МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 17, № 2 (1975), 231—244

УДК 517

О МОДУЛЯХ НЕПРЕРЫВНОСТИ РАВНОИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ В КЛАССАХ $\varphi(L)$

П. Освальд

В заметке устанавливается ряд соотношений между модулями непрерывности равноизмеримых функций $f(x)$ и $f^*(x)$. В частности, для $f(x) \in L_p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$, доказано неравенство

$$\omega_p(\delta, f) \geqslant \frac{1}{2}\,\omega_p(\delta, f^*),\ \delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Библ. 5 назв.

§ 1. При доказательстве некоторых теорем вложения П. Л. Ульянов [1], [2] использовал соотношения между модулями непрерывности равноизмеримых функций. В работе [3] оценка П. Л. Ульянова несколько улучшена: Если $f(x) \in L(0, 1)$, то

$$\omega\left(\frac{1}{n}, f\right) \geqslant \frac{1}{3}\,\omega\left(\frac{1}{n}, f^*\right) \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

где $f^*(x)$ — равноизмеримая к $f(x)$, невозрастающая на $[0, 1]$ функция (см. [4], стр. 54, [1], стр. 655), а

$$\omega(\delta, f) = \sup_{0 \leqslant h \leqslant \delta} \int_0^{1-h} |f(x) - f(x+h)|\,dx \qquad (\delta \in [0, 1])$$

— интегральный модуль непрерывности в $L(0, 1)$.

Целью настоящей заметки является доказательство некоторых соотношений для модулей непрерывности равноизмеримых функций. Из этих утверждений вытекает аналог приведенных выше результатов для пространств $L_p(0, 1)$, $0 < p < \infty$. В частности, при $p = 1$, мы усилим результат К. И. Осколкова из [3].

Мы будем пользоваться определениями и обозначениями статьи [5].

Определение 1. Функция $\varphi(t)$ принадлежит классу Φ, если $\varphi(t)$ — четная, конечная, неотрицательная и неубывающая на $[0, \infty)$ функция, причем $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$. Пусть в дальнейшем $\varphi \in \Phi$.

Определение 2. Будем говорить, что измеримая на $[0, 1]$ функция $f(x) \in \varphi(L)$, если $\int_0^1 \varphi(f(x))\, dx < \infty$. Заметим, что из $f(x) \in \varphi(L)$ следует, очевидно, что $f^*(x) \in \varphi(L)$.

Определение 3. Функция $\varphi(t)$ удовлетворяет Δ_2-условию, если $\varphi(2t) = O\{\varphi(t)\}$ при $t \to \infty$. Положим $I_\varphi(h, f) \equiv \int_0^{1-h} \varphi(f(x) - f(x+h))\, dx$, где $f(x) \in \varphi(L)$, $h \in [0, 1]$. Величина $I_\varphi(h, f)$ конечна для любых $f(x) \in \varphi(L)$, $h \in [0, 1]$, тогда и только тогда, когда φ удовлетворяет Δ_2-условию (см. [5], лемма 3.7).

Определение 4. φ-модулем непрерывности функции $f(x) \in \varphi(L)$ называется величина

$$\omega_\varphi(\delta, f) \equiv \sup_{0 \leqslant h \leqslant \delta} I_\varphi(h, f), \qquad \delta \in [0, 1]. \tag{1}$$

§ 2. Докажем несколько лемм. Будем говорить, что функция $g(x) \in \Gamma$, если $g(x)$ конечна и постоянна на каждом из измеримых множеств E_i $(i = 1, \ldots, n)$, $E_i \cap E_j = \phi$ при $i \neq j$, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i = [0, 1]$, где $n = 1, 2, \ldots$ конечное число. Имеет место

ЛЕММА 1. *Пусть* $g(x) \in \Gamma$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $g_N(x) \in \Gamma$ *с отрезками постоянства* $E_i = \left\langle \frac{i-1}{N}, \frac{i}{N} \right\rangle^*$ $(i = 1, \ldots, N = N(\varepsilon, g))$ такая, что

$$\max |g_N(x)| \leqslant \max |g(x)|, \tag{2}$$

$$m\{x \in [0,1]:\ g_N(x) \neq g(x)\} < \varepsilon,$$

$$m\{x \in [0, 1]:\ g_N^*(x) \neq g^*(x)\} < \varepsilon. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть функция $g(x) \in \Gamma$ принимает значения h_i при $x \in E_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

*) Под $\langle \alpha, \beta \rangle$ мы будем понимать любое из множеств $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta]$, (α, β).

