МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 27, № 6 (1980)

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ КЛАССА $H^2_{\omega_2}$ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ С РАВНООТСТОЯЩИМИ УЗЛАМИ

Ю. Р. Вайнерман

Пусть $n \rightleftharpoons 1, 2, \ldots$; $h \rightleftharpoons h_n \rightleftharpoons \pi (n + 1/2)^{-1}$; $x_k \rightleftharpoons x_k^{(n)} \rightleftharpoons kh$, $k \rightleftharpoons 0, \pm 1, \ldots$; $-\infty < x < \infty$;

$$l_k^{(n)}(x) \rightleftharpoons (-1)^{k+1}\left[(2n+1)\sin\frac{x_k - x}{2}\right]^{-1} \sin(n + 1/2)x;$$

f — непрерывная 2π-периодическая функция;

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^{2n}{}' f(x_k^{(n)})\, l_k^{(n)}(x);$$

$$R_n(f, x) = L_n(f, x) - f(x); \quad \mathscr{E}(L_n, \mathfrak{M}, x) \rightleftharpoons \sup_{f \in \mathfrak{M}} |R_n(f, x)|$$

— уклонение тригонометрического интерполяционного процесса с равноотстоящими узлами на классе функций $\mathfrak{M}$ в точке x; $\lambda_n(x) = \sum_{k=0}^{2n}{}' |l_k^{(n)}(x)|$ — функция Лебега рассматриваемого процесса;

$$\Delta_\eta f(t) = \Delta_\eta^1 f(t) = f(t + \eta) - f(t);$$

$$\Delta_\eta^2 f(t) = f(t + \eta) - 2f(t) + f(t - \eta); \quad \|f\| = \sup_t |f(t)|;$$

$$\omega_k(f, \delta) = \sup_{|\eta| \leqslant \delta} \|\Delta_\eta^k f\|, \quad k = 1, 2; \quad H^k_{\omega_k}\ (H^k_{\omega_k}\langle a, b\rangle)$$

— класс непрерывных 2π-периодических (заданных на промежутке $\langle a, b\rangle$) функций, удовлетворяющих неравенству $\omega_k(f, \delta) \leqslant \omega_k(\delta)$ $(\delta \geqslant 0)$, где $\omega_k(\delta)$ — заданная неотрицательная функция; $H_\omega = H^1_{\omega_1}$; $H^k_\mu = H^k_{\omega_k}$ при $\omega_k(\delta) = \delta^\mu$; $E_n(f)$ — наилучшее равномерное приближение функции f тригонометрическими многочленами порядка не выше n. Запись $X = O(Y)$ означает, что существует такая абсолютная константа $c > 0$, что $|X| \leqslant c|Y|$.

Асимптотическая формула для функции $\lambda_n(x)$, установленная в [1], была несколько уточнена в [2], где показано, что

$$\lambda_n(x) = 1 + |\sin(n + 1/2)x| \left[\frac{2}{\pi}\ln n + O(1)\right]. \qquad (1)$$

В [3] была, в частности, получена следующая асимптотическая формула типа формулы А. Н. Колмогорова

$$\mathscr{E}(L_n, H_\omega, x) = \frac{1}{2}\omega(h)\lambda_n(x) + O(\omega(h)), \qquad (2)$$

где $\omega(\delta)$ — заданный модуль непрерывности. В [4] дано асимптотическое представление остаточного члена формулы (2) для случая $\omega(\delta) = \delta^\mu$ $(0 < \mu \leqslant 1)$. Наконец, в [5] показано, что для любой ограниченной 2π-периодической функции f

$$|R_n(f, x)| \leqslant \frac{1}{4}\omega_2(f, h)\lambda_n(x) + O(\omega_2(f, h)), \qquad (3)$$

причем существует разрывная функция f, для которой в (3) имеет место равенство.

В настоящей работе устанавливается асимптотическая формула типа формулы А. Н. Колмогорова для величины $\mathscr{E}(L_n, H^2_{\omega_2}, x)$. Оказывается, что неравенство (3) является точным на классе $H^2_{\omega_2}$, если $\omega_2(\delta)$ возрастает, грубо говоря, медленнее чем δ, и может быть улучшено, если $\omega_2(\delta)$ возрастает быстрее чем δ.

В дальнейшем всюду будем считать, что $\omega_2(\delta)$ — неубывающая непрерывная функция такая, что $\omega_2(0) = 0$ и

$$\omega_2(\delta_2)\,\delta_2^{-2} \leqslant 4\omega_2(\delta_1)\,\delta_1^{-2} \quad (0 < \delta_1 < \delta_2). \qquad (4)$$

Заметим, что все эти требования заведомо выполнены, если $\omega_2(\delta) = \omega_2(f_0, \delta)$, где f_0 — непрерывная 2π-периодическая функция (см. [6, стр. 115—116]).

