L. Kantorovič, Sur la convergence de la suite des polynômes de S. Bernstein en dehors de l'intervalle fondamental,
Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Classe des sciences mathématiques et na, 1931, Issue 8, 1103–1115

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПОЛИНОМОВ С. Н. БЕРНШТЕЙНА ЗА ПРЕДЕЛАМИ ОСНОВНОГО ИНТЕРВАЛА

Л. В. КАНТОРОВИЧА

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

Акад. С. Н. Бернштейном* была установлена следующая теорема: Если $f(x)$ функция непрерывная в промежутке $(0,1)$ и если положить:

$$P_n[f(x)] = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \tag{1}$$

то последовательность полиномов $P_n(x)$ равномерно сходится, в промежутке $(0,1)$, к функции $f(x)$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x). \tag{2}$$

Задачей настоящей работы является исследование области сходимости последовательности полиномов $P_n(x)$ на плоскости комплексного переменного. В теореме I мы даем непосредственное доказательство сходимости последовательности (1) к функции $f(x)$ на всей плоскости в том случае, когда функция $f(x)$ целая. В теореме II, пользуясь известным результатом об области сходимости разложения по полиномам Чебышева, мы уста-

* S. Bernstein. Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. Сообщ. Харьк. мат. общ. сер. II, т. XXIII № 1 и диссертация: О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов. Ibid., № 4—5, добавл. к гл. V., стр. 120—126.

навливаем, что в этой же области к $f(x)$ сходится и последовательность (1). Наконец, в теоремах III и IV мы даем доказательство того, что сходимость последовательности (1) за пределами основного интервала имеет место и в том случае, когда функция $f(x)$ носит аналитический характер и регулярна лишь на части этого промежутка.

Для проведения формальных преобразований в теореме I нам понадобится следующее вспомогательное предложение:

Лемма. *Если положить:*

$$P_{n,\nu}=\sum_{l=0}^{n} C_n^l(-1)^l l^\nu,$$

то: 1) *при* $\nu \geqslant n$; $|P_{n,\nu}|<2^n n^\nu$ 2) *при* $\nu<n$; $P_{n,\nu}=0$.

Не останавливаясь на доказательстве этого элементарного предложения переходим к изложению первой теоремы:

Теорема I. *Если $f(x)$ целая функция, то последовательность полиномов Бернштейна* (1) *сходится к ней на всей плоскости и сходимость равномерная в любой конечной замкнутой области.*

Доказательство. Покажем, что соотношение (2) имеет место в круге $|x|<R$; для этого достаточно показать, что полиномы $P_n(x)$ равномерно ограничены в этом круге.

Так как $f(x)$ целая функция, то она разлагается в ряд:

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, \tag{3}$$

при этом числа a_j убывают быстрее любой прогрессии, а потому можно указать такое постоянное число K, чтобы для всех j выполнялось неравенство

$$|a_j|<\frac{K}{(2eR+1)^j}. \tag{4}$$

Составим теперь n-й полином Бернштейна для функции $f(x)$ преобразуем его тождественно и оценим затем в круге $|x|\leqslant R$. Имеем:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left(\frac{k}{n}\right)^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{n^j} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} k^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{n^j} \sum_{k=0}^{n} C_n^k k^j x^k \sum_{s=0}^{n-k} C_{n-k}^s (-1)^s x^s.$$

Беря за новые индексы суммирования $m = k + s$ и k получаем:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{n^j} \sum_{m=0}^{n} x^m \sum_{k=0}^{m} C_n^k k^j C_{n-k}^{m-k} (-1)^{m-k}.$$

Замечая далее, что

$$C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_n^m C_m^k,$$

находим:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{n^j} \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (-1)^m \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^k k^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{n^j} \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (-1)^m P_{m,j}.$$

По свойству 2) чисел $P_{m,j}$ (см. лемму) видим, что слагаемые второй суммы при $m > j$ обращаются в ноль, а потому:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{n^j} \sum_{m=0}^{\min[j,\, n]} x^m (-1)^m C_n^m P_{m,j}. \tag{5}$$

Оценим теперь $|P_n(x)|$ в круге $|x| \leqslant R$ пользуясь свойством (1) чисел $P_{m,j}$ и неравенством (4)

$$|P_n(x)| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \sum_{m=0}^{\min[j,\, n]} \frac{|x|^m}{n^{j-m}} \frac{n \ldots (n-m+1)}{n^m} \frac{m^j}{m!} 2^m \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \sum_{m=0}^{\min(j,\, n)} R^m 2^m \frac{m^m}{m!} \left(\frac{m}{n}\right)^{j-m},$$