Найдем открытые множества $G_i \supset E_i$ такие, что $m(G_i \setminus E_i) < \varepsilon/6n^3$. Выделим для каждого $i = 1,\ldots, n$ $G_i' = \bigcup_{j=1}^{m_i} (\alpha_{ij}, \beta_{ij})$, где $(\alpha_{ij}, \beta_{ij})$ — попарно непересекающиеся интервалы с рациональными концами, при условии, что $m(G_i \setminus G_i') < \varepsilon/2n^3$. Из каждого G_i' удалим пересечения $G_i' \cap G_j'$ $(i \neq j)$. При этом получим попарно непересекающиеся множества $E_i' \subset G_i'$ $(i = 1, \ldots, n)$, являющиеся конечными объединениями отрезков с рациональными концами: $E_i' = \bigcup_{j=1}^{n_i} \langle \gamma_{ij}, \delta_{ij} \rangle$. Положим

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} h_i, x \in E_i', \ i = 1, \ldots, n \\ \min\limits_i h_i \ x \in [0, 1] \setminus \bigcup\limits_1^n E_i'. \end{cases}$$

Функция $\bar{g}(x)$ удовлетворяет условиям леммы. В самом деле, в качестве N можно брать общий знаменатель рациональных чисел γ_{ij}, δ_{ij}. Условие (2), очевидно, выполняется. Далее, так как

$$m(G_i' \cap G_j') \leqslant m(G_i \cap G_j) = m(E_i \cap (G_j \setminus E_j)) + \\ + m\cdot(E_j \cap (G_i \setminus E_i)) + m((G_i \setminus E_i) \cap (G_j \setminus E_j)) + \\ + m\cdot(E_i \cap E_j) < \varepsilon/2n^3$$

при $i \neq j$, то

$$m(E_i \cap E_i') \geqslant mE_i - m(G_i \setminus G_i') - \\ - \sum\nolimits_{j \neq i} m(G_i' \cap G_j') > mE_i - \frac{\varepsilon}{2n^2}.$$

Отсюда следует

$$m\{x \in [0, 1] : g(x) \neq \bar{g}(x)\} \leqslant \\ \leqslant 1 - \sum\nolimits_{i=1}^n m(E_i \cap E_i') < 1 - \sum\nolimits_{i=1}^n mE_i + \frac{\varepsilon}{2n} < \varepsilon.$$

Равноизмеримые, невозрастающие на $[0, 1]$ функции $g^*(x)$ и $\bar{g}^*(x)$ принимают одинаковые значения на отрезках

$$\left\langle \sum\nolimits_{i=1}^{j-1} mE_i, \sum\nolimits_{i=1}^{j} mE_i \right\rangle \text{ и } \left\langle \sum\nolimits_{i=1}^{j-1} mE_i', \sum\nolimits_{i=1}^{j} mE_i' \right\rangle, \\ j = 1, \ldots, n.$$

Так как

$$mE_i - \frac{\varepsilon}{2n^2} < m(E_i \cap E_i') \leqslant mE_i' \leqslant mG_i < mE_i + \frac{\varepsilon}{6n^3},$$

то

$$m\{x \in [0, 1] : g^*(x) = \bar{g}^*(x)\} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{n} m\left\{\left\langle \sum_{i=1}^{j-1} mE_i, \sum_{i=1}^{j} mE_i \right\rangle \cap \left\langle \sum_{i=1}^{j-1} mE_i', \sum_{i=1}^{j} mE_i' \right\rangle\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{n} \left(mE_j - \left|\sum_{i=1}^{j-1} (mE_i - mE_i')\right| - \right.$$

$$\left. - \left|\sum_{i=1}^{j} (mE_i - mE_i')\right|\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{n} mE_j - 2n \sum_{j=1}^{n} |mE_j - mE_j'| > 1 - \varepsilon.$$

Этим доказательство леммы завершено.

ЛЕММА 2. *Пусть* $\varphi \in \Phi$ *и функция* $g(x) \in \Gamma$. *Тогда*

$$\int_0^\delta I_\varphi(h, g)\, dh \geqslant \int_0^\delta I_\varphi(h, g^*)\, dh, \qquad \delta \in [0, 1]. \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала функцию вида

$$g_n(x) = h_i, \quad x \in \left\langle \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right\rangle \quad (i = 1, \ldots, n, n = 2, 3, \ldots).$$

Упорядочим значения h_i по убыванию и обозначим их через H_j $(j = 1, \ldots, n)$. Тогда

$$g_n^*(x) = H_j, \ x \in \left\langle \frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right\rangle \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Легко установить, что

$$\begin{gathered} I_\varphi\left(\frac{k}{n}, g_n\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-k} \varphi(h_j - h_{j+k}), \\ (k = 1, \ldots, n-1). \\ I_\varphi\left(\frac{k}{n}, g_n^*\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-k} \varphi(H_j - H_{j+k}) \end{gathered} \tag{5}$$

