V. I. Vasyunin, Two classical theorems of function model theory via the coordinate-free approach, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1989, Volume 178, 5–22

В.И.Васюнин

ДВЕ КЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ О МОДЕЛИ В БЕСКООРДИНАТНОМ ИЗЛОЖЕНИИ

Настоящая заметка, имеющая чисто дидактический характер, посвящена изложению в рамках бескоординатной функциональной модели (см. [1], [2]) двух известных и широко используемых теорем Б.Секефальви-Надя и Ч.Фойаша, а именно: теоремы о связи инвариантных подпространств сжатия с регулярными факторизациями его характеристической функции и теоремы о подъеме коммутанта (а точнее - операторов, сплетающих пару сжатий).

Доказательство первой теоремы в существенном повторяет то доказательство, которое авторы приводят в своей монографии [3] , но существенным для нас пунктом будет выделение роли функциональных вложений и формулировка "промежуточного" критерия наличия инвариантного подпространства именно в терминах "дополнительного" функционального вложения.

Доказательства теоремы о подъеме я вообще приводить не буду. (Доказательство, которое не опирается на модель, приведено в той же монографии [3]). Нас будет больше интересовать вытекающая из теоремы о модели параметризация поднятых операторов, т.е. то, чему посвящена статья С.-Надя и Фойаша [4] . С.-Надь и Фойаш параметризовали поднятые операторы матричными элементами, естественно возникающими при использовании их модели. Однако эти параметры не являются независимыми. Преимущество предлагаемой параметризации видится в том, что, исходя из бескоординатной модели, мы естественно получаем несколько иные параметры и, например, вместо двух матричных элементов Надя-Фойаша, связанных неким соотношением, которое нельзя явно разрешить относительно какого-либо из параметров, мы используем один свободный параметр. При желании от бескоординатной модели нетрудно перейти к любой конкретной реализации, будь то модель Секефальви-Надя-Фойаша, де Бранжа-Ровняка, Павлова или любая другая.

1. Основные понятия и обозначения

Пусть T - вполне неунитарное сжатие, действующее в гильбертовом пространстве H . Действующий в более широком гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ унитарный оператор U будет унитарной дилатацией оператора T , т.е. будет удовлетворять соотношению $T^n = P_H U^n | H$, где P_H - ортопроектор в $\mathcal{H}$ на подпространство H . Мы будем предполагать дилатацию минимальной, т.е. будем предполагать, что минимальное U -приводящее подпространство, содержащее H , совпадает с $\mathcal{H}$. Пространство $\mathcal{H}$ имеет следующую структуру

$$\mathcal{H} = G_* \oplus H \oplus G$$

где G и G_- - это соответственно U- и U^*- инвариантные подпространства, причем из условия минимальности следует, что операторы $U|G$ и $U^*|G_*$ суть чистые изометрии. Реализация чистой изометрии как оператора умножения на независимую переменную в векторном пространстве Харди H^2 позволяет построить изометрические вложения

$$\pi: L^2(E) \longrightarrow \mathcal{H},$$

$$\pi_*: L^2(E_*) \longrightarrow \mathcal{H},$$

сплетающие оператор умножения на z в соответствующем пространстве L^2 (квадратично-суммируемых E- или E_*- значных функций на единичной окружности) с унитарной дилатацией U . При этом, отождествляя пространство Харди $H^2(E)$ с подпространством функций из $L^2(E)$, у которых коэффициенты Фурье с отрицательными номерами равны нулю, мы можем считать, что

$$\pi H^2(E) = G,$$

$$\pi_* H^2_-(E_*) = G_*,$$

где $H^2_-(E_*) = L^2(E_*) \ominus H^2(E_*)$. Поскольку оператор θ, $\theta \overset{def}{=} \pi_*^* \pi$, коммутирует с умножением на z (а точнее, сплетает оператор умножения на z в $L^2(E)$ с оператором умножения на z в $L^2(E_*)$) , он является оператором умножения на ограниченную функцию. А так как $\theta H^2(E) \subset H^2(E_*)$, то $\theta \in H^\infty(E \to E_*)$, т.е. θ - ограниченная аналитическая в единичном круге функция, принимающая значения в пространстве операторов, действующих из E в E_* . Функция θ называется характеристической функцией оператора T .

Каждая сжимающая операторно-значная аналитическая функция представляется в виде ортогональной суммы постоянного унитарного оператора и чистой сжимающей функции, т.е. такой функции θ , для которой $\|\theta(0)e\|_{E_*} < \|e\|_E$, $\forall e \in E$, $e \neq 0$. Характеристическая функция любого сжатия является чистой.

С сжимающей аналитической функцией θ мы будем ассоциировать $L^\infty(E \to E)$ - функцию Δ , $\Delta \overset{def}{=} (I - \theta^*\theta)^{1/2}$. Подпространство $\operatorname{clos} \Delta L^2(E)$ мы будем обозначать символом $L^2_\Delta(E)$.

Кроме вложений π и π_* мы будем использовать еще два изометрических оператора τ и τ_*, которые определяются равенствами

$$\tau\Delta = \pi - \pi_*\theta\,,$$

$$\tau_*\Delta_* = \pi_* - \pi\theta^*, \qquad (\Delta_* \stackrel{def}{=\!=} (I - \theta\theta^*)^{1/2}).$$

Операторы τ и τ_* изометрически вкладывают пространства $L^2_\Delta(E)$ и $L^2_{\Delta_*}(E_*)$ в $\mathcal{H}$, а точнее – на ортогональные дополнения образов $\pi_* L^2(E)$ и, соответственно, $\pi L^2(E)$. Подпространства $R \stackrel{def}{=\!=} \tau L^2_\Delta(E) = \mathcal{H} \ominus \pi L^2(E)$ и $R_* \stackrel{def}{=\!=} \tau_* L^2_{\Delta_*}(E_*) = \mathcal{H} \ominus \pi_* L^2(E_*)$ называются остаточной и $*$-остаточной частью пространства унитарной дилатации.

В заключение приведем несколько полезных формул, связывающих операторы π и τ.

$$\tau^*\pi = \Delta \qquad\qquad \tau_*^*\pi = 0$$

$$\tau^*\pi_* = 0 \qquad\qquad \tau_*^*\pi_* = \Delta_*$$

$$\tau\tau^* = I - \pi_*\pi_*^* \qquad\qquad \tau_*\tau_*^* = I - \pi\pi^*\,.$$

Эти формулы легко проверяются, используя непосредственно определения операторов τ, τ_*, θ и Δ.

Более подробно со всеми упомянутыми здесь понятиями можно познакомиться по работам [I] и [2].