так как $m \leqslant n$, то вторая дробь под знаком суммы < 1, а первая по неравенству Стирлинга $m^m < e^m m!$ не превосходит e^m, таким образом:

$$|P_n(x)| < \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \sum_{m=0}^{\min(j,\, n)} (2Re)^m \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \frac{Kj\,(2Re)^j}{(2eR+1)^j} = S(R).$$

Последний полученный ряд сходится и сумма его есть некоторое постоянное число зависящее только от R. Итак, все полиномы $P_n(x)$ в круге $|x| \leqslant R$ ограничены одним и тем же числом $S(R)$ и на промежутке $(0,1)$ по теореме С. Н. Берштейна сходятся к $f(x)$, в таком случае по известной теореме Vitali о последовательностях аналитических функций они сходятся к $f(x)$ равномерно во всем круге $|x| \leqslant R$, откуда следуют заключения теоремы.

Перейдем теперь к случаю произвольной аналитической функции $f(x)$, именно покажем следующее предложение:

Теорема II. *Если функция $f(x)$ регулярна вплоть до контура в некотором эллипсе (C) с фокусами $(0,1)$, то последовательность полиномов Бернштейна сходится равномерно в этом эллипсе к функции $f(x)$.*

Доказательство. Обозначим через $T_k(x)$ k-й полином Чебышева промежутка $(0,1)$ и через L_k и M_k верхнюю границу $|T_k(x)|$ в промежутке $(0,1)$ и на контуре (C).

Обозначим через $\pi_n^{(k)}(x)$ n-й полином Бернштейна для $T_k(x)$, т. е.

$$(6) \qquad \pi_n^{(k)}(x) = P_n[T_k(x)] = \sum_{s=0}^{n} C_n^s x^s (1-x)^{n-s} T_k\left(\frac{s}{n}\right) \cdot$$

На промежутке (0,1) имеем:

$$|\pi_n^{(k)}(x)| \leqslant \sum_{s=0}^{n} C_n^s x^s (1-x)^{n-s} \left| T_k\left(\frac{s}{n}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=0}^{n} C_n^s x^s (1-x)^{n-s} L_k = L_k.$$

Таким образом полином $\pi_n^{(k)}(x)$ степени не выше k* уклоняется от нуля на промежутке (0,1) не более чем $T_k(x)$; в таком случае, как известно, он должен иметь не большее уклонение и на эллипсе (C),** т. е.

$$\max |\pi_n^{(k)}(x)| \leqslant M_k. \tag{7}$$

Известно далее, что функция $f(x)$ может быть разложена в эллипсе (C) в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по полиномам Чебышева:***

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k T_k(x). \tag{8}$$

При этом из характера сходимости ряда (8) вытекает и сходимость ряда:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| M_k = M. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь n-й полином Бернштейна для $f(x)$, по (6) и (8)

$$P_n(x) = P_n[f(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} b_k P_n[T_k(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \pi_n^{(k)}(x).$$

* То, что полином $\pi_n^{(k)}(x)$ имеет степень не выше k при любом n получается сразу из (5). Действительно, если вместо $f(x)$ взять полином $T_k(x)$ k'ой степени, то j, а потому и m, не превзойдет k.

** Здесь мы пользуемся одним предложением, представляющим непосредственное следствие из теоремы Бернштейна (диссертация, стр. 61—62). Именно следующим: из всех полиномов имеющих данное уклонение на эллипсе с фокусами (α, β) наименее уклоняется от нуля в промежутке (α, β) полином Чебышева.

*** С. Н. Бернштейн. Диссертация, стр. 178; Ср. G. Faber. Über Tschebyscheffsche Polynome. Journ. f. d. reine u. ang. Math. Bd. 150, S. 79; спец. стр. 83 и 87.

Воспользовавшись теперь неравенством (7) имеем в эллипсе (C):

$$|P_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| M_k = M.$$

Таким образом, все полиномы $P_n(x)$ в эллипсе (C) ограничены по модулю одним и тем же числом, а потому пользуясь опять теоремой Vitali заключаем, что они равномерно сходятся к функции $f(x)$ в этом эллипсе.

Перейдем теперь к случаю функции $f(x)$ аналитической лишь на части интервала $(0,1)$.