ЛЕММА 1. *Пусть* $m = m_n(x)$ *— целое число такое, что* $x^{(n)}_{m-1} < x \leqslant x^{(n)}_m$. *Тогда справедливы следующие* *соотношения*:

$$l_k^{(n)}(x) = O(|\sin(n+1/2)x|),\ k = m+1, m+2, \ldots, m+2n-1, \quad (5)$$

$$l_m^{(n)}(x) = \begin{cases} 1+O(|\sin(n+1/2)x|) & (x_m - h/2 \leqslant x \leqslant x_m), \\ O(|\sin(n+1/2)x|) & (x_{m-1} < x \leqslant x_m - h/2), \end{cases} \quad (6)$$

$$l_{m-1}^{(n)}(x) = \begin{cases} O(|\sin(n+1/2)x|) & (x_m - h/2 \leqslant x \leqslant x_m), \\ 1+O(|\sin(n+1/2)x|) & (x_{m-1} < x \leqslant x_m - h/2), \end{cases}$$

$$l_k^{(n)}(x) + l_{k+1}^{(n)}(x) = \begin{cases} O(|\sin(n+1/2)x|(k-m)^{-2}, \\ k = m+1, \ldots, m+n-1, \\ O(|\sin(n+1/2)x|(m+2n-k-1)^{-2}), \\ k = m+n, \ldots, m+2n-2, \end{cases} \quad (7)$$

$$\sum_{k=m+1}^{m+2n-1} |l_k^{(n)}(x)| = |\sin(n+1/2)x| \left[\frac{2}{\pi}\ln n + O(1)\right]. \quad (8)$$

Доказательство формул (5) — (7) очевидно. Формула (8) следует из (1) и (6).

ЛЕММА 2. *Пусть*

$$R_n^{(1)}(f, x) = -\frac{1}{2}\sum_{k=m+1}^{m+2n-1} \Delta_{h/2}^2 f(x_k^{(n)})\, l_k^{(n)}(x),$$

$R_n^{(2)}(f, x) = R_n(f, x) - R_n^{(1)}(f, x)$. *Тогда для любой функции* $f \in H_{\omega_2}^2$ *справедлива оценка*

$$R_n^{(2)}(f, x) = O(\omega_2(h)). \quad (9)$$

Если мажоранта $\omega_2(\delta)$ *удовлетворяет дополнительному условию*

$$\int_0^\delta \omega_2(u)\, u^{-2} du \leqslant A\omega_2(\delta)\,\delta^{-1} \qquad (\delta > 0) \quad (10)$$

где A *— положительная константа, то для любой функции* $f \in H_{\omega_2}^2$ *справедлива оценка*

$$R_n^{(2)}(f, x) = O(A\,|\sin(n+1/2)x|\,\omega_2(h)). \quad (11)$$

Доказательство. Положим для краткости $l_k = l_k^{(n)}(x)$, $x_{k\pm 1/2} = x_k^{(n)} \pm h/2$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ Тогда

$$R_n(f, x) = \sum\nolimits_{k=m-1}^{m+2n-1} f(x_k)\, l_k - f(x),$$

$$R_n^{(2)}(f, x) = \frac{1}{2} \sum\nolimits_{k=m+1}^{m+2n-1} [f(x_{k+1/2}) + f(x_{k-1/2})]\, l_k + \\ + f(x_{m-1})\, l_{m-1} + f(x_m)\, l_m - f(x).$$

Пусть $T = T_n(f)$ — тригонометрический многочлен наилучшего приближения функции f порядка не выше n, $f^* = f - T$. По теореме Джексона — Ахиезера

$$\| f^* \| = E_n(f) = O(\omega_2(h)). \qquad (12)$$

Используя аддитивность оператора $R_n^{(2)}$, представим величину $R_n^{(2)}(f, x)$ в виде суммы

$$R_n^{(2)}(f, x) = R_n^{(2)}(T, x) + R_n^{(2)}(f^*, x)$$

и оценим оба слагаемых в отдельности. Так как T — тригонометрический многочлен порядка не выше n, то

$$\sum\nolimits_{k=m-1}^{m+2n-1} T(x_{k\pm 1/2})\, l_k = L_n(T(\cdot \pm h/2), x) = T(x \pm h/2).$$

Поэтому

$$R_n^{(2)}(T, x) = \frac{1}{2} \sum\nolimits_{k=m+1}^{m+2n-1} [T(x_{k+1/2}) + T(x_{k-1/2})]\, l_k + \\ + T(x_{m-1})\, l_{m-1} + T(x_m)\, l_m - T(x) = \\ = \frac{1}{2} [\Delta_{h/2}^2 T(x) - \Delta_{h/2}^2 T(x_{m-1}) \cdot l_{m-1} - \Delta_{h/2}^2 T(x_m)\, l_m].$$

Предположим для определенности, что $x_{m-1/2} < x \leqslant x_m$ (случай $x_{m-1} < x \leqslant x_{m-1/2}$ рассматривается совершенно аналогично). Используя оценки (6), получим

$$R_n^{(2)}(T, x) = \frac{1}{2} [\Delta_{h/2}^2 T(x) - \Delta_{h/2}^2 T(x_m)] + \\ + O(|\sin(n + 1/2)\, x|)[|\Delta_{h/2}^2 T(x_m)| + |\Delta_{h/2}^2 T(x_{m-1})|].$$