2. Инвариантные подпространства, функциональные вложения и регулярные факторизации

ТЕОРЕМА. Пусть T – вполне неунитарное сжатие в гильбертовом пространстве H, θ – его характеристическая функция, π и π_* – функциональные вложения, введенные в предыдущем пункте. Существует взаимно однозначное соответствие между:

I) инвариантными подпространствами оператора T;

2) функциональными вложениями η, согласованными с вложениями π и π_*, т.е. такими изометрическими вложениями $\eta: L^2(F) \to \mathcal{H}$, сплетающими оператор умножения на z в $L^2(F)$ с унитарной дилатацией, для которых: $i)\ \eta^* G \subset H^2(F)$, $ii)\ \eta^* G_* \subset H^2_-(F)$, $iii)\ \pi_*^*(I - \eta\eta^*)\pi = 0$;

3) регулярными факторизациями характеристической функции θ, т.е. такими представлениями $\theta = \theta_2\theta_1$, для которых $\theta_1 \in H^\infty(E \to F)$, $\theta_2 \in H^\infty(F \to E_*)$, θ_i – сжимающие функции, и оператор Z, действующий из $L^2_\Delta(E)$ в $L^2_{\Delta_1}(E) \oplus L^2_{\Delta_2}(F)$ и определя-

емый тождеством

$$Z_\Delta u = \Delta_1 u \oplus \Delta_2 \theta_1 u ,$$

является унитарным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы будет разбито на серию лемм, и начнем мы с изучения той дополнительной структуры в пространстве минимальной унитарной дилатации $\mathcal{H}$, которую привносит наличие у оператора T инвариантного подпространства H_1. Введем обозначения:

$$T_1 \overset{def}{=\!=} T|H_1 , \quad H_2 \overset{def}{=\!=} H \ominus H_1 , \quad T_2 \overset{def}{=\!=} P_{H_2} T | H_2 ,$$

$$\mathcal{H}_k \overset{def}{=\!=} span\{U^n H_k : n \in \mathbb{Z}\}, \qquad U_k = U | \mathcal{H}_k .$$

2.I. ЛЕММА. U_k - минимальная унитарная дилатация оператора T_k, $k = 1,2$. ●

В дальнейшем без специального пояснения объекты, относящиеся к операторам T_1 и T_2 будут помечаться индексами I и 2. Так, например, соответствующее разложению $\mathcal{H} = G_* \oplus H \oplus G$ разложение пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ будет $\mathcal{H}_k = G_{k*} \oplus H_k \oplus G_k$.

В нижеследующих леммах доказательства будут проводиться только для объектов с индексом I. Утверждения, касающиеся оператора T_2 получаются простой заменой оператора T на T^*.

2.2. ЛЕММА. $G_1 \subset G$, $G_{*2} \subset G_*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$G_1 \oplus H_1 = span\{U_1^n H_1 : n \geq 0\} \subset span\{U^n H : n \geq 0\} = G \oplus H .$$

Пусть h_k - произвольные векторы из H_k, тогда

$$(U_1^n h_1, h_2) = (P_H U^n h_1, h_2) = (T^n h_1, h_2) = (T_1^n h_1, h_2) = 0 ,$$

т.е. $G_1 \oplus H_1 \perp H_2$, а следовательно $G_1 \oplus H_1 \subset G \oplus H_1$ и $G_1 \subset G$ ● .

2.3. ЛЕММА. $G \ominus G_1 \in Lat\, U$, $G_* \ominus G_{*2} \in Lat\, U^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in G \ominus G_1$, $h_1 \in H_1$. Тогда

$Ug \in G$, $h_1 \in H \Longrightarrow (Ug, h_1) = 0$;

$g \in G \ominus G_1$, $U^n h_1 \in G_1 \oplus H_1 \Longrightarrow (Ug, U^{n+1} h_1) = (g, U^n h_1) = 0$ для всех n, $n \geq 0$. Таким образом $Ug \perp U^n h_1$, т.е. $Ug \perp G_1 \oplus H_1$ и, следовательно, $Ug \in G \ominus G_1$ ● .

2.4. ЛЕММА. Существует подпространство E_1 в E, такое что $G_1=\pi H^2(E_1)$, т.е. вложение π_1 может быть выбрано равным $\pi|L^2(E_1)$.

Существует подпространство E_{*2} в E_*, такое что $G_{*2}=\pi_* H^2_-(E_{*2})$, т.е. вложение π_{*2} может быть выбрано равным $\pi_*|L^2(E_{*2})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $G_1\in \mathrm{Lat}\, U \Longrightarrow \pi^* G_1\in \mathrm{Lat}(z|H^2(E))$ и, следовательно, по теореме Бёрлинга-Лакса $\pi^*G_1=\varphi H^2(E')$ для некоторого вспомогательного пространства E' и внутренней функции φ, $\varphi\in H^\infty(E'\longrightarrow E)$.

Но, поскольку по лемме 2.3 $G\ominus G_1\in \mathrm{Lat}\, U$, т.е. $\pi^*(G\ominus G_1)\in \mathrm{Lat}(z|H^2(E))$, то для некоторой внутренней функции ψ, $\psi\in H^\infty(E''\longrightarrow E)$, справедливо равенство $\pi^*(G\ominus G_1)=\psi H^2(E'')$. Таким образом

$$H^2(E)=\pi^*G=(\varphi,\psi)H^2(E'\oplus E''),$$

и, следовательно, (φ,ψ) – постоянный унитарный оператор. Выбирая $E_1\overset{def}{=\!=}\varphi E'$, получаем требуемое представление:

$$G_1=\pi H^2(E_1). \ \bullet$$

2.5. ЛЕММА. Пусть $G\oplus H_1=\eta H^2(F)\oplus R_1$ – разложение Вольда для изометрического оператора $U|G\oplus H_1$. Здесь η – изометрическое вложение пространства $H^2(F)$ в $G\oplus H_1$, сплетающее оператор умножения на z в $H^2(F)$ с вполне неунитарной частью оператора $U|G\oplus H_1$. Тогда

1) $\mathcal{H}=\eta L^2(F)\oplus R_1\oplus R_{*2}$.

2) $R_1=\tau_1 L^2_{\Delta_1}(E_1)\subset \tau L^2_\Delta(E)$;

$R_{*2}=\tau_{*2}L^2_{\Delta_{*2}}(E_{*2})\subset\tau_* L^2_{\Delta_*}(E_*)$.

