Г. В. Кузьмина, Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2001, том 276, 253–275

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 276, 2001 г.

Г. В. Кузьмина

ЗАДАЧИ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ РИМАНОВОЙ СФЕРЫ

Введение

К числу классических вопросов геометрической теории функций относится задача о максимуме произведения

$$\mathcal{J} = \prod_{k=1}^{n}{}' R^{\alpha_k^2}(D_k, a_k) \tag{1}$$

степеней конформных радиусов $R(D_k, a_k)$ в семействе $\mathcal{D}(\mathbf{a}) = \mathcal{D}(a_1, \dots, a_n)$ всех систем $\mathbb{D} = \{D_k\}_{k=1}^n$ неналегающих односвязных областей на $\overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in D_k$, $k = 1, \dots, n$. Здесь $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_n\}$ – заданная система различных точек $\overline{\mathbb{C}}$, $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – система положительных чисел; штрих у произведения означает, что при $a_l = \infty$ под соответствующим множителем понимается $R^{-\alpha_l^2}(D_l, a_l)$. Указанную задачу будем называть задачей I. В силу известных результатов метода экстремальной метрики, при любых фиксированных системах точек a_k и параметров α_k максимум произведения (I) достигается для единственной системы областей $\mathbb{D}^* = \{D_k^*\}_{k=1}^n$, определяемой соответствующими условиями. Упомянутый максимум будем обозначать через $\mathcal{J}(\mathbf{a}; \boldsymbol{\alpha})$. Полагая

$$\mathcal{M}(\mathbf{a}; \boldsymbol{\alpha}) = \max_{\mathbb{D} \in \mathcal{D}(\mathbf{a})} \sum_{k=1}^{k} \alpha_k^2 M(D_k, a_k),$$

где $M(D_k, a_k)$ – приведенный модуль области D_k относительно точки a_k, имеем равенство

$$\log \mathcal{J}(\mathbf{a}; \boldsymbol{\alpha}) = 2\pi \mathcal{M}(\mathbf{a}; \boldsymbol{\alpha}).$$

$\mathcal{M}(\mathbf{a}; 1, \dots, 1)$ будем обозначать через $\mathcal{M}(\mathbf{a})$.

Работа выполнена частично при финансовой поддержке РФФИ (грант No. 00-01-00118)

В прямой связи с задачей I при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n$ находится задача о максимуме конформного инварианта

$$J = {\prod_{k=1}^{n}}' R(D_k, a_k) \Big/ \Big\{ \prod_{1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n} |a_k - a_l| \Big\}^{2/(n-1)} \tag{2}$$

в семействе $\mathcal{D}$ всех описанных выше систем областей, где $\mathbf{a} = \{a_1, \ldots, a_n)$ – произвольная система различных точек (задача II). Ясно, что максимум в (2) реализуется только в том случае, когда $\mathbb{D} = \{D_k\}_{k=1}^n$ – экстремальная система областей задачи I для системы точек $a_1, \ldots, a_k$. Максимум функционала (2) в семействе $\mathcal{D}$ будем обозначать через J^*: $J^* = \max\limits_{\mathbf{a}} J(\mathbf{a})$,

$$\log J(\mathbf{a}) = 2\pi \mathcal{M}(\mathbf{a}) - \frac{2}{n-1} \log \prod_{1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n} |a_k - a_l|. \tag{3}$$

При $n = 2, 3$ задача I для равных значений α_k и задача 2 равносильны. Решения задач I и II в указанных случаях представляют собой классические результаты М. А. Лаврентьева (1934) и Г. М. Голузина (1947). Для произвольных положительных значений α_k решения задачи I при $n = 2, 3$ получены Л. И. Колбиной (1952, а также 1955).

При $n = 4$ решения задачи I в случае равных α_k и задачи II получено в [1] (1980). Другое решение задачи II при $n = 4$ дано С. И. Федоровым [2].

При всех $n \geqslant 5$ задача I полностью решена лишь в случаях той или иной симметрии в расположении точек a_k и значений параметров α_k. Так, в том случае, когда все точки a_k лежат на одной окружности и все числа α_k равны друг другу, задача I была впервые решена В. Н. Дубининым, см. [3]. О некоторых обобщениях этого результата см. обзорные статьи [3, 4].

До настоящего времени решение задачи II при $n = 5$ было получено при дополнительном предположении, что системы точек a_k симметричны относительно некоторой окружности или прямой [5, 6].

В §1 настоящей работы приводится решение задачи II при $n = 5$ в общем случае. Здесь доказывается теорема 1, дающая полное описание всех экстремальных конфигураций этой задачи. Одной из экстремальных систем точек a_k является симметричная относительно единичной окружности система $\{0, e^{-2\pi i/3}, 1, e^{2\pi i/3}, \infty\}$.

§2 посвящен доказательству теоремы 2, обобщающей известный ранее результат в задаче I для произвольного числа $n \geqslant 4$ отмеченных точек на $\overline{\mathbb{C}}$ при наличии симметрии в условиях задачи.

Доказательства теорем 1 и 2 иллюстрируют возможности экстремально-метрического подхода, основывающегося на связи между различными задачами об экстремальном разбиении. Впервые такая связь была установлена Е. Г. Емельяновым [7], что привело к интересным приложениям. В данной работе, как и ранее в [8], мы используем подход, простой в техническом отношении и непосредственно основывающийся на конструировании допустимой метрики рассматриваемой проблемы модуля из экстремальных метрик более простых проблем модуля для семейств классов кривых.

§1. Решение задачи II при $n = 5$

1.1. Целью настоящего параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *В семействе всех систем $\{D_k\}_{k=1}^5$ неналегающих односвязных областей D_k на $\overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in D_k$, $k = 1,\dots,5$, где $\{a_k\}_{k=1}^5$ – произвольная система различных точек $\overline{\mathbb{C}}$, справедливо точное неравенство*

$$J(a_1,\dots,a_5) \leqslant 4^{11/3} \cdot 3^{-3/4} \cdot 5^{-25/6} (= 8,656 \cdot 10^{-2}). \tag{4}$$

Равенство в (4) имеет место в том случае, когда $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{1, e^{-2\pi i/3}, 0, e^{2\pi i/3}, \infty\}$, а областями D_k, $k = 1,\dots,5$, служат круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{z^6 + 7z^3 + 1}{z^2(z^3 - 1)^2} dz^2.$$

Каждая другая экстремальная конфигурация теоремы 1 получается из указанной при дробно-линейном автоморфизме $\overline{\mathbb{C}}$.