Теорема III. *Если $f(x)$ функция заданная в промежутке* $(0,1)$ *ограниченная в этом промежутке и на части его, именно в некотором промежутке* (λ_1,λ_2), *совпадающая с функцией* $\varphi(x)$ *аналитической в промежутке* $(0,1)$ *и вблизи него, то последовательность полиномов Бернштейна для функции* $f(x)$ *будет сходиться в некоторой определенной области вблизи промежутка* (λ_1,λ_2) *к функции* $\varphi(x)$.

Доказательство. Функция $\varphi(x)$, согласно условиям теоремы, будет регулярна в некотором эллипсе (C) с фокусами $(0,1)$.

Рассмотрим две лемнискаты проходящие через точки λ_1 и λ_2:

$$(10) \qquad (L_1) \quad \left|\frac{x}{\lambda_1}\right|^{\lambda_1} \left|\frac{1-x}{1-\lambda_1}\right|^{1-\lambda_1} = 1; \qquad (L_2) \quad \left|\frac{x}{\lambda_2}\right|^{\lambda_2} \left|\frac{1-x}{1-\lambda_2}\right|^{1-\lambda_2} = 1.$$

Покажем, что сходимость полиномов $P_n(x)$ к функции $\varphi(x)$ имеет место в области D представляющей общую часть эллипса (C) и тех частей лемнискат (L_1) и (L_2), которые содержат промежуток (λ_1, λ_2).

Рассмотрим полиномы Бернштейна для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$:

$$(11) \qquad P_n(x) = P_n[f(x)] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right);$$

$$\pi_n(x) = P_n[\varphi(x)] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \varphi\left(\frac{k}{n}\right).$$

По теореме II при достаточно больших n имеем в эллипсе (C):

$$|\pi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \qquad (n > N).$$

Введем теперь интересующее нас выражение:

$$|P_n(x)-\varphi(x)| \leqslant |P_n(x)-\pi_n(x)| +$$

$$+\varepsilon \leqslant \sum_{k=0}^{k<n\lambda_1} |C_n^k x^k (1-x)^{n-k}| \left(\left| f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + \left|\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right| \right) +$$

$$+ \sum_{k<n\lambda_2}^{n} |C_n^k x^k (1-x)^{n-k}| \left(\left| f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + \left|\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right| \right) +$$

$$+\varepsilon \leqslant 2M \sum_{k<n\lambda_1} \left|\frac{x}{\lambda_1}\right|^k \left|\frac{1-x}{1-\lambda_1}\right|^{n-k} + 2M \sum_{k>n\lambda_2} \left|\frac{x}{\lambda_2}\right|^k \left|\frac{1-x}{1-\lambda_2}\right|^{n-k} + \varepsilon.$$

Здесь M обозначает верхнюю границу $|f(x)|$ и $|\varphi(x)|$ в $(0,1)$.

Нам нужно показать, что написанные суммы малы. Оценим, например, первую из них. Так как точка x внутри (L_1), то

$$\left|\frac{x}{\lambda_1}\right|^{\lambda_1} \left|\frac{1-x}{1-\lambda_1}\right|^{1-\lambda_1} = q < 1,$$

отсюда

$$q = \left|\frac{x}{\lambda_1}\right| \left(\left|\frac{1-x}{x}\right| \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1} \right)^{1-\lambda_1}$$

или

$$\left|\frac{1-x}{x}\right| \left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1}\right) = \left(q\left|\frac{\lambda_1}{x}\right|\right)^{\frac{1}{1-\lambda_1}} = \tau < 1,$$

так как $|x| > \lambda_1$. Оценим теперь любое слагаемое первой суммы:

$$(12)\quad \left|\frac{x}{\lambda_1}\right|^k \left|\frac{1-x}{1-\lambda_1}\right|^{n-k} = q^n \left(\left|\frac{1-x}{x}\right| \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1} \right)^{\lambda_1 n-k} = q^n \tau^{\lambda_1 n-k} < q^n < 1.$$

Итак каждое слагаемое первой суммы и совершенно аналогично и второй суммы не превосходит q^n, таким образом правая часть неравенства не превосходит $(2Mnq^n+\varepsilon)$, т. е. сколь угодно мала, а потому в области D:

$$(13)\quad \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \varphi(x).$$

В последней теореме мы поставили требование, чтобы функция $\varphi(x)$ была регулярна не только в промежутке (λ_1, λ_2), но и во всем промежутке $(0,1)$, теперь мы покажем, что от последнего ограничения можно освободиться.

