решениям указанной системы). Лемма доказана.

Продолжаем доказательство теоремы. Пусть j и d таковы, что уравнения $x^h a = x$ и $y^f = by$ разрешимы в $T_j = T_n/\gamma_j(T_n)$ и $T_d = T_n/\gamma_d(T_n)$ и неразрешимы в T_{j+1} и T_{d+1} соответственно. Тогда, если $j=d=n$, а элементы f и h сопряжены в G, то, как мы знаем, v и w сопряжены. Пусть теперь $\min(j,d) < n$. Предположим, что $d \leq j$. Рассмотрим в этом случае группу T_{d+1}. Пусть $\alpha_j \in T_j$ – решение первого уравнения, $\nu_d \in T_d$ – решение второго, $\nu_{d+1} = m^{-1}_{d+1,d}(\nu_d)$ – какой-ни - будь прообраз элемента ν_d в T_{d+1}. Пусть $\alpha^g_{d+1} d_{d+1} = \alpha_{d+1} \tau$, $\nu^f_{d+1} = b_{d+1} \nu_{d+1} s$, где $\tau, s \in Z(T_{d+1})$.

Заметим теперь, что уравнение $k^h_d a_d = b^g_d k_d$ имеет решение $\Delta_d = T_d$ при любом g, сопрягающем f и h, и $\Delta_d = \nu^g_d \alpha_d$. Это нам уже известно, нам также известно, (см. доказательство леммы 1), что урав - нение $k^h_{d+1} a_{d+1} = b^g_{d+1} k_{d+1}$ имеет решение Δ_{d+1}, тогда и только тогда, когда имеет решение $t \in Z(T_{d+1})$ уравнение

$$(\nu^g_{d+1})^h \alpha^h_{d+1} t^h a_{d+1} = b^g_{d+1} \nu^g_{d+1} \alpha_{d+1} \cdot t$$

(мы взяли $\nu^g_{d+1} \alpha_{d+1}$ в качестве прообраза $m^{-1}_{d+1,d}(\nu^g_d \alpha_d)$ решения $\Delta_d = \nu^g_d \alpha_d$ уравнения $k^h_d a_d = b^g_d k_d$. После упрощений получаем: $s^g \tau t^h = t$.

Выберем теперь в T_{d+1} систему базисных коммутаторов, инвариантную относительно сопряжений с помощью элемента h, о которой говорилось в § 1. Докажем, что если $d < j$, то уравнение $k^h_{d+1} a_{d+1} = b^g_{d+1} k_{d+1}$ неразрешимо ни при каком g, сопрягающем f и h, следовательно, v и w не сопряжены, так как тогда неразрешимо и урав - нение $k^h a = b^g k$. Действительно, при $d < j$ $\Pi_\beta(\tau) = 0$ для $\forall \beta$, так как уравнение $x^h_{d+1} a_{d+1} = x_{d+1}$ разрешимо, по условию, и для каждого $g \in G$, сопрягающего f и h, $\exists \beta(g)$ такое, что $\Pi_{\beta(g)}(s^g) \neq 0$, так как иначе найдется $g_0 \in G$, сопрягающее f и h, для которого су - ществует решение $q \in Z(T_{d+1})$ уравнения $t^h s^{g_0} = t$, значит, произведение $\nu_{d+1} q^{g_0^{-1}}$ удовлетворяет уравнению $y^f_{d+1} = b_{d+1} y_{d+1}$, что противоречит нашему предположению. Отсюда вытекает, что уравнение $s^g \tau t^h = t$ неразрешимо в $Z(T_{d+1})$ для всех таких g, так как $\Pi_\beta(\tau s^g) = \Pi_\beta(\tau) + \Pi_\beta(s^g) = 0$ не для $\forall \beta$, а это условие, как мы знаем из доказательства леммы 1, необходимо для разрешимости.