Применяя (12) и неравенство Бернштейна, последовательн находим

$$\| \Delta_{h/2}^2 T \| \leqslant \| \Delta_{h/2}^2 f \| + \| \Delta_{h/2}^2 f^* \| \leqslant \omega_2(f, h/2) + 4 \| f^* \| = \\ = O(\omega_2(h));$$

$$| \Delta^2_{h/2} T(x) - \Delta^2_{h/2} T(x_m) | \leqslant \| \Delta^2_{h/2} T' \| (x_m - x) \leqslant$$
$$\leqslant n \| \Delta^2_{h/2} T \| (x_m - x) = O(\omega_2(h)\, n\, (x_m - x)) =$$
$$= O(\omega_2(h) | \sin(n + 1/2) x |).$$

Отсюда

$$R_h^{(2)}(T, x) = O(\omega_2(h) | \sin(n + 1/2) x |). \tag{13}$$

Для оценки величины $R_h^{(2)}(f^*, x)$ представим ее в виде

$$R_n^{(2)}(f^*, x) = \frac{1}{2} \Big[\sum\nolimits_{k=m+1}^{m+2n-2} f^*(x_{k+1/2})(l_k + l_{k+1}) +$$
$$+ f^*(x_{m+1/2})\, l_{m+1} + f^*(x_{m+2n-1/2})\, l_{m+2n-1} \Big] +$$
$$+ f^*(x_{m-1})\, l_{m-1} + f^*(x_m)\, l_m - f^*(x).$$

Из (5), (7) и (12) выводим:

$$| f^*(x_{m+1/2})\, l_{m+1} + f^*(x_{m+2n-1/2}) l_{m+2n-1} | \leqslant$$
$$\leqslant \| f^* \| (| l_{m+1} | + | l_{m+2n-1} |) = O(\omega_2(h) | \sin(n + 1/2) x |),$$

$$\Big| \sum\nolimits_{k=m+1}^{m+2n-2} f^*(x_{k+1/2})(l_k + l_{k+1}) \Big| \leqslant \| f^* \| \sum\nolimits_{k=m+1}^{m+2n-2} | l_k + l_{k+1} | =$$
$$= O\Big(\omega_2(h) | \sin(n + 1/2) x | \Big[\sum\nolimits_{k=m+1}^{m+n-1} (k - m)^{-2} +$$
$$+ \sum\nolimits_{k=m+n}^{m+2n-2} (m + 2n - k + 1)^{-2} \Big] \Big) = O(\omega_2(h) | \sin(n + 1/2) x |).$$

В силу (6) и (12) при $x_{m-1/2} < x \leqslant x_m$ будет

$$f^*(x_{m-1})\, l_{m-1} + f^*(x_m)\, l_m - f^*(x) =$$
$$= f^*(x_m) - f^*(x) + O(\omega_2(h) | \sin(n + 1/2) x |).$$

Таким образом,

$$R_n^{(2)}(f^*, x) = f^*(x_m) - f^*(x) + O(\omega_2(h) | \sin(n + 1/2) x |) \tag{14}$$

и, снова, используя (12), находим

$$R_n^{(2)}(f^*, x) = O(\omega_2(h)). \tag{15}$$

Объединяя оценки (13) и (15), получим (9).

Пусть теперь мажоранта $\omega_2(\delta)$ удовлетворяет условию (10). Из (4) и (10) очевидным образом вытекает, что $A \geqslant 1/4$, если только $\omega_2(\delta) \not\equiv 0$. Условие (10) влечет также непрерывную дифференцируемость функции f. Действительно, достаточным условием дифференцируемости f является (см., например, [6, стр. 347]) сходимость ряда $\sum_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(f)$. С помощью теоремы Джексона — Ахиезера и очевидных оценок находим

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(f) = O\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_2\left(\frac{1}{\nu}\right)\right) =$$
$$= O\left(\int_0^1 \omega_2(u)\, u^{-2}\, du\right) = O(A\omega_2(1)).$$

При этом [6, стр. 347]

$$\omega_2\left(f', \frac{1}{n}\right) = O\left(n^{-2}\sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^2 E_\nu(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} E_\nu(f)\right) =$$
$$= O\left(n^{-2}\sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^2 \omega_2((\nu+1)^{-1}) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \omega_2(\nu^{-1}) =\right.$$
$$\left. = O\left(n^{-2}\int_{(n+1)^{-1}}^{1} \omega_2(u)\, u^{-4}\, du + \int_0^{(n+1)^{-1}} \omega_2(u)\, u^{-2}\, du\right)\right).$$

Применяя (4) и (10), получим

$$\omega_2\left(f', \frac{1}{n}\right) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n+1}\right)\int_{(n+1)^{-1}}^{1} u^{-2} du + A(n+1)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\,\omega_2\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) = O\left(An\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O(An\omega_2(h))$$

Из теорем Фройда (см. [6, стр. 555]) и Джексона — Ахиезера выводим

$$\| f^{*\prime} \| = O(E_n(f^{*\prime})) = O\left(\omega_2\left(f', \frac{1}{n}\right)\right) = O(An\omega_2(h)),$$

откуда

$$| f^*(x_m) - f^*(x) | \leqslant \| f^{*\prime} \| (x_m - x) =$$
$$= O(A\omega_2(h)(x_m - x)) = O(A\omega_2(h) | \sin(n+1/2)x |).$$

Подставляя в (14), имеем

$$R_n^{(2)}(f^*, x) = O(A\omega_2(h) \mid \sin(n+1/2)x \mid). \tag{16}$$

Из (13) и (16) следует (11).