Экстремальные конфигурации задачи о J_n при $n = 2, 3, 4, 5$ схематично изображены соответственно на рис. 1, 2, 3, 4, где $\omega = e^{2\pi i/3}$.

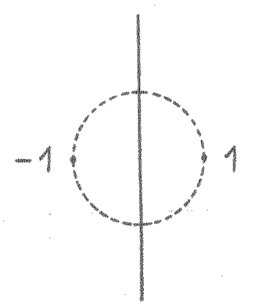

Рис. 1

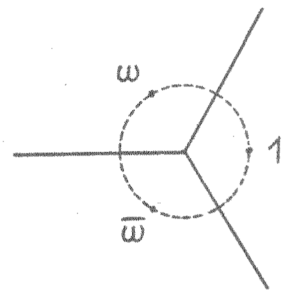

Рис. 2.

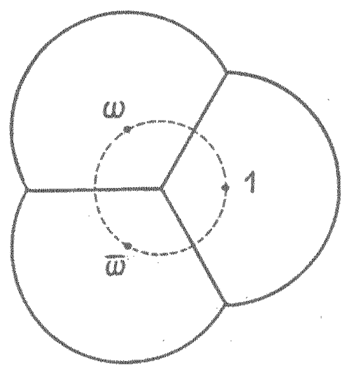

Рис. 3

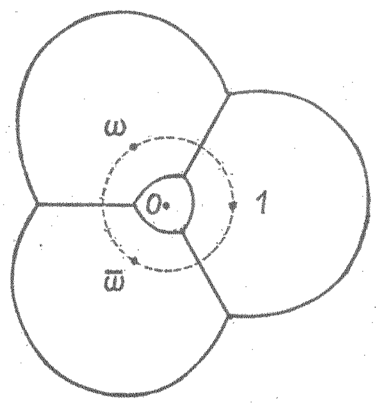

Рис. 4.

1.2. Доказательство теоремы 1 основывается на нескольких леммах. Первая из этих лемм позволяет ограничиться рассмотрением систем точек специального вида.

Лемма 1. *Пусть* $\{a_1, \dots, a_5\}$ *– экстремальная система точек теоремы* 1. *Тогда*

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{a_0, e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, e^{i\varphi_3}, \infty\},$$

где φ_k *– вещественные числа,* $|a_0| < 1$, *или же* $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ *соответствует указанной системе точек при дробно-линейном автоморфизме* $\overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство. Так как функционал (2) является инвариантом относительно группы дробно-линейных автоморфизмов $\overline{\mathbb{C}}$, то можем считать, что $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{-1, 1, a, \infty\}$, где $a \neq \pm 1, \infty$. Следовательно, достаточно считать, что системой точек a_k служит пятерка различных точек вида

$$\{a_0, -1, 1, a, \infty\}, \quad \text{где} \quad a_0, a \text{ – некоторые точки} \quad \mathbb{C}.$$

Как показано в [5], все точки a_k, образующие экстремальную систему, не могут лежать на одной окружности или прямой, и никакая четверка из этих точек также не может обладать указанным свойством. Пусть C – окружность, проходящая через точки -1, 1, a. В силу предыдущего замечания, $\operatorname{Im} a \neq 0$, $\operatorname{Im} a_0 \neq 0$, $a_0 \overline{\in} C$. Преобразование

$$f_0(z) = \frac{-z+3}{z-1}$$

переводит точки -1, 1, ∞ в ту же тройку точек, $f_0(a) = -1 + \frac{2}{a-1}$. Поэтому можем считать, что

$$\operatorname{Im} a > 0.$$

Кроме того, достаточно считать, что

$$a_0 \in \operatorname{Int} C.$$

Действительно, обозначим через L_{-1}, L_1 и L_0 прямые, проходящие соответственно через пары точек $\{-1, a\}$, $\{1, a\}$ и $\{-1, 1\}$. Пусть $\mathbb{H}_{-1}$ – полуплоскость, ограниченная прямой L_{-1} и не содержащая точки $z = 1$, $\mathbb{H}_1$ – полуплоскость, ограниченная прямой L_1 и не содержащая точки $z = -1$, $\mathbb{H}^- = \{z\colon \operatorname{Im} z < 0\}$ – нижняя полуплоскость. Предположим, что $a_0 \in \operatorname{Ext} C$. Тогда выполняется по крайней мере одно из условий: a) $a_0 \in \mathbb{H}_{-1}$, b) $a_0 \in \mathbb{H}_1$, c) $a_0 \in \mathbb{H}^-$. Преобразования

$$f_1(z) = \frac{z+1-2a}{z-1}, \quad f_2(z) = \frac{2a+1-z}{z+1}, \quad f_3(z) = \frac{az-1}{z-a}$$

переводят систему $\{-1, 1, a, \infty\}$ в ту же систему точек. Легко видеть, что в случае a) имеем $f_1(a_0) \in \operatorname{Int} C$, а в случаях b) и c) соответственно $f_2(a_0) \in \operatorname{Int} C$ и $f_3(a_0) \in \operatorname{Int} C$. Следовательно, достаточно считать, что $a_0 \in \operatorname{Int} C$. Наконец, рассматривая линейное преобразование, переводящее окружность C в единичную окружность, приходим к утверждению леммы 1.

Следующая лемма 2 позволяет свести исследование значений функционала (2) для систем точек $\{a_0, e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, e^{i\varphi_3}, \infty\}$, указанных в лемме 1, к исследованию его значений для систем вида $\{0, e^{i\psi_1}, e^{i\psi_2}, e^{i\psi_3}, \infty\}$.