3) Существуют изометрические отображения

$$i:\ E_1^\perp\oplus E_{*1}\xrightarrow{\text{НА}} F \qquad (E_1^\perp\overset{def}{=\!=}E\ominus E_1)$$

$$i_*:\ E_{*2}^\perp\oplus E_2\xrightarrow{\text{НА}} F \qquad (E_{*2}^\perp\overset{def}{=\!=}E_*\ominus E_{*2}),$$

такие что

$$\eta=(\pi|L^2(E_1^\perp),\ \pi_{*1})\,i^*=(\pi_*|L^2(E_{*2}^\perp),\ \pi_2)\,i_*^*.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\eta H^2(F)\oplus R_1=G\oplus H_1=(G\ominus G_1)\oplus(G_1\oplus H_1).$$

Используя функциональные вложения относящиеся к оператору T_1, можно записать:

$$G_1 \oplus H_1 = \mathcal{H}_1 \ominus G_{*1} = (\pi_{*1} L^2(E_{*1}) \oplus \tau_1 L^2_{\Delta_1}(E_1)) \ominus \pi_{*1} H^2_-(E_{*1}) =$$
$$= \pi_{*1} H^2(E_{*1}) \oplus \tau_1 L^2_{\Delta_1}(E_1);$$

а по лемме 2.4 $G \ominus G_1 = \pi H^2(E) \ominus \pi H^2(E_1) = \pi H^2(E_1^{\perp})$, следовательно,

$$\eta H^2(F) \oplus R_1 = \pi H^2(E_1^{\perp}) \oplus \pi_{*1} H^2(E_{*1}) \oplus \tau_1 L^2_{\Delta_1}(E_1).$$

Итак, приводящее подпространство R_1 совпадает с подпространством $\tau_1 L^2_{\Delta_1}(E_1)$, т.е. с остаточной частью пространства $\mathcal{H}_1$, а вполне неприводящее $\eta H^2(F)$ равно $\pi H^2(E_1^{\perp}) \oplus \pi_{*1} H^2(E_{*1})$.

Определим равенством $i \overset{def}{=\!=} \eta^*(\pi | L^2(E_1^{\perp}), \pi_{*1})$ оператор i, сплетающий оператор умножения на z в $L^2(E_1^{\perp} \oplus E_{*1})$ с оператором умножения на z в $L^2(F)$, т.е. оператор i является оператором умножения на ограниченную операторнозначную функцию. Но поскольку $i H^2(E_1^{\perp} \oplus E_{*1}) = H^2(F)$, функция i является постоянным оператором. И так как $Range\, \eta \subset \subset Range(\pi | L^2(E_1^{\perp}), \pi_{*1})$, то проектор $\eta\eta^*$ является тождественным оператором на подпространстве $Range(\pi | L^2(E_1^{\perp}), \pi_{*1})$, а следовательно $i^* i = I$, т.е. i - изометрически отображает $E_1^{\perp} \oplus E_{*1}$ на F и $\eta = (\pi | L^2(E_1^{\perp}), \pi_{*1}) i^*$.

Определим пространство R_{*2}, как $*$-остаточную часть пространства $\mathcal{H}_2$, т.е. $R_{*2} = \tau_{*2} L^2_{\Delta_{*2}}(E_{*2})$ и покажем, что разложение $\eta H^2_-(F) \oplus R_{*2}$ является разложением Вольда пространства $G_* \oplus H_2$ для оператора $U^* | G_* \oplus H_2$. Действительно,

$$G_* \oplus H_2 = (G_* \ominus G_{*2}) \oplus (G_{*2} \oplus H_2) = \pi_* H^2_-(E_{*2}^{\perp}) \oplus$$
$$\oplus (\pi_2 H^2_-(E_2) \oplus \tau_{*2} L^2_{\Delta_{*2}}(E_{*2})) = (\pi_*, \pi_2) H^2_-(E_{*2}^{\perp} \oplus E_2) \oplus R_{*2},$$

т.е. R_{*2} действительно является максимальным приводящим подпространством изометрии $U^* | G_* \oplus H_2$. Поэтому

$$R_{*2} = \bigcap_{n \geq 0} U^{*n}(G_* \oplus H_2) = \mathcal{H} \ominus \bigcup_{n \geq 0} U^{*n}(\mathcal{H} \ominus (G_* \oplus H_2)) =$$
$$= \mathcal{H} \ominus \bigcup_{n \geq 0} U^{*n}(G \oplus H_1) = \mathcal{H} \ominus (\eta L^2(F) \oplus R_1),$$

т.е. $\mathcal{H} = \eta L^2(F) \oplus R_1 \oplus R_{*2}$ и утверждение I) леммы доказано.

В утверждении 2) нам осталось доказать включения $R_1 \subset R$ и $R_{*2} \subset R_*$, которые проверяются тривиально:

$$R_1 = \bigcap_{n\geqslant 0} U^n(G\oplus H_1) \subset \bigcap_{n\geqslant 0} U^n(G\oplus H) = R\,;$$

$$R_{*2} = \bigcap_{n\geqslant 0} U^{*n}(G_*\oplus H_2) \subset \bigcap_{n\geqslant 0} U^{*n}(G_*\oplus H) = R_* \;.$$

Для завершения доказательства леммы осталось построить унитарный оператор $i_* : E_{*2}^{\perp}\oplus E_2 \longrightarrow F$. Искомый оператор определим равенством

$$i_* \stackrel{def}{=\!=} \eta^*(\pi_* | L^2(E_{*2}^{\perp}),\ \pi_2)\ .$$

Ясно, что это выражение задает оператор умножения на функцию из $L^{\infty}(E_{*2}^{\perp}\oplus E_2 \longrightarrow F)$. Проверка того, что эта функция является унитарной константой, аналогична проверке этого факта для функции i и опирается на тождество $\eta H_-^2(F) = \pi_* H_-^2(E_{*2}^{\perp}) \oplus \pi_* H_-^2(E_2)$, которое нетрудно вывести из уже полученных равенств:

$$\pi_* H_-^2(E_{*2}^{\perp}) \oplus \pi_* H_-^2(E_2) = (G_*\oplus H_2)\ominus R_{*2} =$$

$$= (\mathcal{H}\ominus(G\oplus H_1))\ominus R_{*2} = [(\eta L^2(F)\oplus R_1\oplus R_{*2})\ominus(\eta H^2(F)\oplus R_1)]\ominus$$

$$\ominus R_{*2} = [\eta H_-^2(F)\oplus R_{*2}]\ominus R_{*2} = \eta H_-^2(F)\ . \quad \bullet$$