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Если мажоранта* $\omega_2(\delta)$ *удовлетворяет условию*

$$0 \leqslant \Delta_\eta^2 \omega_2(\delta) \leqslant 2\omega_2(\eta) \quad (0 < \eta \leqslant \delta) \tag{17}$$

то функция φ, *определенная по формуле*

$$\varphi(t) = (-1)^k [\omega_2(| t - kh |) - \omega_2(h/2)]/2,$$
$$t \in [kh - h/2, kh + h/2], \; k = 0, \pm 1, \ldots,$$

принадлежит классу $H^2_{\omega_2}(-\infty, \infty)$.

Доказательство. Покажем, что для произвольных t и η будет

$$|\Delta_\eta^2\varphi(t)| \leqslant \omega_2(|\eta|).$$

Так как $\varphi(t \pm h) = -\varphi(t)$ и $\varphi(-t) = \varphi(t)$, то, не нарушая общности, можно считать, что $t \in [0, h/2]$. С другой стороны $\Delta_{-\eta}^2\varphi(t) = \Delta_\eta^2\varphi(t)$, а при $\eta \geqslant h$, учитывая выпуклость вниз $\omega_2(\delta)$, имеем

$$|\Delta_\eta^2\varphi(t)| \leqslant 4\,\|\varphi\| = 2\omega_2(h/2) \leqslant \omega_2(h) \leqslant \omega_2(\eta),$$

и, следовательно, достаточно ограничиться рассмотрением случая $0 < \eta < h$. При этом точка $t+\eta$ может занимать одно из трех положений: (а) $t+\eta \in (0, h/2)$; (б) $t+\eta \in [h/2, h]$; (в) $t+\eta \in (h, 3h/2)$, а точка $t-\eta$ — одно из трех положений: (а) $t-\eta \in (0, h/2)$; (б) $t-\eta \in [-h/2, 0]$; (в) $t-\eta \in (-h, -h/2)$. Ситуации (ав) и (ва) (здесь первая буква соответствует положению точки $t+\eta$, а вторая — $t-\eta$) очевидным образом невозможны. Рассмотрим последовательно остальные семь случаев. Все приводимые ниже выкладки основаны на использовании неравенства (17), а также свойств монотонности и неотрицательности $\omega_2(\delta)$. При этом выражения, заключенные в фигурные скобки, неотрицательны.

(аа) $0 \leqslant 1/2\ \Delta_\eta^2\omega_2(t) = \Delta_\eta^2\varphi(t) \leqslant \omega_2(\eta)$;

(аб) $0 \leqslant 1/2\ \Delta_t^2\omega_2(\eta) + \{\omega_2(\eta) - \omega_2(t)\} = \Delta_\eta^2\varphi(t) \leqslant \leqslant \omega_2(t) + \{\omega_2(\eta) - \omega_2(t)\} = \omega_2(\eta)$;

(ба) $-\omega_2(\eta) \leqslant -\omega_2(t+\eta-h/2) \leqslant -1/2 \cdot \cdot \Delta_{t+\eta-h/2}^2\omega_2(h/2) \leqslant 1/2\ \Delta_\eta^2\omega_2(t) - 1/2\ \Delta_{t+\eta-h/2}^2\omega_2(h/2) = = \Delta_\eta^2\varphi(t) \leqslant 1/2\ \Delta_\eta^2\omega_2(t) \leqslant \omega_2(\eta)$;

(бб) $-\omega_2(\eta) \leqslant -\omega_2(t+\eta-h/2) \leqslant -1/2 \cdot \cdot \Delta_{t+\eta-h/2}^2\omega_2(h/2) \leqslant -1/2\ \Delta_{t+\eta-h/2}^2\omega_2(h/2) + 1/2\ \Delta_t^2\omega_2(\eta) + + \{\omega_2(\eta) - \omega_2(t)\} = \Delta_\eta^2\varphi(t) \leqslant 1/2\ \Delta_t^2\omega_2(\eta) + + \{\omega_2(\eta) - \omega_2(t)\} \leqslant \omega_2(t) + \{\omega_2(\eta) - \omega_2(t)\} = \omega_2(\eta)$;

(бв) $0 \leqslant 1/2\ \{\omega_2(h/2) - \omega_2(h-t-\eta)\} + \{\omega_2(h/2) - - \omega_2(t)\} + 1/2\ \{\omega_2(h/2) - \omega_2(t-\eta+h)\} = \Delta_\eta^2\varphi(t) = = -1/2\ \Delta_t^2\omega_2(h-\eta) - \Delta_{h/2-\eta}^2\omega_2(h/2) + \omega_2(\eta) - - \omega_2(t) \leqslant \omega_2(\eta)$;