Отметим, что доказательства лемм 2 и 3 настоящей работы существенно проще доказательств соответствующих утверждений в [5]. Приводимые здесь доказательства основываются на экстремально-метрическом подходе, который делает излишними достаточно громоздкие построения в [5], связанные с рассмотрением приведенных модулей двуугольников специального вида.

Лемма 2. *Пусть a_1, a_2, a_3 – точки окружности $|z| = 1$, $|a_0| < 1$, и пусть $\dot{a}_k$, $k = 1, 2, 3$, – образы точек a_k при отображении*

$$\dot{f}(z) = \frac{z - a_0}{1 - \overline{a}_0 z}.$$

Справедливо неравенство

$$\log J(a_0, a_1, a_2, a_3, \infty) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\Big\{ \log J(0, a_1, a_2, a_3, \infty) + \log J(0, \dot{a}_1, \dot{a}_2, \dot{a}_3, \infty)\Big\} + \frac{1}{4}\log(1 - |a_0|^2).$$

Доказательство. Достаточно считать, что $a_0 \neq 0$. Имеем равенство

$$\log J(a_0, a_1, a_2, a_3, \infty) = 2\pi \mathcal{M}(a_0, a_1, a_2, a_3, \infty) -$$
$$-\frac{1}{2}\log\big|(a_0 - a_1)(a_0 - a_2)(a_0 - a_3)(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)\big|. \tag{5}$$

Пусть $\rho^{(1)}(z)|dz|$ – экстремальная метрика проблемы модуля, определяющей $\mathcal{M}(a_0, a_1, a_2, a_3, 1/\overline{a}_0)$, $\rho^{(2)}(z)|dz|$ – экстремальная метрика проблемы модуля, определяющей $\mathcal{M}(0, a_1, a_2, a_3, \infty)$. Легко видеть, что метрика $\rho(z)|dz|$, удовлетворяющая условиям

$$\rho(z)|dz| = \begin{cases} \rho^{(1)}(z)|dz| & \text{при} \quad z \in U = \{z : |z| < 1\}, \\ \rho^{(2)}(z)|dz| & \text{при} \quad z \in U^* = \{z : |z| > 1\} \end{cases}$$

и доопределенная произвольным образом при $|z| = 1$, является допустимой метрикой проблемы модуля, определяющей $\mathcal{M}(a_0, a_1, a_2, a_3, \infty)$. Поэтому имеем неравенство

$$\mathcal{M}(a_0, a_1, a_2, a_3, \infty) \leqslant \mathcal{M}^{(1)}(U) + \mathcal{M}^{(2)}(U^*), \tag{6}$$

где через $\mathcal{M}^{(1)}(U)$ и $\mathcal{M}^{(2)}(U^*)$ обозначены приведенные площади соответственно круга U в метрике $\rho^{(1)}(z)|dz|$ и области U^* в метрике $\rho^{(2)}(z)|dz|$. Имеем

$$2\pi\mathcal{M}(a_0,a_1,a_2,a_3,1/\overline{a}_0) =$$
$$= \log\left\{R(D_0^{(1)},a_0)R(D_1^{(1)},a_1)R(D_2^{(1)},a_2)R(D_3^{(1)},a_3)R(D_4^{(1)},1/\overline{a}_0)\right\},$$

где $D_k^{(1)}$ – области экстремального разбиения в задаче о $\mathcal{M}(a_0,a_1,$ $a_2,a_3,1/\overline{a}_0)$. Поскольку

$$R(D_4^{(1)},1/\overline{a}_0) = \frac{1}{|a_0|^2}R(D_0^{(1)},a_0),$$

то

$$2\pi\mathcal{M}(a_0,a_1,a_2,a_3,1/\overline{a}_0) =$$
$$= 2\log\left\{R(D_0^{(1)},a_0)\big[R(D_1^{(1)},a_1),R(D_2^{(1)},a_2),R(D_3^{(1)},a_3)\big]^{1/2}\right\} + \log\frac{1}{|a_0|^2},$$

откуда

$$2\pi\mathcal{M}^{(1)}(U) = \log\left\{R(D_0^{(1)},a_0)\big[R(D_1^{(1)},a_1),R(D_2^{(1)},a_2),R(D_3^{(1)},a_3)\big]^{1/2}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{2\pi\mathcal{M}(a_0,a_1,a_2,a_3,1/\overline{a}_0) - \log\frac{1}{|a_0|^2}\right\}.$$

Аналогично, имеем равенство

$$2\pi\mathcal{M}^{(2)}(U^*) = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathcal{M}(0,a_1,a_2,a_3,\infty).$$

Неравенство (6) теперь можем записать в виде

$$2\pi\mathcal{M}(a_0,a_1,a_2,a_3,\infty) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left\{2\pi\mathcal{M}(a_0,a_1,a_2,a_3,1/\overline{a}_0) + 2\pi\mathcal{M}(0,a_1,a_2,a_3,\infty) - \log\frac{1}{|a_0|^2}\right\}. \quad (7)$$

Из (5) и (7) получаем неравенство

$$2\log J(a_0,a_1,a_2,a_3,\infty) \leqslant$$
$$\leqslant 2\pi\mathcal{M}(a_0,a_1,a_2,a_3,1/\overline{a}_0) + 2\pi\mathcal{M}(0,a_1,a_2,a_3,\infty) -$$

$$-\log\frac{1}{|a_0|^2}-\log\left|(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_2-a_3)\right|. \quad (8)$$

Имеем

$$\log J(a_0,a_1,a_2,a_3,1/\overline{a}_0)=2\pi\mathcal{M}(a_0,a_1,a_2,a_3,1/\overline{a}_0)-$$

$$-\frac{1}{2}\log\left|\left(\frac{1}{\overline{a}_0}-a_0\right)\left(\frac{1}{\overline{a}_0}-a_1\right)\left(\frac{1}{\overline{a}_0}-a_2\right)\left(\frac{1}{\overline{a}_0}-a_3\right)\right|-$$

$$-\frac{1}{2}\log\left|(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_2-a_3)\right|.$$