Обозначим еще при $m = 1, \ldots, n-1$

$$\begin{gathered} S_\varphi\left(\frac{m}{n}, g_n\right) \equiv n \sum_{k=1}^{m} I_\varphi\left(\frac{k}{n}, g_n\right) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-k} \varphi(h_j - h_{j+k}), \\ S_\varphi\left(\frac{m}{n}, g_n^*\right) \equiv n \sum_{k=1}^{m} I_\varphi\left(\frac{k}{n}, g_n^*\right) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-k} \varphi(H_j - H_{j+k}). \end{gathered} \tag{6}$$

Докажем для всех функций $g_n(x)$ следующее неравенство:

$$S_\varphi\left(\frac{m}{n}, g_n\right) \geqslant S_\varphi\left(\frac{m}{n}, g_n^*\right), \qquad (m = 1,\ldots, n-1, n=2, 3,\ldots). \tag{7}$$

Доказательство мы проведем для каждого фиксированного $m = 1, 2,\ldots$ индукцией по числу отрезков постоянства $n = m+1, m+2,\ldots$ Итак, пусть сначала $n = m+1$. Рассмотрим функцию $g_{m+1}(x)$, принимающую значения h_i' $(i = 1,\ldots, n)$. Тогда суммы (6) просто совпадают:

$$S_\varphi\left(\frac{m}{m+1}, g_{m+1}\right) = S_\varphi\left(\frac{m}{m+1}, g_{m+1}^*\right) = \sum_{i,\, j=1}^{m+1} \varphi(h_i' - h_j').$$

Допустим, что (7) доказано для всех функций $g_{n-1}(x)$. Рассмотрим $g_n(x)$ и используем уже введенные обозначения. Среди h_i выбираем минимальное, пусть $h_q = H_n$. Строим функцию

$$\bar{g}_{n-1}(x) \doteq \begin{cases} h_j\,(j<q), \\ h_{j+1}\,(j\geqslant q), \end{cases} x \in \left\langle \frac{j-1}{n-1}, \frac{j}{n-1} \right\rangle (j = 1,\ldots, n-1)$$

с $n-1$ отрезками постоянства. Тогда, очевидно,

$$\bar{g}_{n-1}^*(x) = H_j,\ x \in \left\langle \frac{j-1}{n-1} \frac{j}{n-1} \right\rangle, \qquad (j = 1, \ldots, n-1).$$

Если обозначить $r = \min\,\{q-1, m\}$ и $s = \min\,\{n-q, m\}$, то легко убедиться в том, что

$$S_\varphi\left(\frac{m}{n}, g_n^*\right) - S_\varphi\left(\frac{m}{n-1}, \bar{g}_{n-1}^*\right) = \sum_{j=1}^{m} \varphi(H_{n-j} - H_n),$$

$$S_\varphi\left(\frac{m}{n}, g_n\right) - S_\varphi\left(\frac{m}{n-1}, \bar{g}_{n-1}\right) =$$
$$= \sum_{\substack{j=q-r \\ j\neq q}}^{q+s} \varphi(h_j - h_q) - \sum_{j=q-r}^{q+s-m-1} \varphi(h_j - h_{j+m+1}).$$

Учитывая предположение индукции для $\bar{g}_{n-1}(x)$, получим

$$S_\varphi\left(\frac{m}{n}, g_n\right) - S_\varphi\left(\frac{m}{n}, g_n^*\right) \geqslant \sum_{\substack{j=q-r \\ j\neq q}}^{q+s} \varphi(h_j - H_n) -$$
$$- \sum_{j=q-r}^{q+s-m-1} \varphi(h_j - h_{j+m+1}) - \sum_{j=1}^{m} \varphi(H_{n-j} - H_n). \tag{8}$$

Для индексов второго слагаемого правой части (8) имеет место $q-r \leqslant j \leqslant q+s-m-1 \leqslant q-1$ и $q+1 \leqslant \leqslant q-r+m+1 \leqslant j+m+1 \leqslant q+s$. Если положить

$$\alpha_j = \begin{cases} j, & h_j \geqslant h_{j+m+1} \\ j+m+1, & h_j < h_{j+m+1} \end{cases}, \quad (j = q-r, \ldots, q+s-m-1),$$

то отсюда $q-r \leqslant \alpha_j \leqslant q+s$, $\alpha_j \neq q$ при $j = q-r, \ldots$ $\ldots, q+s-m-1$. Так как $\varphi(h_{\alpha_j} - H_n) \geqslant \varphi(h_j - h_{j+m+1})$ $(j = q-r, \ldots, q+s-m-1)$, то

$$\sum_{\substack{j=q-r \\ j\neq q}}^{q+s} \varphi(h_j - H_n) - \sum_{j=q-r}^{q+s-m-1} \varphi(h_j - h_{j+m+1}) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\substack{j=q-r \\ j\neq q,\ \alpha_{q-r}, \ldots, \alpha_{q+s-m-1}}}^{q+s} \varphi(h_j - H_n) \geqslant \min_{k_i \neq q} \sum_{i=1}^{m} \varphi(h_{k_i} - H_n), \tag{9}$$