2.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Ортогональность подпространств $\pi_{*1} H^2(E_{*1})$ и $\pi H^2(E_1^{\perp})$ влечет тождество $\pi_{*1}^* \pi | L^2(E_1^{\perp}) = 0$, а из определения $\pi_1 = \pi | L^2(E_1)$ вытекает равенство $\pi_1^* \pi | L^2(E_1^{\perp}) = 0$. Аналогично справедливы тождества

$$\pi_2^* \pi_* | L^2(E_{*2}^{\perp}) = 0\,, \qquad \pi_{*2}^* \pi_* | L^2(E_{*2}^{\perp}) = 0\ .$$

2.7. СЛЕДСТВИЕ. Характеристические функции операторов T_1 и T_2 совпадают с чистыми частями аналитических сжимающих функций $\eta^*\pi$ и $\pi_*^*\eta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\eta^*\pi = i(\pi | L^2(E_1^{\perp}), \pi_{*1})^*(\pi | L^2(E_1^{\perp}), \pi_1) = i\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \pi_{*1}^*\pi_1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_*^*\eta = (\pi_* | L^2(E_{*2}^{\perp}), \pi_{*2})^*(\pi_* | L^2(E_{*2}^{\perp}), \pi_2)\, i_*^* = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \pi_{*2}^*\pi_2 \end{pmatrix} i_*^*\ . \quad \bullet$$

Итак мы построили функциональное вложение η и подготовили все, чтобы проверить наличие требуемых в теореме свойств i)- - iii).

2.8. ЛЕММА.

$i)$ $\eta^* G \subset H^2(F)$;

$ii)$ $\eta^* G_* \subset H^2_-(F)$;

$iii)$ $\pi^*_*(I - \eta\eta^*)\pi = 0$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения $i)$ и $ii)$ вытекают из включений

$$G \subset \eta H^2(F) \oplus R_1 \ , \quad G_* \subset \eta H^2_-(F) \oplus R_{*2} \ .$$

Для проверки тождества $iii)$ нужно привлечь утверждения I) и 2) леммы 2.5. Согласно утверждению I) оператор $I - \eta\eta^*$ является проектором на подпространство $R_1 \oplus R_{*2}$, т.е. $I - \eta\eta^* = \tau_1\tau_1^* + \tau_{*2}\tau_{*2}^*$. А включения $R_1 \subset R$ и $R_{*2} \subset R_*$ равносильны равенствам $\pi_*^*\tau_1 = 0$ и $\pi^*\tau_{*2} = 0$. Поэтому

$$\pi^*_*(I - \eta\eta^*)\pi = \pi^*_*(\tau_1\tau_1^* + \tau_{*2}\tau_{*2}^*)\pi = 0. \ \bullet$$

Итак, задавшись инвариантным подпространством H_1 мы построили отвечающее ему функциональное вложение η. Переход от функционального вложения к регулярной факторизации совсем прост: достаточно положить $\theta_1 = \eta^*\pi$, $\theta_2 = \pi^*_*\eta$. Условие $i)$ обеспечивает аналитичность функции θ_1, действительно: $\theta_1 H^2(E) = \eta^*\pi H^2(E) = \eta^* G \subset H^2(F)$, откуда $\theta_1 \in H^\infty(E \to F)$. Аналогично из условия $ii)$ вытекает аналитичность фунции θ_2: $\theta_2 \in H^\infty(F \to E_*)$. Условие $iii)$ собственно и есть условие факторизации: $\theta = \theta_2\theta_1$. Осталось проверить регулярность факторизации.

2.9. ЛЕММА. Пусть η - изометрическое вложение пространства $L^2(F)$ в $\mathcal{H}$, сплетающее оператор умножения на z в $L^2(F)$ с минимальной унитарной дилатацией U.

Пусть $\theta_1 = \eta^*\pi$, $\theta_2 = \pi^*_*\eta$, $\Delta_k = (I - \theta_k^*\theta_k)^{1/2}$ и оператор Z, действующий из $L^2_\Delta(E)$ в $L^2_{\Delta_1}(E) \oplus L^2_{\Delta_2}(F)$ определен на плотном множестве векторов вида Δu. формулой

$$Z\Delta u = \Delta_1 u \oplus \Delta_2\theta_1 u.$$

Тогда, если оператор η удовлетворяет соотношению $\pi^*_*(I - \eta\eta^*)\pi = 0$, то оператор Z является унитарным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем оператор Z в матричном виде

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \ , \quad Z_1\Delta = \Delta_1 , \quad Z_2\Delta = \Delta_2\theta_1 \ .$$

Условие $\pi^*_*(I - \eta\eta^*)\pi = 0$ обеспечивает факторизацию

$\theta = \theta_2 \theta_1$, а, следовательно, и изометричность оператора Z :

$$\Delta Z^* Z \Delta = \Delta_1^2 + \theta_1^* \Delta_2^2 \theta_1 = I - \theta_1^* \theta_2^* \theta_2 \theta_1 = \Delta^2 ,$$

откуда, в силу плотности множества $\Delta L^2(E)$ в пространстве $L^2_\Delta(E)$, получаем тождество $Z^* Z = I \mid L^2_\Delta(E)$.

Таким образом, оператор $Z Z^*$ является проектором, и достаточно проверить, что $Z_1 Z_1^* = I \mid L^2_{\Delta_1}(E)$ и $Z_2 Z_2^* = I \mid L^2_{\Delta_2}(F)$, поскольку тогда автоматически $Z_1 Z_2^* = 0$.

$$\Delta_1 Z_1 \Delta = \Delta_1^2 = I - \pi^* \eta \eta^* \pi = \pi^* (I - \eta \eta^*) \pi =$$

$$= \pi^* (I - \eta \eta^*)(\tau \Delta + \pi_* \theta) = \pi^* (I - \eta \eta^*) \tau \Delta .$$

Итак $\Delta_1 Z_1 = \pi^* (I - \eta \eta^*) \tau$, поэтому

$$\Delta_1 Z_1 Z_1^* \Delta_1 = \pi^* (I - \eta\eta^*) \tau \tau^* (I - \eta \eta^*) \pi =$$

$$= \pi^* (I - \eta \eta^*)(I - \pi_* \pi_*^*)(I - \eta \eta^*) \pi = \pi^* (I - \eta \eta^*)^2 \pi =$$

$$= \pi^* (I - \eta \eta^*) \pi = \Delta_1^2 .$$

Откуда опять же в силу плотности множества $\Delta_1 L^2(E)$ в $L^2_{\Delta_1}(E)$ получаем тождество $Z_1 Z_1^* = I \mid L^2_{\Delta_1}(E)$.