(вб) $0 \leqslant 1/2\{\omega_2(\eta - t) - \omega_2(t + \eta - h)\} + \{\omega_2(h/2) - \omega_2(t)\} = \Delta_\eta^2\varphi(t) = 1/2\,\Delta_t^2\omega_2(\eta) - 1/2\,\Delta_{h/2}^2\,\omega_2(t + \eta - h/2) + \{\omega_2(\eta) - \omega_2(t)\} - \{\omega_2(t + \eta - h/2) - \omega_2(h/2)\} \leqslant 1/2\,\Delta_t^2\omega_2(\eta) + \{\omega_2(\eta) - \omega_2(t)\} \leqslant \omega_2(t) + \{\omega_2(\eta) - \omega_2(t)\} = \omega_2(\eta)$;

(вв) $0 \leqslant 1/2\,\{\omega_2(h/2) - \omega_2(t + \eta - h)\} + \{\omega_2(h/2) - \omega_2(t)\} + 1/2\,\{\omega_2(h/2) - \omega_2(t - \eta + h)\} = \Delta_\eta^2\varphi(t) = 1/2\Delta_t^2\omega_2(\eta) - 1/2\Delta_{h/2}^2\,\omega_2(t + \eta - h/2) - 1/2\cdot\Delta_{\eta-t-h/2}^2\omega_2(h/2) + \{\omega_2(\eta) - \omega_2(t)\} - \{\omega_2(t+\eta - h/2) - \omega_2(h/2)\} \leqslant 1/2\,\Delta_t^2\omega_2(\eta) + \{\omega_2(\eta) - \omega_2(t)\} \leqslant \omega_2(t) + \{\omega_2(\eta) - \omega_2(t)\} = \omega_2(\eta)$.

Лемма доказана.

Замечания. 1. Как следует из доказательства леммы

$$|\Delta_\eta^2\,\varphi(t)\,| = \omega_2(|\,\eta\,|)\quad(|\,\eta\,| \leqslant h/2).$$

2. Функция φ не является 2π-периодической, и, следовательно, не принадлежит классу $H_{\omega_2}^2$.

3. Из условий $f \in H_{\omega_2}^2\langle a, b\rangle$ и $f(t) = f(b)$ $(b < t \leqslant c)$, вообще говоря, не следует, что $f \in H_{\omega_2}^2\langle a, c\rangle$.

ЛЕММА 4. *Если* $\omega_2(\delta)$ *удовлетворяет условию* (17), *то функция* φ_0, *определенная на* $(-\infty, \infty)$ *по формулам* $\varphi_0(t) = \varphi_0(h)$ $(0 \leqslant t < h)$; $\varphi_0(t) = \varphi(t)$ $(h \leqslant t \leqslant 2\pi)$; $\varphi_0(t \pm 2\pi) = \varphi_0(t)$, *принадлежит классу* $H_{\omega_2}^2$.

Доказательство. Покажем, что для произвольных t и η будет

$$|\,\Delta_\eta^2\varphi_0(t)\,| \leqslant \omega_2(|\,\eta\,|).$$

Так же, как и в лемме 3, достаточно рассмотреть случай $0 < \eta < h$, а так как $\varphi_0(h/2 + t) = \varphi_0(h/2 - t)$ и $\Delta_\eta^2\,\varphi_0(t) = \Delta_\eta^2\varphi(t)$, если $t + \eta \leqslant 0$, то, не нарушая общности, можно считать, что $-\eta < t < h/2$.

При этом возможны четыре случая взаимного расположения точек t и $t + \eta$: (а) $t \in (0, h/2]$, $t + \eta \in (h, 3h/2]$; (б) $t \in (0, h/2]$, $t + \eta \in (0, h]$; (в) $t \in [-h/2, 0]$, $t + \eta \in (0, h]$; (г) $t \in (-h, -h/2)$, $t + \eta \in (0, h]$. В свою очередь точка $t - \eta$ может занимать одно из пяти положений: (а) $t - \eta \in [0, h/2)$; (б) $t - \eta \in [-h/2, 0)$; (в) $t - \eta \in [-h, -h/2)$; (г) $t - \eta \in [-3h/2, -h)$; (д)

$t - \eta \in (-2h, -3h/2)$. Нетрудно видеть, что невозможны ситуации (аа), (аг), (ад), (бг), (бд), (ва), (вд), (га), (гб), (гв). Остальные десять случаев исследованы ниже так же, как и в лемме 3.

(аб) $-\omega_2(\eta) = -1/2\{\omega_2(\eta) + \omega_2(\eta)\} \leqslant$
$= -1/2\{\omega_2(t+\eta-h) + \omega_2(\eta - t)\} = \Delta_\eta^2\varphi_0(t) \leqslant 0;$

(ав) $-\omega_2(\eta) \leqslant -\omega_2(h/2) \leqslant -\omega_2(h/2) +$
$+1/2\{\omega_2(t-\eta+h) - \omega_2(t+\eta-h)\} = \Delta_\eta^2\varphi_0(t) =$
$= -1/2\{\omega_2(t+\eta-h) + \omega_2(h/2)\} - 1/2\{\omega_2(h/2) -$
$-\omega_2(t-\eta+h)\} \leqslant 0;$

(ба) $\Delta_\eta^2\varphi_0(t) = 0;$

(бб) $-\omega_2(\eta) \leqslant -1/2\,\omega_2(\eta) \leqslant -1/2\,\omega_2(\eta - t) =$
$= \Delta_\eta^2\varphi_0(t) \leqslant 0;$