где минимум берется по всем наборам попарно различных индесов $k_i \neq q$, $i = 1, \ldots, m$. Последний знак неравенства в (9) справедлив, так как в предыдущей сумме ровно m слагаемых вида $\varphi(h_j - H_n)$ с попарно различными индексами $j \neq q$. Но поскольку $H_1 \geqslant H_2 \geqslant \ldots \geqslant H_n$, то очевидно

$$\min_{k_i \neq q} \sum_{i=1}^{m} \varphi(h_{k_i} - H_n) = \sum_{j=1}^{m} \varphi(H_{n-j} - H_n). \tag{10}$$

Из (8), (9), (10) следует $S_\varphi(\frac{m}{n}, g_n) \geqslant S_\varphi(\frac{m}{n}, g_n^*)$, и тем самым неравенство (7) доказано. Опираясь на (7), нетрудно получить

$$\int_0^\delta I_\varphi(h, g_n)\, dh \geqslant \int_0^\delta I_\varphi(h, g_n^*)\, dh, \qquad \delta \in [0, 1]. \tag{11}$$

Пусть сначала $\delta = \frac{r}{q} \in [0, 1]$ — рациональное число. Так как $I_\varphi(h, g_n)$ и $I_\varphi(h, g_n^*)$ непрерывны по h, то

$$\int_0^{r/q} I_\varphi(h, g_n)\, dh = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{nrN} I_\varphi\left(\frac{k}{ngN}, g_n\right) \cdot \frac{1}{ngN},$$

$$\int_0^{r/q} I_\varphi(h, g_n^*)\, dh = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{nrN} I_\varphi\left(\frac{k}{nqN}, g_n^*\right) \cdot \frac{1}{nqN},$$

где N пробегает натуральные числа. При каждом $N =$

$= 1, 2, \ldots$ можно рассматривать $g_n(x)$ как функцию $g_{nqN}(x)$. Воспользуемся обозначениями (6) и неравенством (7). Тогда

$$\sum_{k=1}^{nrN} I_\varphi\left(\frac{k}{nqN}, g_n\right)\frac{1}{nqN} = \frac{1}{(nqN)^2}\cdot S_\varphi\left(\frac{nrN}{nqN}, g_{nqN}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{(nqN)^2} S_\varphi\left(\frac{nrN}{nqN}, \overset{*}{g}_{nqN}\right) = \sum_{k=1}^{nrN} I_\varphi\left(\frac{k}{nqN}, \overset{*}{g}_n\right)\frac{1}{nqN}.$$

Отсюда в пределе следует неравенство (11) при рациональном δ. Множество рациональных чисел всюду плотно в $[0, 1]$, следовательно, (11) справедливо для всех $\delta \in [0, 1]$. Пусть теперь $g(x)$ — произвольная функция из Γ и $\max|g(x)| = M$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем функцию $g_N(x) \in \Gamma$, удовлетворяющую условиям леммы 1. Если обозначить

$$E_h = \{x \in [0, 1-h]\colon\ g(x) \neq g_N(x)\} \cup \{x \in [0, 1-h]\colon$$
$$\colon g(x+h) \neq g_N(x+h)\},$$

$$\overset{*}{E}_h = \{x \in [0, 1-h]\colon g^*(x) \neq \overset{*}{g}_N(x)\} \cup \{x \in [0, 1-h]\colon$$
$$\colon g^*(x+h) \neq \overset{*}{g}_N(x+h)\},$$

то на основании (3) $mE_h < 2\varepsilon$, $m\,\overset{*}{E}_h < 2\varepsilon$.

Следовательно,

$$I_\varphi(h, g) = I_\varphi(h, g_N) + \int_{E_h}\varphi(g(x) - g(x+h))\,dx -$$
$$-\int_{E_h}\varphi(g_N(x) - g_N(x+h))\,dx \geqslant I_\varphi(h, g_N) - 2\varepsilon\cdot\varphi(2M),$$
$$I_\varphi(h, \overset{*}{g}_N) \geqslant I_\varphi(h, g^*) - 2\varepsilon\varphi(2M).$$

Проинтегрируем оба неравенства по $[0, \delta]$. Тогда, учитывая (11) для $g_N(x)$, при $\varepsilon \to 0$ получим неравенство (4). Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Пусть функция $f(x) \in \varphi(L)$, где $\varphi \in \Phi$. Тогда*

$$I_\varphi(\delta, f^*) \geqslant (1-\delta)\,\omega_\varphi(\delta, f^*),\quad \delta \in [0, 1]. \tag{12}$$

Доказательство. Докажем сначала неравенство

$$\frac{I_\varphi(h_1, f^*)}{1-h_1} \leqslant \frac{I_\varphi(h, f^*)}{1-h} \qquad (0 \leqslant h_1 < h < 1). \tag{13}$$