Далее

$$\Delta_2 Z_2 \Delta = \Delta_2^2 \theta_1 = \theta_1 - \theta_2^* \theta = \eta^* \pi - (\eta^* \pi_*)(\pi_*^* \pi) =$$

$$= \eta^* (I - \pi_* \pi_*^*) \pi = \eta^* \tau \tau^* \pi = \eta^* \tau \Delta ,$$

Откуда $\Delta_2 Z_2 = \eta^* \tau$ и

$$\Delta_2 Z_2 Z_2^* \Delta_2 = \eta^* \tau \tau^* \eta = \eta^* (I - \pi_* \pi_*^*) \eta = \Delta_2^2 ,$$

т.е. $Z_2 Z_2^* = I \mid L^2_{\Delta_2}(F)$. ●

Построение инвариантного подпространства по заданной регулярной факторизации $\theta = \theta_2 \theta_1$ проще всего осуществляется выбором конкретной функциональной модели, а именно:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} L^2(E_*) \\ L^2_{\Delta_1}(E) \\ L^2_{\Delta_2}(F) \end{pmatrix} , \qquad \pi = \begin{pmatrix} \theta \\ Z\Delta \end{pmatrix} , \qquad \pi_* = \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Изометричность операторов π и π_* очевидна, $\pi_*^* \pi = \theta$ и

$$span(\pi_* L^2(E_*),\ \pi L^2(E)) = L^2(E_*) \oplus Z L^2_\Delta(E) = \mathcal{H},$$
поэтому пространство
$$H = \mathcal{H} \ominus (\pi H^2(E) \oplus \pi_* H^2_-(E_*))$$
является модельным пространством для оператора с характеристической функцией θ, в котором оператор представляется как компрессия своей унитарной дилатации: $T = P_H z | H$.

Разложение $H = H_2 \oplus H_1$, где
$$H_2 = \begin{pmatrix} H^2(E_*) \\ 0 \\ L^2_{\Delta_2}(F) \end{pmatrix} \ominus \begin{pmatrix} \theta_2 \\ 0 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} H^2(F),$$
$$H_1 = \begin{pmatrix} \theta_2 & 0 \\ 0 & I \\ \Delta_2 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} H^2(F) \\ L^2_{\Delta_1}(E) \end{pmatrix} \ominus \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \Delta_1 \end{pmatrix} H^2(E) \right],$$
является искомым, т.е. $H_1 \in Lat\, T$.

Чтобы завершить доказательство теоремы нужно проверить взаимную однозначность указанного соответствия между подпространствами, вложениями η и факторизациями. Для этого, начав с некоторой регулярной факторизации $\theta = \theta_2 \theta_1$, проделаем по цепочке всю процедуру: построим инвариантное подпространство H_1, по нему - изометрию η, по ней - новую факторизацию $\theta = (\pi_*^* \eta)(\eta^* \pi)$ и убедимся, что она совпадает с исходной.

Тут следует сразу оговорить, что имеется естественный произвол в выборе вспомогательного пространства F. Можно выбрать другое пространство, скажем F_1, той же размерности и произвольный унитарный оператор V, отождествляющий F и F_1 : $VF = F_1$. Тогда вложение $\eta : L^2(F) \to \mathcal{H}$ заменится на $\eta_1 = \eta V^* : L^2(F_1) \to \mathcal{H}$ и факторизация $\theta = \theta_1 \theta_2$ на факторизацию $\theta = (\theta_1 V^*)(V \theta_2)$. Все эти объекты естественно считать эквивалентными и не различать. Впрочем и исходный оператор T мы рассматриваем с точностью до унитарной эквивалентности, а характеристическую функцию θ - с точностью до постоянных унитарных множителей слева и справа, т.е. с точностью до выбора подпространств E и E_*.

Итак, фиксируем регулярную факторизацию $\theta = \theta_2 \theta_1$. По ней строим подпространство H_1 по указанной выше формуле. Тогда

$$G \oplus H_1 = \pi H^2(E) \oplus H_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} \theta \\ \Delta_1 \\ \Delta_2\theta_1 \end{pmatrix} H^2(E) \oplus \begin{pmatrix} \theta_2 & 0 \\ 0 & I \\ \Delta_2 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} H^2(F) \\ L^2_{\Delta_1}(E) \end{pmatrix} \ominus \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \Delta_1 \end{pmatrix} H^2(E) \right] =$$

$$\begin{pmatrix} \theta_2 \\ 0 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} H^2(F) \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ L^2_{\Delta_1}(E) \\ 0 \end{pmatrix},$$

т.е. $R_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ L^2_{\Delta_1}(E) \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\eta = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ 0 \\ \Delta_2 \end{pmatrix}$.

и окончательно проверяем, что новая факторизация $\theta = (\pi_*^*\eta)(\eta^*\pi)$:

$$\pi_*^*\eta = (I,\ 0,\ 0) \begin{pmatrix} \theta_2 \\ 0 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \theta_2,$$

$$\eta^*\pi = (\theta_2^*, 0, \Delta_2) \begin{pmatrix} \theta \\ \Delta_1 \\ \Delta_2\theta_1 \end{pmatrix} = \theta_2^*(\theta_2\theta_1) + \Delta_2^2\theta_1 = \theta_1,$$

совпадает с исходной, что и завершает доказательство теоремы. ●

3. Теорема о подъеме

Теорема Секефальви-Надя-Фойаша о подъеме утверждает, что для каждого оператора $X, X: H_1 \longrightarrow H_2$, сплетающего сжатия T_i в пространствах H_i найдется оператор Y, $\|Y\| = \|X\|$, сплетающий минимальные унитарные дилатации U_i операторов T_i, сохраняющий структуру пространства минимальной унитарной дилатации:

$$YG_1 \subset G_2, \qquad Y^*G_{*2} \subset G_{*1},$$

и такой, что его компрессия $P_{H_2} Y | H_1$ совпадает с оператором X.

Легко проверяется обратное утверждение: если оператор $Y: \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ удовлетворяет условиям

$$YU_1 = U_2Y, \quad YG_1 \subset G_2, \quad Y^*G_{*2} \subset G_{*1}, \tag{I}$$

то компрессия оператора Y, $X \overset{def}{=\!=} P_{H_2} Y | H_1$, сплетает сжатия T_1 и T_2, т.е. $XT_1 = T_2X$.

При работе с функциональной моделью оператора естественно использовать функциональную параметризацию сплетающих операторов, в частности, операторов из коммутанта. Построение такой параметризации является основным результатом работы С.-Надя-Фойаша [4]. В несколько отличающейся форме получается естественная параметризация, если исходить из бескоординатной функциональной модели. А именно, справедлива следующая теорема.