(бв) $-\omega_2(\eta) \leqslant -\omega_2(h/2) \leqslant -\omega_2(h/2) +$
$+1/2\,\omega_2(t-\eta+h) = \Delta_\eta^2\varphi_0(t) = -1/2\,\omega_2(h/2) -$
$-1/2\{\omega_2(h/2) - \omega_2(t-\eta+h)\} \leqslant 0;$

(вб) $-\omega_2(\eta) \leqslant -\omega_2(\eta) + 1/2\,\omega_2(\eta+t) + \{\omega_2(-t) -$
$-1/2\,\Delta_{-t}^2\,\omega_2(\eta)\} = \Delta_\eta^2\varphi_0(t) = \omega_2(-t) -$
$-1/2\,\omega_2(\eta - t) \leqslant \omega_2(-t) \leqslant \omega_2(\eta);$

(вв) $-\omega_2(\eta) \leqslant -\omega_2(\eta) + 1/2\,\omega_2(\eta+t) +$
$+\{\omega_2(-t) - 1/2\,\Delta_{-t}^2\omega_2(\eta)\} + 1/2\,\Delta_{\eta-t-h/2}^2\omega_2(h/2) =$
$= \Delta_\eta^2\varphi_0(t) = \omega_2(-t) - 1/2\{\omega_2(h/2) - \omega_2(t-\eta+$
$+h)\} - 1/2\,\omega_2(h/2) \leqslant \omega_2(-t) \leqslant \omega_2(\eta);$

(вг) $-\omega_2(\eta) \leqslant -\omega_2(h/2) \leqslant -\{\omega_2(h/2) -$
$-\omega_2(-t)\} + 1/2\,\omega_2(\eta - t + h) = \Delta_\eta^2\varphi_0(t) \leqslant$
$\leqslant 1/2\,\omega_2(\eta - t + h) \leqslant 1/2\,\omega_2(\eta) \leqslant \omega_2(\eta);$

(гг) $0 \leqslant 1/2\,\omega_2(\eta - t - h) \leqslant 1/2\,\omega_2(\eta - t - h) +$
$+\{\omega_2(h/2) - \omega_2(t+h)\} = \Delta_\eta^2\varphi_0(t) =$
$= 1/2\,\omega_2(\eta - t - h) + 1/2\,\omega_2(-t) - 1/2\,\omega_2(t+h) -$
$-1/2\,\Delta_{-t-h/2}^2\omega_2(h/2) \leqslant 1/2\,\omega_2(\eta - t - h) + 1/2\,\omega_2(-t) \leqslant$
$\leqslant 1/2\,\omega_2(\eta) + 1/2\,\omega_2(\eta) = \omega_2(\eta);$

(гд) $0 \leqslant \{\omega_2(h/2) - \omega_2(t+h)\} + 1/2\{\omega_2(h/2) -$
$-\omega_2(t - \eta + 2h)\} + 1/2\,\omega_2(h/2) = \Delta_\eta^2\varphi_0(t) =$
$= -1/2\,\omega_2(t-\eta+2h) - \Delta_{-t-h/2}^2\omega_2(h/2) + \omega_2(-t) \leqslant$
$\leqslant \omega_2(-t) \leqslant \omega_2(\eta).$

Лемма доказана,

ЛЕММА 5 [7, стр. 435]. *Если мажоранта* $\omega_2(\delta)$ *полуаддитивна, т. е. удовлетворяет условию*

$$\Delta_\eta \omega_2(\delta) \leqslant \omega_2(\eta) \quad (\delta, \eta \geqslant 0), \tag{18}$$

то функция $\psi(t)$, *определенная по формуле*

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\omega_2(|t - 2kh|), \quad t \in [(2k-1)h, (2k+1)h],$$
$$k = 0, \pm 1, \ldots,$$

принадлежит классу $H^2_{\omega_2}(-\infty, \infty)$.

Замечание. Накладываемое в [7] на мажоранту $\omega_2(\delta)$ дополнительное условие

$$|\Delta^2_\eta \omega_2(\delta)| \leqslant 2\omega_2(\eta) \ (0 < \eta \leqslant \delta),$$

на самом деле излишне, так как очевидным образом следует из (18).

ЛЕММА 6. *Если* $\omega_2(\delta)$ *удовлетворяет условию* (18), *то функция* $\psi_0(t)$, *определенная на* $(-\infty, \infty)$ *по формулам*: $\psi_0(t) = \psi(t) \ (0 \leqslant t \leqslant h)$, $\psi_0(t) = \psi(h) \ (h < t < 2h)$, $\psi_0(t) = \psi(t - h) \ (2h \leqslant t < 2\pi)$, $\psi_0(t \pm 2\pi) = \psi_0(t)$, *принадлежит классу* $H^2_{\omega_2}$.

Доказательство. Покажем, что для любых t и η $|\Delta^2_\eta \psi_0(t)| \leqslant \omega_2(|\eta|)$. Так как $\Delta^2_\eta \psi_0(t) = \Delta^2_{-\eta}\psi_0(t)$ и при $|\eta| \geqslant h$ имеем

$$|\Delta^2_\eta \psi_0(t)| = \left|\Delta^2_\eta\left(\psi_0(t) - \frac{1}{4}\omega_2(h)\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant 4\left\|\psi_0(t) - \frac{1}{4}\omega_2(h)\right\| = \omega_2(h) \leqslant \omega_2(|\eta|),$$

то достаточно рассмотреть случай $0 < \eta < h$.