Если $I_\varphi(h, f^*) = \infty$, то неравенство (13) очевидно. Пусть

$(h, f^*) < \infty$. Так как $\varphi(t)$ не убывает, а $f^*(x)$ не возрастает, то

$$\varphi(f^*(x) - f^*(x+h)) \geqslant \max\{\varphi(f^*(x) - f^*(x+h_1)), \\ \varphi(f^*(x+h-h_1) - f^*(x+h))\}$$

при всех $x \in [0, 1-h]$. Отсюда получаем

$$I_\varphi(h, f^*) =$$

$$= \int_0^\alpha \varphi(f^*(x) - f^*(x+h))\,dx + \int_\alpha^{1-h} \varphi(f^*(x) - f^*(x+h))\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\alpha \in [0, 1-h]} \left\{\int_0^\alpha \varphi(f^*(x) - f^*(x+h_1))\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_\alpha^{1-h} \varphi(f^*(x+h-h_1) - f^*(x+h))\,dx\right\} =$$

$$= \sup_{\alpha \in [0, 1-h]} \left\{I_\varphi(h_1, f^*) - \int_\alpha^{\alpha+h-h_1} \varphi(f^*(x) - f^*(x+h_1))\,dx\right\} \geqslant$$

$$\geqslant I_\varphi(h_1, f^*) - \frac{h-h_1}{1-h_1} I_\varphi(h_1, f^*) = \frac{1-h}{1-h_1} I_\varphi(h_1, f^*).$$

Этим доказано (13) и утверждение леммы следует из

$$\frac{I_\varphi(\delta, f^*)}{1-\delta} = \sup_{0 \leqslant h \leqslant \delta} \frac{I_\varphi(h, f^*)}{1-h} \geqslant \frac{\sup\limits_{0 \leqslant h \leqslant \delta} I_\varphi(h, f^*)}{\sup\limits_{0 \leqslant h \leqslant \delta} (1-h)} = \omega_\varphi(\delta, f^*).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Пусть* $\varphi \in \Phi$ *и существует* $C > 0$ *такое, что*

$$C \cdot \varphi(a+b) \leqslant \varphi(a) + \varphi(b), \qquad 0 \leqslant a \leqslant a+b.$$

Если $f(x) \in \varphi(L)$ *и* $0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta_1 + \delta_2 \leqslant 1$, *то*

$$\omega_\varphi(\delta_1, f) + \omega_\varphi(\delta_2, f) \geqslant C\,\omega_\varphi(\delta_1 + \delta_2, f). \tag{14}$$

Доказательство. Из наложенных на $\varphi(t)$ условий вытекает

$$I_\varphi(\delta_1, f) + I_\varphi(\delta_2, f) \geqslant \int_0^{1-\delta_1-\delta_2} \{\varphi(f(x) - f(x+\delta_1)) + \\ + \varphi(f(x+\delta_1) - f(x+\delta_1+\delta_2))\}\,dx \geqslant$$

$$\geqslant C \cdot \int_0^{1-\delta_1-\delta_2} \varphi(|f(x) - f(x+\delta_1)| + |f(x+\delta_1) - \\ - f(x+\delta_1+\delta_2)|)\,dx \geqslant C \cdot I_\varphi(\delta_1+\delta_2, f).$$

Следовательно, при $0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta_1 + \delta_2 \leqslant 1$ и $\lambda \in [0, 1]$

$$I_\varphi(\lambda\delta_1, f) + I_\varphi(\lambda\delta_2, f) \geqslant CI_\varphi(\lambda(\delta_1 + \delta_2), f).$$

Переходя к супремуму при $\lambda \in [0, 1]$ и учитывая, что в силу (1)

$$\omega_\varphi(\delta, f) = \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} I_\varphi(\lambda\delta, f),$$

получим соотношение (14). Лемма доказана.

§ 3. В этом параграфе мы докажем основную теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Если функция* $\varphi \in \Phi$ *непрерывна и удовлетворяет* Δ_2*-условию, то при* $f(x) \in \varphi(L)$ *имеем*

$$\int_0^\delta I_\varphi(h, f)\,dh \geqslant \int_0^\delta I_\varphi(h, f^*)\,dh, \qquad \delta \in [0, 1]. \tag{15}$$

Доказательство. Так как $\varphi(t)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то $2f^*(x) \in \varphi(L)$ при $f(x) \in \varphi(L)$. Найдем $\delta > 0$ такое, что

$$\int_A \varphi(2f^*(x))\,dx < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad mA < \delta,\ A \subset [0, 1]. \tag{16}$$

Найдем $M > 0$ такое, что $m\{x \in [0,1]: |f(x)| > M\} < \frac{\delta}{2}$, и обозначим

$$f_M(x) = \begin{cases} M \cdot \operatorname{sign} f(x), & |f(x)| > M, \\ f(x), & |f(x)| \leqslant M. \end{cases}$$