3.I. ТЕОРЕМА о параметризации. Пусть $\mathcal{H}_i$ - пространство минимальных унитарных дилатации U_i вполне неунитарных сжатий, $i=1,2$. Тогда для того, чтобы ограниченный оператор Y, действующий из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$ удовлетворял соотношениям (I) необходимо и достаточно, чтобы оператор Y имел вид

$$Y = \pi_{*2} A_* \pi_{*1}^* + \tau_2 \Delta_2 A \pi_1^* + \tau_2 B \tau_{*1}^* , \tag{2}$$

где $A_* \in H^\infty(E_{*1} \longrightarrow E_{*2})$, $A \in H^\infty(E_1 \longrightarrow E_2)$ - произвольная пара аналитических оператор-функций, связанных соотношением

$$A_* \theta_1 = \theta_2 A ,$$

а B - произвольная функция из $L^\infty(P_{\Delta_{*1}} E_1 \longrightarrow P_{\Delta_2} E_2)$, $P_\Delta(\zeta)$ - проекторно-значная функция, значения которой суть проекторы на подпространство $\operatorname{clos} \Delta(\zeta) E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что оператор Y, имеющий вид (2), удовлетворяет условиям (I), почти очевидно. Поскольку все операторы π и τ сплетают операторы умножения на z с соответствующей унитарной дилатацией, а операторы A, A_* и B коммутируют с z, ясно, что $YU_1 = U_2 Y$. Проверим выполнение включений:

$$YG_1 = (\pi_{*2} A_* \pi_{*1}^* + \tau_2 \Delta_2 A \pi_1^* + \tau_2 B \tau_{*1}^*) \pi_1 H^2(E_1) =$$

$$= (\pi_{*2} A_* \theta_1 + \tau_2 \Delta_2 A) H^2(E_1) = (\pi_{*2} \theta_2 + \tau_2 \Delta_2) A H^2(E_1) =$$

$$= \pi_2 A H^2(E_1) \subset \pi_2 H^2(E_2) = G_2 ;$$

$$Y^* G_{*2} = (\pi_{*1} A_*^* \pi_{*2}^* + \pi_1 A^* \Delta_2 \tau_2^* + \tau_{*1} B \tau_2^*) \pi_{*2} H_-^2(E_{*2}) =$$

$$= \pi_{*1} A_*^* H_-^2(E_{*2}) \subset \pi_{*1} H_-^2(E_{*1}) = G_{*1} .$$

Теперь проверим, что оператор Y, удовлетворяющий условиям (I), имеет вид (2) для некоторых A, A_* и B.

Условие $YG_1 \subset G_2$ запишем в виде $Y\pi_1 H^2(E_1) \subset \subset \pi_2 H^2(E_2)$ и введем оператор

$$A \stackrel{def}{=\!=} \pi_2^* Y \pi_1 . \tag{3}$$

Поскольку

$$Az = \pi_2^* Y \pi_1 z = \pi_2^* Y U_1 \pi_1 = \pi_2^* U_2 Y \pi_1 = zA ,$$

оператор A является оператором умножения на ограниченную измеримую функцию, которая, более того, является аналитической, так как

$$AH^2(E_1) = \pi_2^* Y \pi_1 H^2(E_1) \subset \pi_2^* \pi_2 H^2(E_2) = H^2(E_2) .$$

Из условия $Y\pi_1 H^2(E_1) \subset \pi_2 H^2(E_2)$ вытекает, что $Y\pi_1 L^2(E_1) \subset \pi_2 L^2(E_2)$, т.е. $\mathrm{Range}\, Y\pi_1 \subset \mathrm{Range}\, \pi_2$, а следовательно,

$$Y\pi_1 = (\pi_2 \pi_2^*) Y \pi_1 = \pi_2 A .$$

Аналогичным образом условие $Y^* G_{*2} \subset G_{*1}$ приводит к аналитической функции A_*,

$$A_* \overset{def}{=\!=} \pi_{*2}^* Y \pi_{*1} . \tag{4}$$

которая удовлетворяет соотношению $\pi_{*2}^* Y = A_* \pi_{*1}^*$. А следовательно, между функциями A и A_* существует связь

$$A_* \theta_1 = A_* \pi_{*1}^* \pi_1 = \pi_{*2}^* Y \pi_1 = \pi_{*2}^* \pi_2 A = \theta_2 A .$$

Теперь попробуем восстановить оператор Y, если определены равенствами (3) и (4) функции A и A_*.

$$Y = (\pi_{*2}\pi_{*2}^* + \tau_2\tau_2^*) Y = \pi_{*2} A_* \pi_{*1}^* + \tau_2 \tau_2^* Y (\pi_1 \pi_1^* + \tau_{*1}\tau_{*1}^*) =$$

$$= \pi_{*2} A_* \pi_{*1}^* + \tau_2 \tau_2^* \pi_2 A \pi_1 + \tau_2 (\tau_2^* Y \tau_{*1}) \tau_{*1}^* =$$

$$= \pi_{*2} A_* \pi_{*1}^* + \tau_2 \Delta_2 A \pi_1 + \tau_2 B \tau_{*1}^* ,$$

где мы положили $B \overset{def}{=\!=} \tau_2^* Y \tau_{*1}$. Ясно, что $B : L^2_{\Delta_{*1}}(E_{*1}) \to L^2_{\Delta_2}(E_2)$, сплетает операторы умножения на z в этих пространствах, т.е. B есть оператор умножения на функцию из $L^\infty(P_{\Delta_{*1}} E_1 \longrightarrow P_{\Delta_2} E_2)$. При желании можно считать B функцией из $L^\infty(E_1 \longrightarrow E_2)$, равной нулю на $\mathrm{Ker}\,\Delta_{*1}$ и имеющий образ в ортогональном дополнении к $\mathrm{Ker}\,\Delta_2$.