Пользуясь конформной инвариантностью функционала (2), в результате простых преобразований отсюда получаем

$$2\pi\mathcal{M}(a_0,a_1,a_2,a_3,1/\overline{a}_0)=$$

$$=\log J(0,\dot a_1,\dot a_2,\dot a_3,\infty)+\log\frac{1}{|a_0|^2}+\frac{1}{2}\log(1-|a_0|^2)+$$

$$+\frac{1}{2}\log\left|(a_0-a_1)^2(a_0-a_2)^2(a_0-a_3)^2(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_2-a_3)\right|. \quad (9)$$

Далее,

$$2\pi\mathcal{M}(0,a_1,a_2,a_3,\infty)=$$

$$=\log J(0,a_1,a_2,a_3,\infty)+\frac{1}{2}\log\left|(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_2-a_3)\right|. \quad (10)$$

Используя равенства (9) и (10), из (8) получаем неравенство

$$2\log J(a_0,a_1,a_2,a_3,\infty)\leqslant$$

$$\leqslant\log J(0,a_1,a_2,a_3,\infty)+\log J(0,\dot a_1,\dot a_2,\dot a_3,\infty)+\frac{1}{2}\log(1-|a_0|^2),$$

что и доказывает лемму 2.

Следующая лемма устанавливает связь величины $J(0,a_1,a_2,a_3,\infty)$, где a_1, a_2, a_3 – любые точки единичной окружности, с модулями хорошо известных экстремально-метрических проблем.

Лемма 3. *Пусть* a_1, a_2, a_3 *– точки окружности* $C_1 = \{z : |z| < 1\}$, *расположенные в порядке возрастания аргумента,* $\arg\{a_{k+1}/a_k\} = 2\pi\lambda_k$, $0 < \lambda_k < 1$, $k = 1, 2, 3$, $\lambda_2 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ $(a_4 = a_1)$. *Тогда*

$$\log J(0, a_1, a_2, a_3, \infty) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{3} \left\{ 2\pi\mathcal{M}(0, 1, \infty; \lambda_k, 1, \lambda_k) + \log\lambda_k - \frac{1}{2}\log(2\sin\pi\lambda_k) \right\}.$$

Доказательство. Имеем равенство

$$\log J(0, a_1, a_2, a_3, \infty) =$$
$$= 2\pi\mathcal{M}(0, a_1, a_2, a_3, \infty) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\log(2\sin\pi\lambda_k). \tag{11}$$

Получим оценку для $\mathcal{M}(0, a_1, a_2, a_3, \infty)$. Как и в [5], будем рассматривать углы S_k, $k = 1, 2, 3$, ограниченные лучами, выходящими из начала координат и содержащими точки a_k и a_{k+1}. Рассмотрим отображение

$$w = f_k(z) = \{z/a_k\}^{1/\lambda_k}$$

угла S_k на w-плоскость с разрезом по лучу $[0, \infty]$ и обратимся к задаче о $\mathcal{M}(0, 1, \infty; \lambda_k, 1, \lambda_k)$. Ассоциированным квадратичным дифференциалом в этой задаче служит дифференциал

$$Q_k(w)dw^2 = -\frac{\lambda_k^2}{4\pi^2}\,\frac{(w + \varkappa_k)(w + 1/\varkappa_k)}{w^2(w-1)}\,dw^2, \tag{12}$$

где при $0 < \lambda_k \leqslant 1/2$ $\varkappa_k \in (0, 1]$ и удовлетворяет уравнению

$$\varkappa_k + 1/\varkappa_k = 1/\lambda_k^2 - 2,$$

а при $\lambda_k > 1/2$

$$\varkappa_k = e^{2i\beta_k}, \quad 0 < \beta_k < \pi/2, \quad 2\cos\beta_k = 1/\lambda_k.$$

Пусть $\widetilde{\rho}(z)|dz|$ – метрика, заданная в каждой из областей S_k, $k = 1, 2, 3$, равенством

$$\widetilde{\rho}(z)|dz| = |Q_k(w)|^{1/2}|dw|, \quad \text{где} \quad w = f_k(z).$$

Легко видеть, что каждая из замкнутых кривых на $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus \{0, a_1, a_2, a_3, \infty\}$, гомотопных точечной кривой в какой-либо из точек 0, a_1,

a_2, a_3, ∞, имеет в метрике $\widetilde{\rho}(z)|dz|$ длину, большую или равную 1. Пусть $\varepsilon > 0$ и достаточно мало. Пусть $\overline{\mathbb{C}}_z(\varepsilon)$ получается из $\overline{\mathbb{C}}_z$ удалением ε-окрестностей точек 0, a_1, a_2, a_3, ∞, и пусть $S_k(\varepsilon) = S_k \cap \overline{\mathbb{C}}_z(\varepsilon)$. Через $\rho(z)|dz|$ обозначим экстремальную метрику проблемы модуля, определяющей $\mathcal{M}(0, a_1, a_2, a_3, \infty)$. Из отмеченного выше следует неравенство

$$\sum_{k=1}^{3} \underset{\rho}{\text{площ.}}\, S_k(\varepsilon) \leqslant \sum_{k=1}^{3} \underset{\widetilde{\rho}}{\text{площ.}}\, f_k\big(S_k(\varepsilon)\big). \tag{13}$$

При отображении $w = f_k(z)$ ε-окрестностям точек $z = 0$ и $z = \infty$ соответствуют $\varepsilon^{1/\lambda_k}$-окрестности точек $w = 0$ и $w = \infty$, а ε-окрестностям точек a_k и a_{k+1} соответствует окрестность точки $w = 1$, на границе которой $|w - 1| = \frac{1}{\lambda_k}\varepsilon + o(\varepsilon)$. Имеем равенства

$$\mathcal{M}(0, a_1, a_2, a_3, \infty) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{k=1}^{3} \Big[\underset{\rho}{\text{площ.}}\, S_k(\varepsilon) + \frac{1}{2\pi}(2\lambda_k \log\varepsilon + \log\varepsilon)\Big],$$

$$\mathcal{M}(0, 1, \infty; \lambda_k, 1, \lambda_k) = \\ = \lim_{\varepsilon\to 0} \Big\{\underset{\widetilde{\rho}}{\text{площ.}}\, f_k\big(S_k(\varepsilon)\big) + \frac{1}{2\pi}\Big[2\lambda_k^2 \cdot \frac{1}{\lambda_k}\log\varepsilon + \log\Big(\frac{1}{\lambda_k}\varepsilon\Big)\Big]\Big\}.$$

Отсюда, из неравенства (13) и равенства (11) получаем неравенство леммы 3.