Теорема IV. *Если $f(x)$ функция регулярная на промежутке $(\lambda_1 \lambda_2)$ и вблизи него $[0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant 1]$ и ограниченная на всем промежутке $(0,1)$, то последовательность полиномов $P_n(x)$ сходится к ней в некоторой области вблизи этого промежутка.*

Доказательство. Обозначим через $C_\rho\, [\rho > 1]$ эллипс с фокусами (λ_1, λ_2), у которого отношение суммы полуосей к фокальному расстоянию равно ρ. Положим $\rho(x) = \rho$ для точек лежащих на эллипсе C_ρ.

Так как функция $f(x)$ регулярна вблизи (λ_1, λ_2), то она будет регулярна и в некотором эллипсе C_{ρ_0}. Выберем теперь такое постоянное $A > 2$, чтобы при всех ξ не лежащих в промежутке $(\lambda_1 \lambda_2)$:

$$(14)\quad \left[\left(\frac{\lambda_1}{\xi}\right)^{\xi}\left(\frac{1-\lambda_1}{1-\xi}\right)^{1-\xi}\right]^{A}\cdot\rho(\xi) < \sqrt{\rho_0};\quad \left[\left(\frac{\lambda_2}{\xi}\right)^{\xi}\left(\frac{1-\lambda_2}{1-\xi}\right)^{1-\xi}\right]^{A}\rho(\xi) < \sqrt{\rho_0},$$

как нетрудно видеть такое A можно найти, так как если ξ не совпадает с λ_1 или λ_2, то первый множитель меньше 1, а если совпадает, то оба обращаются в 1.

Положим теперь $\rho_1 = \rho_0^{\frac{1}{A}}$ и покажем, что полиномы $P_n(x)$ сходятся к $f(x)$ в области B, представляющей общую часть эллипса C_{ρ_1} и тех частей лемнискат (10), которые содержат промежуток (λ_1, λ_2).

Для этого нужно показать, что в указанной области полиномы (1) ограничены в совокупности. Достаточно показать это относительно полиномов

$$(15)\qquad \bar{P}_n(x) = \bar{P}_n\,[f(x)] = \sum_{\lambda_1 n \leqslant k \leqslant \lambda_2 n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

так как разность $\bar{P}_n(x) - P_n(x)$ в области ограниченной лемнискатами (10) сколь угодно мала при достаточно большом n, как это вытекает из рассуждений теоремы III.

Обозначим через $T_k(x)$ к-й полином Чебышева для промежутка (λ_1, λ_2); через L_k и $M_\rho^{(k)}$ верхнюю границу его модуля на промежутке (λ_1, λ_2) и на эллипсе C_ρ, тогда, как известно *

$$\frac{L_k}{2}\rho^k < M_\rho^{(k)} < L_k \rho^k. \tag{16}$$

Введем еще обозначения:

$$\pi_n^{(k)}(x) = P_n[T_k(x)]; \tag{17}$$

$$\overline{\pi}_n^{(k)}(x) = \overline{P}_n[T_k(x)] = \sum_{\lambda_1 n \leqslant s \leqslant \lambda_2 n} C_n^s x^s (1-x)^{n-s} T_k\left(\frac{s}{n}\right).$$

Отметим, что полином $\pi_n^{(k)}(x)$ не выше k-й степени, а полином $\overline{\pi}_n^{(k)}(x)$ на промежутке (λ_1, λ_2) не превосходит по модулю L_k. Оценим полином $\overline{\pi}_n^{(k)}(x)$ в области B.

Если $n < kA$, то полином $\overline{\pi}_n^{(k)}(x)$, который на (λ_1, λ_2) не превосходит L_k, на эллипсе C_{ρ_1}, а потому и в B не превзойдет, как известно,** следующей величины:

$$|\overline{\pi}_n^{(k)}(x)| < L_k \rho_1^n = L_k \rho_0^{\frac{n}{A}} \qquad [n < kA]. \tag{18}$$

Пусть $n \geqslant kA$. Оценим сначала в области B разность

$$\pi_n^{(k)}(x) - \overline{\pi}_n^{(k)}(x) = \sum_{s=0}^{s<\lambda_1 n} C_n^s x^s (1-x)^{n-s} T_k\left(\frac{s}{n}\right) +$$

$$+ \sum_{s>\lambda_2 n}^{n} C_n^s x^s (1-x)^{n-s} T_k\left(\frac{s}{n}\right).$$

* С. Н. Бернштейн, l. c., стр. 62. G. Faber, l. c., S. 85.