В этих условиях при $t \leqslant 0$ или $t + \eta \leqslant h$ имеем $\Delta^2_\eta \psi_0(t) = \Delta^2_\eta \psi(t)$ и доказываемое неравенство вытекает из леммы 5. Наконец, $\psi_0(3h/2 + t) = \psi_0(3h/2 - t)$, поэтому, не нарушая общности, можно считать $t \leqslant 3h/2$. Итак, остается рассмотреть случай $0 < \eta < h$, $0 < t \leqslant \leqslant 3h/2$, $t + \eta > h$. Возможны три варианта взаимного расположения точек t, $t + \eta$: а) $t \in (0, h]$, $t + \eta \in (h, 2h]$; б) $t \in (h, 3h/2]$, $t + \eta \in (h, 2h]$; в) $t \in (h, 3h/2]$, $t + \eta \in (2h, 3h]$. В свою очередь, точка $t - \eta$ может занимать одно из трех положений: а) $t - \eta \in (-h, 0]$; б) $t - \eta \in (0, h]$; в) $t - \eta \in (h, 3h/2]$.

Нетрудно видеть, что ситуации (ав), (ба), (ва), (вв) невозможны. Остальные пять случаев исследованы ниже. Приводимые выкладки основаны на использовании леммы 5, неравенства (18) и свойств монотонности и неотрицательности функции $\omega_2(\delta)$. Выражения в фигурных скобках неотрицательны.

$$\text{(аа)}\ -\omega_2(\eta) \leqslant \Delta_\eta^2\psi(t) = $$
$$= 1/2\,[\omega_2(2h - t - \eta) - 2\omega_2(t) + \omega_2(\eta - t)] \leqslant$$
$$\leqslant 1/2\,[\omega_2(h) - 2\omega_2(t) + \omega_2(\eta - t)] =$$
$$= \Delta_\eta^2\psi_0(t) = 1/2\,\Delta_t^2\omega_2(\eta) - 1/2\,\{\omega_2(t+\eta) -$$
$$- \omega_2(h)\} + \omega_2(\eta) - \omega_2(t) \leqslant \omega_2(t) + \omega_2(\eta) - \omega_2(t) =$$
$$= \omega_2(\eta);$$

$$\text{(аб)}\ -\omega_2(\eta) \leqslant \Delta_\eta^2\psi(t) =$$
$$= 1/2\,[\omega_2(2h - t - \eta) - 2\omega_2(t) + \omega_2(t - \eta)] \leqslant$$
$$\leqslant 1/2\,[\omega_2(h) - 2\omega_2(t) + \omega_2(t - \eta)] =$$
$$= 1/2\,\Delta_\eta^2\psi_0(t) = 1/2\,\Delta_\eta^2\omega_2(t) - 1/2\,\{\omega_2(t + \eta) -$$
$$- \omega_2(h)\} \leqslant \omega_2(\eta);$$

$$\text{(бб)}\ -\omega_2(\eta) \leqslant -1/2\,\omega_2(\eta) \leqslant -1/2\,\omega_2(h - t + \eta) \leqslant$$
$$\leqslant 1/2\,[-\omega_2(h) + \omega_2(t - \eta)] = \Delta_\eta^2\psi_0(t) \leqslant 0 \leqslant \omega_2(\eta);$$

$$\text{(бв)}\ |\,\Delta_2^2\psi_0(t)\,| = 0 \leqslant \omega_2(\eta);$$

$$\text{(вб)}\ -\omega_2(\eta) \leqslant$$
$$\leqslant 1/2\,\{\omega_2(3h - t) - \omega_2(h)\} +$$
$$+ 1/2\{\omega_2(t) - \omega_2(h)\} - \omega_2(\eta) \leqslant 1/2\,[\omega_2(3h - t - \eta) +$$
$$+ \omega_2(\eta)] + 1/2\,[\omega_2(t - \eta) + \omega_2(\eta)] - \omega_2(h) - \omega_2(\eta) =$$
$$= \Delta_\eta^2\psi_0(t) = -1/2\,\{\omega_2(h) - \omega_2(3h - t - \eta)\} -$$
$$- 1/2\,\{\omega_2(h) - \omega_2(t - \eta)\} \leqslant 0 \leqslant \omega_2(\eta).$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. *Если мажоранта* $\omega_2(\delta)$ *удовлетворяет условию* (18), *то имеет место асимптотическая формула*

$$\mathscr{E}(L_n, H_{\omega_2}^2, x) = \frac{1}{4}\,\omega_2(h)\left[\left|\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right|\frac{2}{\pi}\ln n + O(1)\right]. \tag{19}$$

Если же $\omega_2(\delta)$ *удовлетворяет условию* (17), *то справедлива асимптотическая формула*

$$\mathscr{E}(L_n, H_{\omega_2}^2, x) =$$
$$= \frac{1}{2}\,\omega_2\left(\frac{h}{2}\right)\left[\left|\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right|\frac{2}{\pi}\ln n + O(1)\right]. \tag{20}$$