Лемма 4. *При* $0 < \lambda < 1$ *имеет место равенство*

$$\mathcal{M}(0, 1, \infty; \lambda, 1, \lambda) = -2\Big\{\Big(\frac{1}{2} - \lambda\Big)^2 \log\Big|\frac{1}{2} - \lambda\Big| + \\ + \Big(\frac{1}{2} + \lambda\Big)^2 \log\Big(\frac{1}{2} + \lambda\Big) - 2\lambda^2 \log\lambda - \frac{1}{2}\log 2\Big\}. \tag{14}$$

Доказательство. Как отмечалось при доказательстве леммы 3, дифференциал (12) (мы опускаем индекс "k" в выражении (12)) является ассоциированным квадратичным дифференциалом задачи о $\mathcal{M}(0, 1, \infty; \lambda, 1, \lambda)$. Пусть D_0, D_1, D_2 – круговые области дифференциала (12), содержащие соответственно точки $w_0 = 0$, $w_1 = 1$, $w_2 = \infty$. Пусть $\zeta = g_j(w)$ – отображение области D_j, $j = 0, 1$, на круг $|\zeta| < R(D_j, w_j)$, нормированное условием $g_k(w_k) = 0$, $\zeta = g_2(w)$ – отображение области D_2 на область

$|\zeta| > R^{-1}(D_2,\infty)$, $g_2(\infty) = \infty$. Для отображений $\zeta = g_j(w)$ имеем уравнения

$$-4\pi^2 Q(w)dw^2 = \lambda^2(d\log\zeta)^2, \quad j = 0,2;$$
$$-4\pi^2 Q(w)dw^2 = (d\log\zeta)^2, \qquad j = 1.$$

Благодаря симметрии в условиях задачи, преобразование

$$u = \frac{1}{2}(w + 1/w)$$

приводит к квадратичному дифференциалу более простого вида:

$$Q(w)dw^2 = q(u)du^2,$$

где

$$q(u)du^2 = -\frac{\lambda^2}{4\pi^2}\,\frac{u + \frac{1}{2}(\varkappa + 1/\varkappa)}{(u-1)^2(u+1)}du^2$$

– ассоциированный квадратичный дифференциал задачи $\mathcal{M}\big(1,\infty,-1;\frac{1}{2},\lambda,0\big)$, т.е. задачи об экстремальном разбиении $\overline{\mathbb{C}}\setminus\{-1\}$. Используя указанные уравнения, получаем выражения для конформных радиусов рассматриваемых областей, а тем самым и для величины $\mathcal{M}(0,1,\infty;\lambda,1,\lambda)$. Равенство (14) вытекает также из полученного Л. И. Колбиной [9] неравенства для произведения степеней конформных радиусов трех неналегающих областей.

Положим

$$\begin{aligned} H(\lambda) = &\Big(\frac{1}{2}-\lambda\Big)^2\log\Big|\frac{1}{2}-\lambda\Big| + \Big(\frac{1}{2}+\lambda\Big)^2\log\Big(\frac{1}{2}+\lambda\Big) - \\ &-\Big(\frac{1}{2}+2\lambda^2\Big)\log\lambda + \frac{1}{4}\log\sin\pi\lambda - \frac{1}{4}\log 2. \end{aligned} \tag{15}$$

По леммам 3 и 4, имеем неравенство

$$\log J(0,a_1,a_2,a_3,\infty) \leqslant -2\sum_{k=1}^{3} H(\lambda_k). \tag{16}$$

Следующие две леммы, завершающие доказательство теоремы 1, доказаны в [5]. Для полноты изложения мы приводим здесь краткое доказательство этих лемм. Первая из указанных лемм представляет собой результат чисто технического характера.

Лемма 5. *Пусть* $H(\lambda)$ – *функция* (15). *При всех* $0 < \lambda_k \leqslant 1/2$, $k = 1, 2, 3$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, *справедливо неравенство*

$$-\sum_{k=1}^{3} H(\lambda_k) \leqslant -3H(1/3). \tag{17}$$

Равенство в (17) *имеет место только в случае* $\lambda_k = 1/3$, $k = 1, 2, 3$.

Доказательство. Исследуем функцию

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -\sum_{k=1}^{3} H(\lambda_k)$$

при условиях

$$\sum_{k=1}^{3} \lambda_k = 1, \quad 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 < 1. \tag{18}$$

Положим

$$-H'(\lambda) = g(\lambda).$$

Функции $g(\lambda)$ и $H(\lambda)$ имеют довольно простое поведение на всем промежутке $(0, 1)$. Действительно, $g''(\lambda) > 0$ при $\lambda \in (0, 1/2)$. Так как $g'(0) = -\infty$, $g'(1/2) = +\infty$, то $g'(\lambda)$ имеет на промежутке $(0, 1/2)$ единственный нуль $\lambda_0 = 0,379$ и потому $g(\lambda)$ убывает на $(0, \lambda_0]$ от $g(0) = +\infty$ до $g(\lambda_0)$ и возрастает на $[\lambda_0, 1/2]$ от $g(\lambda_0)$ до $g(1/2) < 0$. При $\lambda \in (1/2, 1)$ $g(\lambda)$ возрастает от $g(1/2)$ до $g(1) = +\infty$.

Пусть $\lambda_* = 0,190$ и $\lambda^* = 0,570$ – нули функции $g(\lambda)$ на всем интервале $(0, 1)$. Функция $H(\lambda)$ убывает в интервале $(0, \lambda_*)$ от $+\infty$ до $H(\lambda_*) = 0,343\ldots$ и возрастает в интервале $[\lambda_*, 1/2]$. Далее, $H(\lambda)$ возрастает в интервале $[1/2, \lambda^*]$ и убывает в интервале $[\lambda^*, 1)$.