** Бернштейн, l. c., стр. 62. Мы пользуемся здесь следующим предложением: если $P(x)$ полином степени не выше n, который на промежутке (α, β) не превосходит L, то на эллипсе C с фокусами (α, β) она не превзойдет LR^n, где R отношение суммы полуосей (C) к его фокальному расстоянию.

Ограничиваясь, например, оценкой первой суммы, пользуясь (10), (12), (14) и (16) имеем

$$\left|\sum_{s=0}^{s<\lambda_1 n} C_n^s x^s (1-x)^{n-s} T_k\left(\frac{s}{n}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=0}^{s<\lambda_1 n} C_n^s \lambda_1^s (1-\lambda_1)^{n-s} \left|\frac{x}{\lambda_1}\right|^s \left|\frac{1-x}{1-\lambda_1}\right|^{n-s} \left|T_k\left(\frac{s}{n}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=0}^{s<\lambda_1 n} C_n^s \lambda_1^s (1-\lambda_1)^{n-s} \left|T_k\left(\frac{s}{n}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=0}^{s<\lambda_1 n} \frac{C_n^s \lambda_1^s (1-\lambda_1)^{n-s}}{C_n^s \left(\frac{s}{n}\right)^s \left(1-\frac{s}{n}\right)^{n-s}} L_k \left[\rho\left(\frac{s}{n}\right)\right]^k C_n^s \left(\frac{s}{n}\right)^s \left(1-\frac{s}{n}\right)^{n-s} =$$

$$= L_k \sum_{s=0}^{s<\lambda_1 n} \left\{\left[\left(\frac{\lambda_1}{\frac{s}{n}}\right)^{\frac{s}{n}} \left(\frac{1-\lambda_1}{1-\frac{s}{n}}\right)^{1-\frac{s}{n}}\right]^A \rho\left(\frac{s}{n}\right)\right\}^k \left[\left(\frac{\lambda_1}{\frac{s}{n}}\right)^{\frac{s}{n}} \left(\frac{1-\lambda_1}{1-\frac{s}{n}}\right)^{1-\frac{s}{n}}\right]^{n-kA} C_n^s \left(\frac{s}{n}\right)^s \left(1-\frac{s}{n}\right)^{n-s}$$

$$< L_k Mk(\sqrt{\rho_0})^k. *$$

Наконец, принимая во внимание и вторую сумму, находим в B:

(19) $$|\pi_n^{(k)}(x) - \overline{\pi}_n^{(k)}(x)| < L_k k M_1 (\sqrt{\rho_0})^k \qquad [n > kA].$$

Так как $\overline{\pi}_n^{(k)}(x)$ не превосходит на (λ_1, λ_2) по модулю L_k, а

$$[\pi_n^{(k)}(x) - \overline{\pi}_n^{(k)}(x)]$$

выражения (19), то $\pi_n^{(k)}$ на (λ_1, λ_2) не превзойдет при $n > kA$:

(20) $$|\pi_n^{(k)}(x)| \leqslant L_k (k M_1 (\sqrt{\rho_0})^k + 1).$$

Благодаря этому, так как $\pi_n^{(k)}(x)$ полином степени не выше k, то на контуре C_{ρ_1}, а потому и в области B

(21) $$|\pi_n^{(k)}(x)| \leqslant L_k [k M_1 (\sqrt{\rho_0})^k + 1] \rho_1^k = L_k \left[k M_1 \rho_0^{k\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{A}\right)} + \rho_0^{\frac{k}{A}}\right].$$

* M обозначает здесь некоторую постоянную, получающуюся от оценки двух последних множителей.