Если кроме того выполнено условие (10), *то формула* (20) *допускает следующее уточнение*:

$$\mathscr{E}(L_n, H^2_{\omega_2}, x) =$$
$$= \frac{1}{2}\omega_2\left(\frac{h}{2}\right)\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\left[\frac{2}{\pi}\ln n + O(A)\right]. \qquad (21)$$

Доказательство. Если $f \in H^2_{\omega_2}$, то, как следует из (3) и (1),

$$|R_n(f, x)| \leqslant \frac{1}{4}\omega_2(h)\left[\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\frac{2}{\pi}\ln n + O(1)\right]$$

Переходя в левой части последнего неравенства к верхней грани по классу $H^2_{\omega_2}$, получим

$$\mathscr{E}(L_n, H^2_{\omega_2}, x) \leqslant \frac{1}{4}\omega_2(h)\left[\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\frac{2}{\pi}\ln n + O(1)\right]$$

Пусть теперь $g_0(t) = \psi_0(t - x^{(n)}_{m-2}) - \frac{1}{4}\omega_2(h)$, где ψ_0 — функция, определенная в лемме 6. При выполнении условия (18) $g_0 \in H^2_{\omega_2}$. Производя несложный подсчет и применяя (1), находим

$$R_n(g_0, x) = \frac{1}{4}\omega_2(h)\left\{\sum_{k=m-1}^{m+2n-1}|l^{(n)}_k(x)| - 1\right\} =$$
$$= \frac{1}{4}\omega_2(h)\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\left[\frac{2}{\pi}\ln n + O(1)\right].$$

Тем самым (19) доказано.

С другой стороны, в силу леммы 2 и формулы (8)

$$|R_n(f, x)| \leqslant |R^{(1)}_n(f, x)| + |R^{(2)}_n(f, x)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=m+1}^{m+2n-1}|\Delta^2_{h/2}f(x^{(n)}_k)||l^{(n)}_k(x)| + O(\omega_2(h)) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\omega_2\left(\frac{h}{2}\right)\sum_{k=m+1}^{m+2n-1}|l^{(n)}_k(x)| + O(\omega_2(h)) =$$
$$= \frac{1}{2}\omega_2\left(\frac{h}{2}\right)\left[\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\frac{2}{\pi}\ln n + O(1)\right]$$

откуда

$$\mathscr{E}(L_n, H^2_{\omega_2}, x) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\omega_2\left(\frac{h}{2}\right)\left[\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\frac{2}{\pi}\ln n + O(1)\right].$$

Ясно, что при выполнении условия (10) последнее неравенство может быть уточнено так, что

$$\mathscr{E}(L_n, H^2_{\omega_2}, x) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\omega_2\left(\frac{h}{2}\right)\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\left[\frac{2}{\pi}\ln n + O(A)\right].$$

Пусть, наконец, $f_0(t) = \varphi_0(t - x^{(n)}_{m-1})$, где φ_0 — функция из леммы 4. Тогда из (17) следует, что $f_0 \in H^2_{\omega_2}$ и после элементарного подсчета получим

$$R_n(f_0, x) = \frac{1}{2}\omega_2\left(\frac{h}{2}\right)\left\{\sum_{k=m-1}^{m+2n-1} |l_k^{(n)}(x)| - 1\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}\omega_2\left(\frac{h}{2}\right)\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\left[\frac{2}{\pi}\ln n + O(1)\right],$$

откуда вытекает справедливость (20) и (21). Теорема доказана.

Замечание. Нетрудно видеть, что если $\omega_2(\delta)$ удовлетворяет условиям (17) и (18) одновременно, то $\omega_2(\delta) \equiv \omega_2(1)\,\delta$, а формулы (19) и (20) совпадают.

Следствие.

$$\mathscr{E}(L_n, H^2_\mu, x) = c(\mu)\,h^\mu\left[\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\frac{2}{\pi}\ln n + O(1)\right],$$

где $c(\mu) = 2^{-2}\ (0 < \mu \leqslant 1)$ *и* $c(\mu) = 2^{-1-\mu}\ (1 \leqslant \mu \leqslant 2)$.

Государственный проектно-изыскательский и научно-исследовательский институт морского транспорта

Поступило 28.IV.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Никольский С. М., О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами, Изв. АН СССР, Сер. матем., 4, № 6 (1940), 509—520.

[2] Зеель Э., Двусторонняя оценка функции Лебега тригонометрического интерполирования по равноотстоящим узлам, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та., 423 (1969), 116—118.

[3] Никольский С. М., Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 15 (1945), 45—58.

[4] Корнейчук Н. П., Об асимптотической оценке остатка при приближении периодических функций, удовлетворяющих

условию Липшица, интерполяционными многочленами с равноотстоящими узлами, Укр. матем. ж., 13, № 1 (1961), 100—106.
[5] Неваи Г. П., Об отклонении тригонометрических интерполяционных сумм, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 23, № 1—2 (1972), 203—205.
[6] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., Физматгиз, 1960.
[7] Ефимов А. В., Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье, Изв. АН СССР, Сер. матем., 24, № 2 (1960), 243—296.