Если

$$E_h = \{x \in [0,\ 1-h]:\ f(x) \neq f_M(x)\} \cup \{x \in [0,1-h]: : f(x+h) \neq f_M(x+h)\},$$

$$E_h^* = \{x \in [0,1-h]: f^*(x) \neq f_M^*(x)\} \cup \{x \in [0,1-h]: : f^*(x+h) \neq f_M^*(x+h)\},$$

то, очевидно, $mE_h^* \leqslant 2m\{x \in [0,1]: |f(x)| > M\} < \delta$. Кроме того, $|f_M(x) - f_M(x+h)| \leqslant |f(x) - f(x+h)|$ при $x \in [0,\ 1-h]$, следовательно,

$$I_\varphi(h, f) = I_\varphi(h, f_M) + \int_{E_h} \{\varphi(f(x) - f(x+h)) - \varphi\cdot(f_M(x) - f_M(x+h))\}\,dx \geqslant I_\varphi(h, f_M),$$

и, учитывая (16), получаем

$$I_\varphi(h, f_M^*) = I_\varphi(h, f^*) + \int_{E_h^*} \varphi(f_M^*(x) - f_M^*(x+h))\,dx -$$
$$- \int_{E_h^*} \varphi(f^*(x) - f^*(x+h))\,dx \geqslant I_\varphi(h, f^*) -$$
$$- \int_{E_h^*} \varphi(2f^*(x))\,dx - \int_{E_h^*} \varphi(2f^*(x+h))\,dx > I_\varphi(h, f^*) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Интегрируя эти неравенства по $[0, \delta]$, имеем

$$\int_0^\delta I_\varphi(h, f)\,dh \geqslant \int_0^\delta I_\varphi(h, f_M)\,dh,$$
$$\int_0^\delta I_\varphi(h, f_M^*)\,dh \geqslant \int_0^\delta I_\varphi(h, f^*)\,dh - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{17}$$

Далее, $\varphi(t)$ равномерно непрерывна при $t \in [-2M - 1, 2M + 1]$, т. е. существует $\Delta > 0$ такое, что для всех t_1, $t_2 \in [-2M - 1, 2M + 1]$ с $|t_1 - t_2| < \Delta$ величина $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Пусть $\frac{2M}{m} < \Delta$. Положим $g(x) = \frac{i}{m} M$, если $f_M(x) \in \left[\frac{i}{m} M, \frac{i+1}{m} M\right)$ $(i = -m, \ldots, m)$. Очевидно, что при $x \in [0, 1]$

$$|f_M(x) - g(x)| < \frac{M}{m}, \quad |f_M^*(x) - g^*(x)| < \frac{M}{m}.$$

Отсюда непосредственно получаем

$$|\varphi(f_M(x) - f_M(x+h)) - \varphi(g(x) - g(x+h))| < \frac{\varepsilon}{4},$$
$$|\varphi(f_M^*(x) - f_M^*(x+h)) - \varphi(g^*(x) - g^*(x+h))| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогда

$$I_\varphi(h, f_M) \geqslant I_\varphi(h, g) - \frac{\varepsilon}{4},$$
$$I_\varphi(h, g^*) \geqslant I_\varphi(h, f_M^*) - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Проинтегрируем эти неравенства по $[0, \delta]$. Для функции $g(x) \in \Gamma$ применяем лемму 2. С учетом (17) имеем

$$\int_0^\delta I_\varphi(h, f)\,dh \geqslant \int_0^\delta I_\varphi(h, f^*)\,dh - \varepsilon.$$

При $\varepsilon \to 0$ получим (15), что и требовалось доказать. Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть функция $\varphi \in \Phi$ непрерывна и удовлетворяет Δ_2-условию. Если $f(x) \in \varphi(L)$, то*

$$\int_0^\delta \omega_\varphi(h, f)\, dh \geqslant (1 - \delta) \int_0^\delta \omega_\varphi(h, f^*)\, dh. \tag{18}$$

Доказательство. Утверждение следует прямо из леммы 3 и теоремы 1. В самом деле, учитывая еще (1), имеем

$$\int_0^\delta \omega_\varphi(h, f)\, dh \geqslant \int_0^\delta I_\varphi(h, f)\, dh \geqslant \int_0^\delta I_\varphi(h, f^*)\, dh \geqslant$$
$$\geqslant \int_0^\delta (1 - h)\, \omega_\varphi(h, f^*)\, dh \geqslant (1 - \delta) \int_0^\delta \omega_\varphi(h, f^*)\, dh.$$

Далее, справедливо следующее

Следствие 2. *Пусть функция $\varphi \in \Phi$ непрерывна и удовлетворяет при некотором фиксированном $C > 0$ неравенству*

$$C \cdot \varphi(a + b) \leqslant \varphi(a) + \varphi(b), \quad 0 \leqslant a \leqslant a + b. \tag{19}$$