Пусть

$$\lambda_3 = 1/3 + \mu, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1/6.$$

Тогда, в силу (18),

$$\lambda_1 \leqslant 1/3 - \mu/2, \quad \lambda_2 = 2/3 - \mu - \lambda_1.$$

Рассмотрим функцию

$$\mathcal{F}(\lambda_1) = -\big\{H(\lambda_1) + H(2/3 - \mu - \lambda_1) + H(1/3 + \mu)\big\}, \tag{19}$$

как функцию от λ_1, при всех $\lambda_1 \leqslant 1/3 - \mu/2$.

Пусть $\lambda_2 = 2/3 - \mu - \lambda_1 < \lambda_0$. Тогда λ_1, λ_2 лежат в интервале убывания функции $g(\lambda)$ и потому $\mathcal{F}'(\lambda_1) \geqslant 0$. Следовательно, при всех $\lambda_1 \leqslant 1/3 - \mu/2$

$$\mathcal{F}(\lambda_1) \leqslant \mathcal{F}(1/3 - \mu/2) = -\big\{2H(1/3 - \mu/2) + H(1/3 + \mu)\big\}.$$

Рассматривая функцию

$$A(\mu) = -\big\{2H(1/3 - \mu/2) + H(1/3 + \mu)\big\},$$

при помощи несложных вычислений находим, что при всех $0 < \mu \leqslant 1/6$

$$A(\mu) \leqslant \max\big\{A(0), A(1/6)\big\} < -3H(1/3).$$

Отсюда и из (19) получаем (17).

Пусть теперь $\lambda_2 = 2/3 - \mu - \lambda_1 \geqslant \lambda_0$. Тогда и $\lambda_3 = 1/3 + \mu \geqslant \lambda_0$. Так как при всех $\lambda \in (0, 1/2]$ $H(\lambda) \geqslant H(\lambda_*) = 0,343\ldots$, а при $\lambda \in (\lambda_0, 1/2]$ $H(\lambda) \geqslant H(\lambda_0) = 0,441\ldots$, то

$$\mathcal{F}(\lambda_1) \leqslant -\big\{H(\lambda_*) + 2H(\lambda_0)\big\} < -1,225 < -3H(1/3) = -1,2234.$$

Следовательно, неравенство (17) справедливо и в указанном случае. Этим лемма 5 доказана

Пусть

$$\mathbf{a}_1 = \big\{0, e^{-i\omega}, 1, e^{i\omega}, \infty\big\},\ \mathbf{a}_2 = \big\{0, e^{-i\omega/2}, 1, e^{i\omega/2}, \infty\big\}, \quad \text{где} \quad \omega = 2\pi/3.$$

Система $\mathbf{a}_2$ соответствует системе $\mathbf{a}_1$ при отображении $z \to (e^{i\omega/2}z - e^{-i\omega/2})/(z-1)$, следовательно,

$$J(\mathbf{a}_1) = J(\mathbf{a}_2).$$

Неравенство (16) и лемма 5 показывают, что для точек a_k, удовлетворяюших условиям этой леммы с $\max \lambda_k \leqslant 1/2$, справедливо неравенство

$$\log J(0, a_1, a_2, a_3, \infty) \leqslant \log J(\mathbf{a}_1) = -2 \cdot 3H(1/3). \tag{20}$$

Равенство в (20) в указанных случаях имеет место только для систем, получающихся из системы $\mathbf{a}_1$ при преобразовании поворота $z \to e^{i\alpha}z$, α – вещественное.

Однако в случае $\max \lambda_k > 1/2$ непосредственное использование неравенства (16) приводит лишь к грубой оценке для $\log J(0, a_1, a_2, a_3, \infty)$. Так, из неравенства (16) получаем

$$\log J(\mathbf{a}_2) \leqslant -2(H(2/3) + 2H(1/6)) = -2 \cdot 1,2071,$$

тогда как

$$\log J(\mathbf{a}_2) = \log J(\mathbf{a}_1) = -2 \cdot 3H(1/3) = -2 \cdot 1,2234.$$

При доказательстве следующей леммы наряду с неравенством (16) существенно используется лемма 5.

Лемма 6. *Пусть точки a_k и числа λ_k, $k = 1,2,3$, определены в условиях леммы 3, $0 < \lambda_k < 1$, $k = 1,2,3$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Пусть $\max \lambda_k > 1/2$. Тогда*

$$\log J(0, a_1, a_2, a_3, \infty) \leqslant \log J(\mathbf{a}_2) = -2 \cdot 3H(1/3). \qquad (20)$$

Равенство в (20) в рассматриваемых случаях имеет место только для систем точек, получающихся из системы $\mathbf{a}_2$ преобразованием поворота $z \to e^{i\beta} z$, β – вещественное.

Доказательство. Для определенности будем считать, что

$$a_1 = e^{-2\pi i \lambda_1}, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = e^{2\pi i \lambda_2},$$

где

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 < \lambda_3 < 1, \quad \lambda_3 > 1/2.$$

(i) Пусть сначала $\lambda_2 \leqslant 1/4$. При отображении

$$w = -\frac{e^{2\pi i \lambda_2} z - 1}{z - e^{2\pi i \lambda_2}}$$

система $\{0, a_1, a_2, a_3, \infty\}$ переходит в систему $\{b_0, b_1, b_2, b_3, \infty\}$, где $b_0 = \sin \pi(\lambda_2 - \lambda_1)/\sin \pi(\lambda_2 + \lambda_1)$, $b_1 = -e^{-2\pi i \lambda_2}$, $b_2 = 1$, $b_3 = -e^{2\pi i \lambda_2}$. Обозначим через $K(a,b,c)$ замкнутую выпуклую оболочку тройки точек $\{a,b,c\}$. Очевидно, $0 \in K(b_1,b_2,b_3)$, $b_0 \in K(b_1,b_2,b_3)$ и потому $0 \in K(\dot{b}_1, \dot{b}_2, \dot{b}_3)$, где $\dot{b}_k$ – образ точки b_k при отображении $\dot{w} = (w - b_0)/(1 - b_0 w)$. Отсюда и из лемм 3 и 5 получаем неравенство (20). Ясно, что равенство в (20) в рассматриваемом случае достигается только при $b_0 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/3$, $\{b_0, b_1, b_2, b_3, \infty\} = \mathbf{a}_1$, следовательно, только при $\{0, a_1, a_2, a_3, \infty\} = \mathbf{a}_2$.