3.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно получить "симметричную" запись оператора Y:

$$Y = \pi_2 A \pi_1^* + \pi_{*2} A_* \Delta_{*1} \tau_{*1}^* + \tau_2 B \tau_{*1}^* . \tag{5}$$

Эту формулу можно получить из формулы (2), записав оператор

π_{*1}^* в виде $\pi_{*1}^* = \theta_1 \pi_1^* + \Delta_{*1} \tau_{*1}^*$ и воспользовавшись соотношением $A_* \theta_1 = \theta_2 A$, а можно ее получить и непосредственно:

$$Y = Y(\pi_1 \pi_1^* + \tau_{*1} \tau_{*1}^*) = \pi_2 A \pi_1^* + (\pi_{*2} \pi_{*2}^* + \tau_2 \tau_2^*) Y \tau_{*1} \tau_{*1}^* =$$

$$= \pi_2 A \pi_1^* + \pi_{*2} A_* \Delta_{*1} \tau_{*1}^* + \tau_2 B \tau_{*1}^* .$$

3.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Если не предполагать полной неунитарности исходных сжатий, то к пространству минимальной унитарной дилатации вполне неунитарной части оператора нужно будет добавить то подпространство, на котором исходное сжатие унитарно. Пусть спектральная теорема дает реализацию этой унитарной части, как умножение на z в некотором L^2_μ и σ - изометрическое вложение L^2_μ в $\mathcal{H}$, осуществляющее эту реализацию, т.е. сплетающее умножение на z в L^2_μ с унитарным оператором U в $\mathcal{H}$. Тогда оператор Y, удовлетворяющий условиям (I), будет параметризоваться большим числом функций

$$Y = \pi_{*2} A_* \pi_{*1}^* + \tau_2 \Delta_2 A \pi_1^* + \tau_2 B \tau_{*1}^* +$$

$$+ \tau_2 \Gamma_1 \sigma_1^* + \sigma_2 \Gamma_2 \tau_{*1}^* + \sigma_2 \Gamma_{12} \sigma_1^* ,$$

где ограниченные функции Γ_1, Γ_2 и Γ_{12} действуют как операторы умножения $\Gamma_1 : L^2_{\mu_1} \to L^2_{\Delta_2}(E_2)$, $\Gamma_2 : L^2_{\Delta_{*1}}(E_{*1}) \to L^2_{\mu_2}$, $\Gamma_{12} : L^2_{\mu_1} \to L^2_{\mu_2}$ и являются свободными параметрами, т.е. могут задаваться независимо. Если оператор Y задан, то параметры Γ определяются формулами:

$$\Gamma_1 = \tau_2^* Y \sigma_1 , \quad \Gamma_2 = \sigma_2^* Y \tau_{*1} , \quad \Gamma_{12} = \sigma_2^* Y \sigma_1 .$$

3.4. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ. Пусть $Y_{21} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ и $Y_{32} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_3$ удовлетворяют условию (I). Тогда оператор Y_{31}, $Y_{31} \stackrel{def}{=} Y_{32} Y_{21}$ также удовлетворяет условию (I) и его параметры вычисляются по следующим формулам:

$$A_{31} = A_{32} A_{21} , \quad A_{*31} = A_{*32} A_{*21} ,$$

$$B_{31} = \Delta_3 A_{32} \theta_2^* A_{*21} \Delta_{*1} + B_{32} \Delta_{*2} A_{*21} \Delta_{*1} + \Delta_3 A_{32} \Delta_2 B_{21} - B_{32} \theta_2 B_{21} .$$

Кроме параметров A и A_* мультипликативными являются также функции

$$C \stackrel{def}{=} \tau_2^* Y \tau_1 = \Delta_2 A \Delta_1 - B \theta_1 ,$$

$$C_* \stackrel{def}{=\!=} \tau_{*2}^* Y \tau_{*1} = \Delta_{*2} A_* \Delta_{*1} - \theta_2 B .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$A_{31} = \pi_3^* Y_{31} \pi_1 = \pi_3^* Y_{32} Y_{21} \pi_1 = \pi_3^* Y_{32} \pi_2 A_{21} = A_{32} A_{21} .$$

Аналогично проверяется мультипликативность функции A_*

$$B_{31} = \tau_3^* Y_{31} \tau_{*1} = \tau_3^* Y_{32} (\pi_{*2} \pi_{*2}^* + \tau_2 \tau_2^*) Y_{21} \tau_{*1} =$$

$$= \tau_3^* Y_{32} (\pi_{*2} A_{*21} \pi_{*1}^* \tau_{*1} + \tau_2 B_{21}) =$$

$$= \tau_3^* Y_{32} [(\pi_2 \theta_2^* + \tau_{*2} \Delta_{*2}) A_{*21} \Delta_{*1} + (\pi_2 \Delta_2 - \tau_{*2} \theta_2) B_{21}] =$$

$$= (\tau_3^* \pi_3 A_{32} \theta_2^* + B_{32} \Delta_{*2}) A_{*21} \Delta_{*1} + (\tau_3^* \pi_3 A_{32} \Delta_2 - B_{32} \theta_2) B_{21} =$$

$$= \Delta_3 A_{32} \theta_2^* A_{*21} \Delta_{*1} + B_{32} \Delta_{*2} A_{*21} \Delta_{*1} + \Delta_3 A_{32} \Delta_2 B_{21} - B_{32} \theta_2 B_{21} .$$

Мультипликативность функций C и C_* проверяется одинаково. Докажем, к примеру, мультипликативность функций C .

$$C_{31} = \tau_3^* Y_{31} \tau_1 = \tau_3^* Y_{32} (\pi_{*2} \pi_{*2}^* + \tau_2 \tau_2^*) Y_{21} \tau_1 =$$

$$= \tau_3^* Y_{32} \pi_{*2} A_{*21} \pi_{*1}^* \tau_1 + C_{32} C_{21} = C_{32} C_{21} ,$$

поскольку $\pi_{*1}^* \tau_1 = 0$. ●

Выясним теперь ту неоднозначность, с которой оператором X задается его подъем Y .

3.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Оператор $P_{H_2} Y | H_1$ равен нулю в том и только в том случае, когда $Y = \pi_2 \Gamma \pi_{*1}^*$ для некоторой функции Γ, $\Gamma \in H^\infty(E_{*1} \to E_2)$, другими словами, когда

$$A = \Gamma \theta_1 , \quad A_* = \theta_2 \Gamma , \quad B = \Delta_2 \Gamma \Delta_{*1} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma \in H^\infty(E_{*1} \to E_2)$, $Y = \pi_2 \Gamma \pi_{*1}^*$ и $h \in H_1$. Тогда $\pi_{*1}^* h \in H^2(E_{*1})$, $\Gamma \pi_{*1}^* h \in H^2(E_2)$ и $Y h \in \pi_2 H^2(E_2) = G_2$ т.е. $Yh \perp H_2$.

Пусть теперь $P_{H_2} Y | H_1 = 0$. А так как $Y G_1 \subset G_2$, то и $P_{H_2} Y | H_1 \oplus G_1 = 0$. Включение $Y^* G_{*2} \subset G_{*1}$ равносильно включению $Y(H_1 \oplus G_1) \subset H_2 \oplus G_2$ а поэтому условие $P_{H_2} Y | H_1 \oplus G_1 = 0$ равносильно включению $Y(H_1 \oplus G_1) \subset G_2$, т.е.

$$Y(\pi_{*1} H^2(E_{*1}) \oplus \tau_1 (L^2_{\Delta_1}(E_1)) \subset \pi_2 H^2(E_2) .$$

Применяя к обеим частям этого включения оператор $\mathbb{U}^{*n}$ и устремляя n к ∞, получим $Y\mathcal{H}_1 \subset \pi_2 L^2(E_2)$, т.е. $\tau_{*2}^* Y = 0$. Аналогично применяя оператор $\mathbb{U}_2^n$ в пределе получаем $Y\tau_1 L^2_{\Delta_1}(E_1) \subset \{0\}$, т.е. $Y\tau_1 = 0$.