Итак, доказано, что если $d \leq j$, для сопряженности v, w необходимо, чтобы $d = j$; в случае $d \geq j$ аналогичные рассмотрения показывают, что условие $d = j$ необходимо для сопряженности. Мы будем предполагать, что это условие выполнено. Мы также выяснили, что для сопря - женности v и w необходимо, чтобы нашлось $g \in G$ такое, что $gh = fg$ и $\Pi_\beta(\tau) + \Pi_\beta(s^g) = 0$ для $\forall \beta$. Множество таких элементов g образует конечное число смежных классов по подгруппе H. Действи - тельно, если g удовлетворяет этим равенствам, то gh^ℓ тоже удовлетворяет им для любого $\ell, \ell \in Z$, так как $\Pi_\beta(x^k)=\Pi_\beta(x)$ для всех $x \in Z(T_{\alpha+1})$, и $(gh^\ell)h=f(gh^\ell)$. Поэтому наше множество составлено из смежных классов по подгруппе H.

Для доказательства конечности их числа возьмем какие-нибудь записи $\tau=R(\alpha_\alpha(g)_{\alpha+1})$, $s=S(\alpha_\alpha(g)_{\alpha+1})$ элементов $s,\tau \in Z(T_{\alpha+1})$ через образующие $\alpha_\alpha(g)_{\alpha+1}$ группы $T_{\alpha+1}$. Мы можем сделать это в явном виде. Теперь заметим, что если элемент g таков, что $\Pi_\beta(\tau)+\Pi_\beta(s^g)=0$ для $\forall\beta$, то найдется $\ell \in Z$ такое, что $X_R \cap X_S^{gh^\ell} \neq 0$. Для доказательства возьмем канонические записи элементов τ и s^g:

$$\tau=\prod_{i=1}^{k_1}\left(\prod_{p} c_{(\beta_i^1,p)}^{\tau(i,p)}\right) \quad \text{и} \quad s^g=\prod_{j=1}^{k_2}\left(\prod_{p} c_{(\beta_j^2,p)}^{s(j,p)}\right).$$

Очевидно, что

$$\Big(\bigcup_{\tau(\beta_i^1,p)\neq 0} \operatorname{supp} c(\beta_i^1,p)\Big) \subseteq X_R \qquad \Big(\bigcup_{s(\beta_j^2,p)\neq 0} \operatorname{supp} c(\beta_j^2,p)\Big) \leqslant X_S^g,$$

а условие, что $X_R \cap X_S^{gh^\ell}=0$ для $\forall \ell$, дает, что пересечение множеств $\{\beta_i^1\}$ и $\{\beta_j^2\}$ пусто: $\{\beta_i^1\}\cap\{\beta_j^2\}=0$. Поэтому равенства $\Pi_\beta(\tau)+\Pi_\beta(s^g)=0$ для $\forall\beta$ невозможны, ибо и среди $\Pi_{\beta_i^1}(\tau)$, и среди $\Pi_{\beta_j^2}(s^g)$ есть не равные нулю, так как по условию уравнения $x^h a=x$, $y^f=by$ неразрешимы в $T_{\alpha+1}$. Таким образом, конечность числа классов доказана. Возьмем теперь все элементы g такие, что $X_R \cap X_S^g \neq 0$ (их конечное число, и все они находятся в явном виде). Отберем среди них те, для которых $gh=fg$. Пусть это будут элементы $g_1, g_2, \dots, g_m$. Мы знаем, что уравнение $k^h a=bk$ может иметь решение, если только $g=g_i h^\ell$, $i=1,\dots,m$, $\ell \in Z$ произвольно. Имеем: $k^h a=(b^{g_i})^{h^\ell}k$. Поэтому достаточно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 2. *Уравнение $k^h a=d^{h^\ell}k$ либо разрешимо для любого ℓ, либо неразрешимо ни для одного ℓ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией. Индуктивное предположение для i: если уравнение $k_i^h a_i=d_i^{h^\ell}k_i$ разрешимо в T_i хотя бы для одного значения ℓ, то оно разрешимо при любом ℓ; в том случае, когда оно разрешимо, существуют три элемента $b_i, c_i, q_i \in T_i$, такие, что $b_i^h q_i=d_i b_i$, $c_i^h a_i=q_i c_i$ (тогда, очевидно, произведения

$$\Delta_i=b_i^{h^\ell} q_i^{h^{\ell-1}} \cdot \ldots \cdot q_i^h q_i c \tag{1}$$