Если $f(x) \in \varphi(L)$, то

$$\omega_\varphi(\delta, f) \geqslant \frac{(1 - \delta) \cdot C}{2} \omega_\varphi(\delta, f^*), \qquad \delta \in [0, 1]. \tag{20}$$

Доказательство. Так как $\omega_\varphi(h, f)$ не убывает, имеем

$$\int_0^\delta \omega_\varphi(h, f)\, dh \leqslant \int_0^\delta \omega_\varphi(\delta, f)\, dh = \delta \omega_\varphi(\delta, f).$$

С другой стороны,

$$\int_0^\delta \omega_\varphi(h, f^*)\, dh = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{2n+1} \omega_\varphi\left(\frac{i\delta}{2n+1}, f^*\right) \cdot \frac{\delta}{2n+1}.$$

В силу леммы 4 имеем

$$\sum_{i=1}^{2n+1} \omega_\varphi\left(\frac{i\delta}{2n+1}, f^*\right) \cdot \frac{\delta}{2n+1} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \left\{\omega_\varphi\left(\frac{i\delta}{2n+1}, f^*\right) + \right.$$
$$\left. + \omega_\varphi\left(\frac{(2n + 1 - i)\,\delta}{2n+1}, f^*\right)\right\} \frac{\delta}{2n+1} \geqslant \frac{nC}{2n+1} \delta \omega_\varphi(\delta, f^*).$$

Так как неравенство $C\varphi(a+b) \leqslant \varphi(a) + \varphi(b)$ влечет за собой Δ_2-условие, то с учетом (18) в пределе

$$\delta\omega_\varphi(\delta, f) \geqslant \int_0^\delta \omega_\varphi(h, f)\,dh \geqslant$$
$$\geqslant \int_0^\delta \omega_\varphi(h, f^*)\,dh \cdot (1-\delta) \geqslant \frac{(1-\delta)C}{2}\,\delta\omega_\varphi(\delta, f^*).$$

следствие доказано.

§ 4. В этом параграфе мы рассмотрим пространство $L_p(0, 1)$, $0 < p < \infty$. Интегральным модулем непрерывности функции $f(x) \in L_p(0, 1)$ называется

$$\omega_p(\delta, f) = \sup_{0 \leqslant h \leqslant \delta} \left(\int_0^{1-h} |f(x) - f(x+h)|^p\,dx \right)^{1/p}, \qquad \delta \in [0, 1]. \tag{21}$$

Очевидно, что функция $\varphi(t) = |t|^p$, $0 < p < \infty$, удовлетворяет всем условиям, наложенным на $\varphi(t)$ в §§ 2 и 3. Оказывается, что в случае $1 \leqslant p < \infty$ найденные в § 3 оценки можно еще усилить.

ЛЕММА 5. *Пусть функция $f(x) \in L_p(0, 1)$, $1 \leqslant p < \infty$. Тогда*

$$I_p(h, f^*) \equiv \int_0^{1-h} |f^*(x) - f^*(x+h)|^p\,dx = \omega_p^p(h, f^*),$$
$$h \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \tag{22}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала функцию $g_n(x) \in \Gamma$. Пусть

$$g_n^*(x) = H_j, \qquad x \in \left\langle \frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right\rangle \qquad (j = 1, \ldots, n),$$
$$H_1 \geqslant H_2 \geqslant \ldots \geqslant H_n.$$

Пусть $a_i \equiv H_i - H_{i+1} \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Из равенств (5) вытекает

$$I_p\left(\frac{k+1}{n}, g_n^*\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-k-1} (a_i + \ldots + a_{i+k})^p,$$
$$I_p\left(\frac{k}{n}, g_n^*\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-k} (a_i + \ldots + a_{i+k-1})^p.$$

Пусть $(a_s + \ldots + a_{s+k-1})^p = \min\,(a_i + \ldots + a_{i+k-1})^p$ $(i = 1, \ldots, n-k)$. Тогда, используя неравенство

$(a+\alpha)^p - a^p \geqslant pa^{p-1}\alpha$; $a, \alpha \geqslant 0$; $p \geqslant 1$, имеем

$$n\left(I_p\left(\frac{k+1}{n}, g_n^*\right) - I_p\left(\frac{k}{n}, g_n^*\right)\right) = \sum_{i=1}^{s-1}\{(a_i + \ldots + a_{i+k})^p -$$
$$-(a_i + \ldots + a_{i+k-1})^p\} + \sum_{i=s}^{n-k-1}\{(a_i + \ldots + a_{i+k})^p -$$
$$-(a_{i+1} + \ldots + a_{i+k})^p\} - (a_s + \ldots + a_{s+k-1})^p \geqslant$$
$$\geqslant p(a_s + \ldots + a_{s+k-1})^{p-1}\left\{\sum_{i=s}^{n-k-1} a_i + \sum_{i=k+1}^{s+k-1} a_i\right\} -$$
$$-(a_s + \ldots + a_{s+k-1})^p.$$