Теперь введем функцию Γ, $\Gamma \overset{def}{=} \pi_2^* Y \pi_{*1}$; включение $Y\pi_{*1} H^2(E_{*1}) \subset \pi_2 H^2(E_2)$ влечет ее аналитичность, т.е. $\Gamma \in H^\infty(E_{*1} \longrightarrow E_2)$. И, наконец,

$$Y = (\pi_2 \pi_2^* + \tau_{*2} \tau_{*2}^*) Y (\pi_{*1} \pi_{*1}^* + \tau_1 \tau_1^*) = \pi_2 \Gamma \pi_{*1}^* .$$

Приведенные в формулировке выражения параметров A, A_* и B через функцию Γ следуют непосредственно из определений, например:

$$A = \pi_2^* Y \pi_1 = \pi_2^* \pi_2 \Gamma \pi_{*1}^* \pi_1 = \Gamma \theta_1 . \ \bullet$$

В заключение приведем вид оператора Y в различных конкретных модельных представлениях.

3.6. Модель Надя-Фойаша. Приходящее представление.

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} L^2(E_*) \\ L^2_\Delta(E) \end{pmatrix}, \quad \pi = \begin{pmatrix} \theta \\ \Delta \end{pmatrix}, \quad \pi_* = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}, \quad \tau_* = \begin{pmatrix} \Delta_* \\ -\theta^* \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} A_* & 0 \\ \Delta_2 A \theta_1^* + B\Delta_{*1} & \Delta_2 A \Delta_1 - B\theta_1 \end{pmatrix} .$$

Заметим, что в правом нижнем углу стоит функция C, поэтому из этого представления сразу вытекает утверждение теоремы 3.4 о мультипликативности C.

3.7. Модель Надя-Фойаша. Уходящее представление.

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} L^2(E) \\ L^2_{\Delta_*}(E_*) \end{pmatrix}, \quad \pi = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \pi_* = \begin{pmatrix} \theta^* \\ \Delta_* \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} \Delta \\ -\theta \end{pmatrix}, \quad \tau_* = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} A & \theta_2^* A_* \Delta_{*1} + \Delta_2 B \\ 0 & \Delta_{*2} A_* \Delta_{*1} - \theta_2 B \end{pmatrix} .$$

3.8. Модель Надя-Фойаша. Смешанное представление. Если выбрать для пространства $\mathcal{H}_1$ уходящее представление, а для пространства $\mathcal{H}_2$ - приходящее, то получим

$$Y = \begin{pmatrix} \theta_2 A & A_* \Delta_{*1} \\ \Delta_2 A & B \end{pmatrix}.$$

3.9. Модель Павлова

$$\mathcal{H} = L^2\left(E_* \oplus E, \begin{pmatrix} I & \theta \\ \theta^* & I \end{pmatrix}\right),$$

$$\pi_* = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \pi_*^* = (I, \theta), \quad \pi = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}, \quad \pi^* = (\theta^*, I),$$

$$\tau = \begin{pmatrix} -\theta \\ I \end{pmatrix} \Delta^{-1}, \quad \tau^* = (0, \Delta), \quad \tau_* = \begin{pmatrix} I \\ -\theta^* \end{pmatrix} \Delta_*^{-1}, \quad \tau_*^* = (\Delta_*, 0).$$

$$Y = \begin{pmatrix} A_* \Delta_{*1}^2 - \theta_2 \Delta_2^{-1} B \Delta_{*1} & 0 \\ A\theta_1^* + \Delta_2^{-1} B \Delta_{*1} & A \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_* & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\theta_2 \\ I \end{pmatrix} (A\theta_1^* + \Delta_2^{-1} B \Delta_{*1})(I, 0).$$

3.10. Модель де Бранжа-Ровняка.

$$\mathcal{H} = L^2\left(E_* \oplus E, \begin{pmatrix} I & \theta \\ \theta^* & I \end{pmatrix}^{-1}\right),$$

$$\pi_* = \begin{pmatrix} I \\ \theta^* \end{pmatrix}, \quad \pi_*^* = (I, 0), \quad \pi = \begin{pmatrix} \theta \\ I \end{pmatrix}, \quad \pi^* = (0, I),$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \end{pmatrix}, \quad \tau^* = \Delta^{-1}(-\theta^*, I), \quad \tau_* = \begin{pmatrix} \Delta_* \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_*^* = \Delta_*^{-1}(I, -\theta).$$

$$Y = \begin{pmatrix} A_* & 0 \\ \theta_2^* A_* + \Delta_2 B \Delta_{*1}^{-1} & \Delta_2^2 A - \Delta_2 B \Delta_{*1}^{-1} \theta_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_* & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} (\theta_2^* A_* + \Delta_2 B \Delta_{*1}^{-1})(I, -\theta).$$

Литература

1. Nikolskii N.K., Vasyunin V.I. A unified approach to function models, and the transcription problem. Preprint LOMI E-5-86, 1986.
2. Никольский Н.К., Хрущёв С.В. Функциональная модель и некоторые задачи спектральной теории функций. - Труды МИАН, 1987, т.176, с.97-210.
3. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М., Мир, 1970.
4. Sz.-Nagy B., Foiaş C. On the structure of intertwining operator. - Acta Sci.Math., 1973, t.35, p.225-254.

V.I. Vasyunin. Two classical theorems of function model theory via the coordinate-free approach.

Summary

The aim of the paper is to present a new approach to the proof of two well-known theorems of Sz.-Nagy-Foiaş: the first one concerns the correspondence between invariant subspaces of a given contraction T and regular factorizations of the characteristic function θ_T of T, the second one is the commutant lifting theorem. The proofs are based on the coordinate-free approach to the functional model. In other words, a concrete spectral representation of a minimal unitary dilation is not fixed. The essential point in the first theorem is an assertion in terms of functional mappings $\eta : L^2(F) \longrightarrow \mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$ is the space of a minimal unitary dilation U) equivalent to the existence of an invariant supspace of T. As to the lifting theorem, our approach provides us with a new parametrization of lifted operator that seems to be more natural than the known Sz.-Nagy - Foias parametrization.