при $\ell > 0$

$$\Delta_i = b_i c_i \; ; \tag{2}$$

при $\ell = 0$

$$\Delta_i = b_i^{h^\ell} q_i^{-h^\ell} q_i^{-h^{\ell+1}} \cdot \ldots \cdot q_i^{-h^{-2}} \cdot q_i^{-h^{-1}} c_i \tag{3}$$

при $\ell < 0$ удовлетворяют нашему уравнению). Совершим переход от i к $i+1$. Если уравнение $k_i^h a_i = d_i^{h^\ell} k$ неразрешимо ни для какого ℓ, то и уравнение $k_{i+1}^h a_{i+1} = d_{i+1}^{h^\ell} k_{i+1}$ неразрешимо ни для какого ℓ, и все доказано. Пусть теперь, наоборот, уравнение $k_i^h a_i = d_i^{h^\ell} k_i$ разрешимо хотя бы для одного значения ℓ, тогда, по индуктивному предположению оно разрешимо для всех ℓ. Выберем прообразы $c'_{i+1} = m_{i+1,i}^{-1}(c_i)$, $b'_{i+1} = m_{i+1,i}^{-1}(b_i)$, $q'_{i+1} = m_{i+1,i}^{-1}(q_i)$ элементов c_i, b_i, q_i в группе T_{i+1}. Пусть элементы z и s определены равенствами:

$$(b'_{i+1})^h q'_{i+1} = d_{i+1} b'_{i+1} z, \quad (c'_{i+1})^h a_{i+1} s = q'_{i+1} c'_{i+1} \; .$$

Выберем в качестве прообраза $\Delta'_{i+1} = m_{i+1,i}^{-1}(\Delta_i)$ решения Δ_i уравнения $k_i^h a_i = d_i^{h^\ell} \cdot k_i$ в группе T_{i+1} произведения (1), (2) и (3) при $\ell > 0$, $\ell = 0$, $\ell < 0$ соответственно, где вместо c_i, b_i, q_i стоят $c'_{i+1}, b'_{i+1}, q'_{i+1}$. Как мы знаем из доказательства леммы 1, решение Δ_{i+1} уравнения $k_{i+1}^h a_{i+1} = d_{i+1}^{h^\ell} k_{i+1}$, если оно существует, имеет вид $\Delta_{i+1} = \Delta'_{i+1} t$, где $t \in Z(T_{i+1})$. Подставив вместо $\Delta_{i+1} = \Delta'_{i+1} t$ в уравнение его выражение, после упрощений получаем при любом ℓ: $t^h z^{h^\ell} = ts$. Но последнее уравнение либо разрешимо для всех значений ℓ сразу, либо неразрешимо ни для одного значения ℓ. Действительно, построим систему базисных коммутаторов, инвариантную относительно сопряжений с помощью элемента h, о которой говорилось в § 1. Мы знаем, что наше уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $\Pi_\beta(z^{h^\ell}) = \Pi_\beta(s)$ для $\forall \beta$, но $\Pi_\beta(z^{h^\ell}) = \Pi_\beta(z)$ для $\forall \beta$ и $\forall \ell$. Отсюда наше утверждение очевидно.

Таким образом, если уравнение $k_{i+1}^h a_{i+1} = d^{h^\ell} k_{i+1}$ неразрешимо хотя бы для одного значения ℓ, то оно неразрешимо для любого ℓ, и все доказано. Если же оно разрешимо, рассмотрим канонические записи элементов z и s:

$$z = \prod_{i=1}^{k_1} \Big(\prod_{p=x_i^1}^{y_i^1} c_{(\beta_i^1, p)}^{z(i,p)} \Big),$$

$$s = \prod_{j=1}^{k_2} \Big(\prod_{p=x_j^2}^{y_j^2} c_{(\beta_j^2, p)}^{s(j,p)} \Big).$$