Если $n-k-1 \geqslant k$ (что равносильно $k/n < 1/2$), то

$$\sum_{i=s}^{n-k-1} a_i + \sum_{i=k+1}^{s+k-1} a_i \geqslant (a_s + \ldots + a_{s+k-1}).$$

Подставляя это в предыдущее неравенство и учитывая, что $p \geqslant 1$, получим $I_p\left(\frac{k+1}{n}, g_n^*\right) \geqslant I_p\left(\frac{k}{n}, g_n^*\right)$ при $k/n < 1/2$. Отсюда следует, что $I_p(h, g_n^*)$ не убывает на $[0, {}^1/_2]$, потому что $I_p(h, g_n^*)$ линейна на отрезках $\left\langle\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right\rangle$ $(j = 1, \ldots, n)$. Исходя из этого, таким же путем, как в лемме 2 и теореме 1, доказывается, что $I_p(h, f^*)$ не убывает на $[0, {}^1/_2]$ при любой функции $f(x) \in L_p(0, 1)$. На основании (21) это эквивалентно соотношению (22). Лемма доказана.

Лемма 5 усиливает доказанную нами в § 2 лемму 3. Внеся соответствующие изменения в доказательства следствий 1 и 2 параграфа 3, мы можем считать доказанной следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $f(x) \in L_p(0, 1)$, $0 < p < \infty$. Тогда*

а) $$\int_0^\delta \left\{\int_0^{1-h} |f(x) - f(x+h)|^p dx\right\} dh \geqslant$$
$$\geqslant \int_0^\delta \left\{\int_0^{1-h} |f^*(x) - f^*(x+h)|^p dx\right\} dh, \quad \delta \in [0, 1];$$

б) *если* $0 < p < 1$, *то*

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\delta \omega_p^p(h, f)\, dh \geqslant (1-\delta)\int_0^\delta \omega_p^p(h, f^*)\, dh, \\ &\omega_p^p(\delta, f) \geqslant \frac{1-\delta}{2}\, \omega_p^p(\delta, f^*) \end{aligned}\right\} (\delta \in [0, 1]);$$

в) *если* $1 \leqslant p < \infty$, *то*

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\delta \omega_p^p(h, f)\,dh \geqslant \int_0^\delta \omega_p^p(h, f^*)\,dh, \\ \omega_p(\delta, f) \geqslant \frac{1}{2}\,\omega_p(\delta, f^*) \end{aligned}\right\} \left(\delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right).$$

Замечание. Мы не знаем, насколько найденные нами оценки окончательны. В работе [3] С. А. Теляковский строил $\Phi_n(x) \in L_p\ (0,1)$, $0 < p < \infty$, для которых

$$\omega_p\left(\frac{1}{n}, \Phi_n\right) = \left(\frac{5}{7}\right)^{1/p} \omega_p\left(\frac{1}{n}, \Phi_n^*\right) \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Ю. М. Шмандин сообщил автору следующий пример, который приводится с его согласия. Пусть $g(x)$ принимает значение 1 на каждом из сегментов $[0, {}^1/_3]$ и $[{}^5/_{12}, {}^7/_{12}]$, и значение 0 в остальных точках сегмента $[0, 1]$. Легко убедиться в том, что

$$\omega_p\left(\frac{1}{2}, g\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/p} \omega_p\left(\frac{1}{2}, g^*\right) \qquad (0 < p < \infty).$$

В заключение автор благодарит своих руководителей Э. А. Стороженко и Ю. М. Шмандина за постоянную поддержку и ценные указания при написании работы.

Примечание при корректуре. Автору стало известно о работе Н. П. Корнейчука [6], в которой решается аналогичная задача для 2π-периодического случая при $p=1$ с установлением наилучшей константы.

Одесский государственный университет

Поступило 19.VI.1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ульянов П. Л., Вложение некоторых классов функций H_p^ω, Изв. АН СССР, сер. матем., **32**, № 3 (1968), 649—686.

[2] Ульянов П. Л., Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках, Матем. сб., **81** (123), № 1 (1970), 104—131.

[3] Осколков К. И., Теляковский С. А., К оценкам П. Л. Ульянова для интегральных модулей непрерывности. Изв. АН Арм. ССР, Математика, **6**, № 5 (1971), 406—411.

[4] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. 1, М., 1965.

[5] Ульянов П. Л., Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$, Успехи матем. наук, **27**, № 2 (164) (1972), 3—52.

[6] Корнейчук Н. П., Про співвідношення між модулями неперервності функцій та їх переставлень, Доповіди АН УССР, серія А, № 9 (1973), 794—796.