(ii) Пусть теперь $\lambda_2 > 1/4$. В этом случае используем простые свойства функции $H(\lambda)$, указанные в начале доказательства леммы 5.

Пусть $\lambda_1 \leqslant 1/10$. Так как $1/4 < \lambda_2 < 1/2$, $1/2 < \lambda_3 < 3/4$, то имеем неравенство

$$\sum_{k=1}^{3} H(\lambda_k) > H(0,10) + H(0,25) + H(0,75) > 3H(1/3).$$

Далее, разбивая интервал $(0,10 < \lambda_1 < 0,25)$ на частичные интервалы, определяя соответствующие интервалы изменения параметров λ_2 и λ_3 и оценивая значения функции $H(\lambda)$ в указанных интервалах, получаем, что для всех рассматриваемых значений λ_1, λ_2, λ_3 справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{3} H(\lambda_k) > 3H(1/3).$$

Этим доказана лемма 6 и тем самым завершено доказательство теоремы 1.

§2. К задаче о произведении степеней конформных радиусов

2.1. Пусть a_k, $k = 1, \dots, n$, – точки окружности $|z| = 1$ $(n \geqslant 2)$, $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \infty$. Рассмотрим задачу о максимуме произведения

$$\mathcal{J} = \left\{R(D_0, 0)R^{-1}(D_{n+1}, \infty\right\}^{\alpha^2} \prod_{k=1}^{n} R(D_k, a_k), \tag{21}$$

α – положительное число, в семействе $\mathcal{D}_n$ всех систем $\mathbb{D}$ неналегающих односвязных областей D_k, $a_k \in D_k$, $k = 0, 1, \dots, n+1$.

При $\alpha^2 = 1/2$ и $n \geqslant 2$ эта задача решена В. Н. Дубининым [10, теорема 6] методом симметризации. Экстремально-метрический подход, использованный в §1 настоящей работы, приводит к простому доказательству следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 2$, $\mathcal{D}_n$ – определенное выше семейство систем областей, $\alpha^2 \leqslant n^2/8$. В семействе $\mathcal{D}_n$ справедливо точное неравенство*

$$\mathcal{J} \leqslant \mathcal{J}^*, \tag{22}$$

где

$$\mathcal{J}^* = \left\{R(D_0^*, 0)R^{-1}(D_{n+1}^*, \infty)\right\}^{\alpha^2} \prod_{k=1}^{n} R(D_k^*, a_k^*),$$

$a_k^* = e^{2\pi ik/n}$, $k = 1, \dots, n$, $\mathbb{D}^* = \{D_k^*\}_{k=0}^{n+1}$ – *система круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(z)dz^2 = -\frac{\alpha^2}{4\pi^2}\,\frac{(z^n + h^n)(z^n + 1/h^n)}{z^2(z^n-1)^2}\,dz^2;$$

здесь $h \in (0,1)$ – *решение уравнения*

$$h^n + \frac{1}{h^n} = \frac{n^2}{\alpha^2} - 2.$$

Равенство в (22) *достигается только для систем областей, получающихся из областей* D_k^*, $k = 0, 1, \dots, n+1$, *преобразованием поворота* $z \to e^{i\gamma}z$, γ – *вещественное.*

Для указанного максимума имеем равенство

$$\log J^* = -\,2n\Big\{\Big(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{n}\Big)^2 \log\Big(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{n}\Big) + \Big(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{n}\Big)^2 \log\Big(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{n}\Big) - \\ - 2\frac{\alpha^2}{n^2}\log\frac{\alpha}{n} + \frac{1}{2}\log\frac{2}{n}\Big\}.$$

Доказательство. Пусть точки a_k расположены на окружности $|z| = 1$ в порядке возрастания аргумента z:

$\arg\{a_{k+1}/a_k\} = 2\pi\lambda_k > 0$, $k = 1, \dots, n$ (здесь $a_{n+1} = a_1$), $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$.

Пусть, как и в §1,

$$S_k = \big\{z : \arg a_k < \arg z < \arg a_{k+1}\big\}$$

– угол раствора $2\pi\lambda_k$, стороны которого содержат точки a_k и a_{k+1}. Рассмотрим отображение

$$w = f_k(z) = \Big(\frac{z}{a_k}\Big)^{1/\lambda_k}$$

угла S_k на w-сферу с разрезом по лучу $(0,\infty)$. На w-сфере рассмотрим задачу о максимуме суммы

$$\mathcal{M}(0,1,\infty;\alpha_k,1,\alpha_k) = \\ = \alpha_k^2\big[M(D_0^{(k)},0) + M(D_2^{(k)},\infty)\big] + M(D_1^{(k)},1), \quad \alpha_k = \alpha\lambda_k,$$

в семействе $\mathcal{D}^{(k)}$ всех троек неналегающих односвязных областей $D_j^{(k)}$, $j = 0,1,2$; $0 \in D_0^{(k)}$, $1 \in D_1^{(k)}$, $\infty \in D_2^{(k)}$. Ассоциированным квадратичным дифференциалом в этой задаче является (ср. с (12))

$$Q^{(k)}(w)dw^2 = -\frac{\alpha_k^2}{4\pi^2}\,\frac{(w+h^{(k)})(w+1/h^{(k)})}{w^2(w-1)^2}\,dw^2,$$

где при $\alpha_k \leqslant 1/2$ $h^{(k)} \in (0,1]$ – решение уравнения

$$h^{(k)} + \frac{1}{h^{(k)}} = \frac{1}{\alpha_k^2} - 2,$$

при $\alpha_k > 1/2$

$$h^{(k)} = e^{2i\beta(k)}, \quad o < \beta^{(k)} < \pi/2, \quad 2\cos\beta^{(k)} = 1/\alpha_k.$$

Метрика $\left|Q^{(k)}(w)\right|^{1/2}|dw|$ является экстремальной метрикой проблемы модуля, определяющей $\mathcal{M}(0,1,\infty;\alpha_k,1,\alpha_k)$.