Обозначим через $\{\beta_m^3\}$, $m=1,2,\dots,k$, множество тех траекторий β, для которых $\Pi_\beta(\tau)\neq 0$ (следовательно, и $\Pi_\beta(s)\neq 0$). Пусть

$$\bar{m}=\max_{\beta\in\{\beta_m^3\}}\left(y^2_{j(\beta)}-x^1_{i(\beta)}\right).$$

Будем искать нужные элементы в виде $b_{i+1}=b'_{i+1}\varkappa$, $c_{i+1}=c'_{i+1}\nu$, $q_{i+1}=q'_{i+1}\zeta$. Очевидно, если выбрать $\nu,\varkappa,\zeta$ так, чтобы удовлетворялись уравнения $\varkappa^h\tau\zeta=\varkappa$ и $\nu^h=\nu s\zeta$, элементы будут требуемыми. Рассмотрим сперва уравнение $t^h=ts$ и соответствующую ему систему целочисленных уравнений $t(\beta,p-1)=t(\beta,p)+s(\beta,p)$. Пусть $\nu(\beta,p)$ – ее решение, удовлетворяющее условию $\lim\limits_{p\to-\infty}\nu(\beta,p)=0$ для $\forall\beta$. Тогда оно единственно, $\lim\limits_{p\to+\infty}\nu(\beta,p)=0$, если только $\beta\notin\{\beta_m^3\}$, для $\beta\in\{\beta_m^3\}$ $\nu(\beta,p)=c^1_\beta$, если только $p\geq y^2_{j(\beta)}$. Все это очевидно. Очевидно также, что решение $\varepsilon(\beta,p)$ системы $t(\beta,p-1)+\tau(\beta,p)=t(\beta,p)$, соответствующей уравнению $t^h\tau=t$, удовлетворяющее условию $\lim\limits_{p\to+\infty}\varepsilon(\beta,p)=0$ для $\forall\beta$, единственно, и для него выполнено условие $\lim\limits_{p\to-\infty}\varepsilon(\beta,p)=0$, если только $\beta\notin\{\beta_m^3\}$, если же $\beta\in\{\beta_m^3\}$, то $\varepsilon(\beta,p)=c^2_\beta$ при $p\leq x^1_{i(\beta)}-1$, причём $c^1_\beta=c^2_\beta=c_\beta$ для $\forall\beta\in\{\beta_m^3\}$, так как для этих β $\Pi_\beta(\tau)=\Pi_\beta(s)$.

Рассмотрим теперь три элемента:

$$\nu=\Big[\prod_{\beta\notin\{\beta_m^3\}}\Big(\prod_{p}c_{(\beta,p)}^{\nu(\beta,p)}\Big)\Big]\cdot\Big[\prod_{\beta\in\{\beta_m^3\}}\Big(\prod_{p=-\infty}^{p=y^2_{j(\beta)}-1}c_{(\beta,p)}^{\nu(\beta,p)}\Big)\Big],$$

$$\varepsilon=\Big[\prod_{\beta\notin\{\beta_m^3\}}\Big(\prod_{p}c_{(\beta,p)}^{\varepsilon(\beta,p)}\Big)\Big]\Big[\prod_{\beta\in\{\beta_m^3\}}\Big(\prod_{p=y^2_{j(\beta)}-\bar{m}}^{p=+\infty}c_{(\beta,p)}^{\varepsilon(\beta,p)}\Big)\Big],$$

$$\zeta=\prod_{\beta\in\{\beta_m^3\}}c_{(\beta,\,y^2_{j(\beta)})}^{-c_\beta}.$$

Тогда очевидно, что $\nu^h\zeta^{-1}=\nu s$, $\varepsilon^h\tau=\zeta^{-h^{-\bar{m}}}\varepsilon$. Это проверяется простым вычислением. Наконец, определим элемент $\varkappa\in Z(T_{i+1})$ следующим образом: при $\bar{m}<0$ положим $\varkappa=\varepsilon\zeta^{-1}\zeta^{-h}\cdot\ldots\cdot\zeta^{-h^{-\bar{m}-1}}$, при $\bar{m}=0$ $\varkappa=\varepsilon$, при $\bar{m}>0$ $\varkappa=\varepsilon\zeta^{h^{-1}}\cdot\ldots\cdot\zeta^{h^{-\bar{m}}}$. Тогда, очевидно, $\varkappa^h\tau=\varkappa\zeta^{-1}$, и элементы $\varkappa,\nu,\zeta$ – искомые. Тем самым лемма 2, а с ней и теорема 2, доказаны.