Далее из (19) и (21) находим, что при $n > kA$ в B справедлива оценка:

$$|\overline{\pi}_n^{(k)}(x)| \leqslant |\pi_n^{(k)}(x)| + |\pi_n^{(k)}(x) - \overline{\pi}_n^{(k)}(x)| \leqslant \tag{22}$$

$$\leqslant L_k\left[kM_1\rho_0^{k\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{A}\right)} + kM_1\rho_0^{\frac{k}{2}} + \rho_0^{\frac{k}{A}}\right] < L_k kM_2\rho_0^{k\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{A}\right)}$$

При k достаточно большом $k > k_0$ это неравенство, так как $A > 2$, можно заменить другим:

$$|\overline{\pi}_n^{(k)}(x)| \leqslant L_k\rho_0^k \qquad [n \geqslant kA;\ k > k_0]. \tag{23}$$

Из (18) и (23) находим оценку верную при всех n и при $k > k_0$:

$$|\overline{\pi}_n^{(k)}(x)| \leqslant L_k\rho_0^k. \tag{24}$$

Перейдем теперь к оценке $\overline{P}_n(x)$. Так как функция $f(x)$ регулярна в эллипсе C_{ρ_0}, то она разлагается в нем в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по полиномам Чебышева $T_k(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k T_k(x), \tag{25}$$

причем в силу характера сходимости ряда (25) и неравенства (16) сходятся и ряды:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| M_{\rho_0}^{(k)} = M; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} L_k|b_k|\rho_0^k = R. \tag{26}$$

Тогда для $\overline{P}_n(x)$ в области B пользуясь (15), (17), (18), (22), (24), (25) и (26) найдем:

$$|\overline{P}_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |b_k||\overline{\pi}_n^{(k)}(x)| = \sum_{k=0}^{k_0} |b_k||\pi_n^{(k)}(x)| + \tag{27}$$

$$+ \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |b_k||\overline{\pi}_n^{(k)}(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{k_0} |b_k| L_k kM_2\rho_0^k +$$

$$+ \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |b_k| L_k\rho_0^k \leqslant k_0 M_2 L_{k_0} \rho_0^{k_0} \sum_{k=0}^{k_0} |b_k| + R,$$

т. е. что полиномы $\overline{P}_n(x)$, а потому и $P_n(x)$, ограничены в совокупности в области B. Отсюда пользуясь опять теоремой Vitali заключаем, что в области B полиномы $P_n(x)$ сходятся и $f(x)$.

Замечание I. Из последней теоремы вытекает, что, если $f(x)$ функция кусочно аналитическая, т. е. функция, которая на некотором промежутке (λ_1, λ_2) совпадает с аналитической функцией $f_1(x)$, на промежутке (λ_2, λ_3) с $f_2(x)$ и т. д., то последовательность полиномов $P_n(x)$ будет сходиться в различных областях к различным аналитическим функциям: вблизи (λ_1, λ_2) к $f_1(x)$, вблизи (λ_2, λ_3) к $f_2(x)$ и т. д. Заметим, что аналитического продолжения кусочно аналитических функций не дают другие известные разложения по полиномам, в частности разложения по ортогональным полиномам.

Замечание II. В теореме II было показано, что полиномы $P_n(x)$ сходятся к функции $f(x)$ в эллипсе C с фокусами $(0,1)$, в котором $f(x)$ регулярна. Для разложения по полиномам Чебышева наибольший такой эллипс является точной областью сходимости, для полиномов Бернштейна (1) это будет не так. Действительно, пусть $f(x)$ функция, имеющая особую точку вблизи промежутка $(0,1)$ $\left[\text{например } \frac{1}{x+0.01}\right]$, тогда указанный эллипс будет весьма близок к промежутку (0.1) [в примере эллипс (C) будет

$$\left.\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{0.2601}+\frac{y^2}{0.0101}=1\right].$$

Между тем теорема IV гарантирует вполне определенную область сходимости вблизи промежутка (λ_1, λ_2), зависящую только от чисел λ_1, λ_2, ρ_0, которые можно не ставить в зависимость от положения особой точки, а потому эта область выйдет за пределы эллипса (C) лишь только особая точка будет достаточно близка к промежутку $(0,1)$. В примере можно принять:

$$\lambda_1=\frac{1}{3}; \quad \lambda_2=\frac{2}{3}; \quad \rho_0=5.8; \quad A=2.1; \quad \rho_1=2;$$

и за C_{ρ_1} эллипс

$$\frac{576}{25}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+64y^2=1.$$

Уравнения лемнискат будут:

$$|x|^{\frac{1}{3}}\,|1-x|^{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$$

и

$$|x|^{\frac{2}{3}}\,|1-x|^{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}.$$

Тогда, как легко проверить, точка $\frac{1}{2}+\frac{1}{9}i$ лежит вне C и внутри C_{ρ_1} и обеих лемнискат, т. е. внутри области B, а потому $P_n(x)$ сходятся вблизи нее к функции $f(x)$, т. е. эллипс (C) не является точной областью сходимости.

21 VI 1931.