§ 4.

Так как вложение $\beta: x_\alpha\to\delta(x_\alpha)\cdot a_\alpha(e)$ конструктивно, то для свободной полинильпотентной группы P_k достаточно доказать только разрешимость проблемы вхождения в циклические подгруппы, чтобы индукцией по

k решить проблему сопряженности (начало индукции обеспечивается тем, что P_1 – свободная нильпотентная группа, и в ней проблема сопряженности, как хорошо известно, разрешима). Итак, пусть v, w – два элемента из P_k. Предположим, что при $i=k-1$ в P_i проблема вхождения в циклические решается. Ясно, что если $w=v^n$, то $\rho(w) = [\rho(v)]^n$, где ρ – естественный гомоморфизм $P_k \to P_{k-1}$, поэтому если $\rho(v) \neq e$, то достаточно проверить, входит ли $\rho(w)$ в подгруппу $\{\rho(v)\}$, в случае вхождения найти показатель n, для которого $\rho(w) = [\rho(v)]^n$, и проверить, выполнено ли в P_k равенство $w = v^n$. Вопрос о равенствах $\rho(v)=e$, $w=v^n$ тоже решается алгоритмически, так как проблема тождества для свободных полинильпотентных групп P_k разрешима. Это доказано с помощью финитной аппроксимируемости в работе Грюнберга [8], впрочем, проблема тождества легко решается индукцией по k с помощью вложения β. Если же $\rho(v)=e$, то для вхождения w в $\{v\}$ необходимо, чтобы $\rho(w)=e$, если же это условие выполнено, то $w=v^n$ тогда и только тогда, когда для соответствующего вложения $\beta: P_k \to M$ $\beta(w)=[\beta(v)]^n$. Так как для нильпотентной группы T, к которой принадлежат $\beta(v)$ и $\beta(w)$, мы это можем явно выяснить (хотя бы с помощью рассмотрения канонической записи $\beta(v)$ и $\beta(w)$ по какой-нибудь системе базисных коммутаторов), то тем самым для P_k проблема вхождения в циклические решена. Остается заметить, что для P_1 эта проблема решается, так как P_1 – свободная нильпотентная. Таким образом, доказана основная теорема: в свободной полинильпотентной группе проблема сопряженности разрешима.

В заключение искренне благодарю своего научного руководителя В.Н.Ремесленникова за оказанную помощь.

Литература

1. М.И.КАРГАПОЛОВ, В.Н.РЕМЕСЛЕННИКОВ, Проблема сопряженности для свободных разрешимых групп, Алгебра и логика, 5, № 6 (1966), 15-25.

2. **N.BLACKBURN, Conjugacy in nilpotent groups, Proc.Amer.Math. Soc., 16, N1(1965), 143-148.**

3. В.Н.РЕМЕСЛЕННИКОВ, В.Г.СОКОЛОВ, Некоторые свойства вложения Магнуса, Алгебра и логика, 9, № 5 (1970), 566-578.

4. **J.MATTEUS, The conjugacy problem in wreath products and free metabelian groups, Trans.Amer.Math.Soc., 121, N2(1966), 329-339.**

5. Е.И.ТИМОШЕНКО, Сопряженность в свободных метабелевых группах, Алгебра и логика, 6, № 2 (1967), 89-94.

6. А.Л.ШМЕЛЬКИН, Сплетения и многообразия групп, Известия АН СССР, серия матем. 29, № 1 (1965), 149-170.

7. Ю.В.КУЗЬМИН, Стабильные автоморфизмы свободных полинильпотентных групп, СМЖ, 13, № 4 (1972), 944-950.

8. **K.W.GRUENBERG, Residual properties of infinite solvable groups, Proc. London Math. Soc. (3), 7 (1957) 29-62.**

Поступило 14 сентября 1972 г.