Метрика $\rho(z)|dz|$, определямая при $z \in S_k$, $k = 1,\ldots,n$, условием

$$\rho(z)|dz| = \left|Q^{(k)}(f_k(z))\right|^{1/2}|f_k'(z)|\;|dz|,$$

является допустимой метрикой проблемы модуля, определяющей

$$\frac{1}{2\pi}\log J = \mathcal{M}(0,a_1,\ldots,a_n,\infty;\alpha,1,\ldots,1,\alpha).$$

Учитывая, что при отображении $w = f_k(z)$ ε-окрестности точки a_k соответствует $(\lambda_k\varepsilon)$-окрестность точки $w = 1$, получаем неравенство

$$2\pi\mathcal{M}(0,a_1,\ldots,a_n,\infty;\alpha,1,\ldots,1,\alpha) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left\{2\pi\mathcal{M}(0,1,\infty;\alpha\lambda_k,1,\alpha\lambda_k) + \log\lambda_k\right\}.$$

Используя выражение (14) для $\mathcal{M}(0,1,\infty;\lambda,1,\lambda)$, последнее неравенство можем записать в виде

$$2\pi\mathcal{M}(0,a_1,\ldots,a_n,\infty;\alpha,1,\ldots,1,\alpha) \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} H_0(\alpha\lambda_k) + n\log\frac{2}{\alpha},$$

где

$$H_0(\mu) = -\left(\frac{1}{2}-\mu\right)^2\log\left|\frac{1}{2}-\mu\right| - \left(\frac{1}{2}+\mu\right)^2\log\left(\frac{1}{2}+\mu\right) + \left(\frac{1}{2}+2\mu^2\right)\log\mu.$$

Найдем

$$\max\sum_{k=1}^{n} H_0(\mu_k) \quad \text{при условии} \quad \sum_{k=1}^{n}\mu_k=\alpha.$$

Введем функцию

$$F(\mu_1,\dots,\mu_n)=\sum_{k=1}^{n} H_0(\mu)+\varkappa\Big(\sum_{k=1}^{n}\mu_k-\alpha\Big),$$

где $\varkappa$ – постоянная. Система $\frac{\partial}{\partial\mu_k}F(\mu_1,\dots,\mu_n)=0$, $k=1,\dots,n$, имеет вид

$$H_0'(\mu_k)+\varkappa=0, \quad k=1,\dots,n. \tag{23}$$

Имеем

$$H_0'(\mu)=2\Big(\frac12-\mu\Big)\log\Big|\frac12-\mu\Big|-2\Big(\frac12+\mu\Big)\log\Big(\frac12+\mu\Big)+4\mu\log\mu+\frac{1}{2\mu}.$$

Пусть $\mu^*=0,442\dots$ – решение уравнения $H_0''(\mu)=0$. Функция $H_0'(\mu)$ убывает от $+\infty$ до $H_0'(\mu^*)=-0,530$ на интервале $(0,\mu^*)$, возрастает от $H_0'(\mu^*)$ до $H_0'(1)=-0,023$ на интервале $(\mu^*,1)$ и обращается в нуль на интервале $(0,1)$ в единственной точке $\mu^{(0)}=0,290\dots$. Будем считать, что

$$0<\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\dots\leqslant\mu_n<\alpha, \quad \sum_{k=1}^{n}\mu_k=\alpha.$$

Пусть $\mu_1\leqslant\mu^{(0)}=0,290\dots$. Тогда $H_0'(\mu_k)\leqslant H_0'(\mu_1)$ при всех $k\geqslant 1$ и $H_0'(\mu_k)=H_0'(\mu_1)$ только при $\mu_k=\mu_1$, $k=1,\dots,n$. Пусть теперь $\mu_1>\mu^{(0)}$. Тогда $\mu_2+\dots+\mu_n<\alpha-\mu_0<\frac{n}{2\sqrt2}-0,29$,

$$\mu_2<\frac{\frac{n}{2\sqrt2}-0,29}{n-1}=\frac{1}{2\sqrt2}\,\frac{n-0,29\cdot2\sqrt2}{n-1}=\frac{1}{2\sqrt2}\Big(1+\frac{1-0,29\cdot2\sqrt2}{n-1}\Big).$$

Поэтому при всех $n\geqslant2$

$$\mu_2<\frac{1}{2\sqrt2}\cdot1,18<0,42.$$

Следовательно, μ_1 и μ_2 лежат в интервале монотонности функции $H_0'(\mu)$. Значит, система (23) имеет единственное решение

$$\mu_1=\mu_2=\dots=\mu_n=\frac{\alpha}{n}\leqslant0,353\dots.$$

Ясно, что при этом функция $\sum_{k=1}^{n} H_0(\mu_k)$ при условии $\sum_{k=1}^{n}\mu_k = \alpha$ достигает максимума. Этим теорема 2 доказана.

При $\alpha^2 = 1/2$ теорема 2 была доказана В. Н. Дубининым [10] в качестве одного из приложений введенного им разделяющего преобразования областей.

2.2. Верхняя граница для α/n, фигурирующая в условиях теоремы 2, не является неулучшаемой. Вопрос о точной верхней границы для α/n остается открытым. Ниже показывается, что при $\alpha/n \geqslant 1/2$, где n – четное, $n \geqslant 2$, равноотстоящие точки $a_1, \dots, a_n$ на окружности $|z| = 1$ уже не реализуют максимума произведения (21) в рассматриваемом семействе систем областей.

Ниже через $E(c_1, c_2, c_3)$ обозначаем континуум наименьшей емкости, содержащий указанные точки, $\mathcal{C}(\beta) = \operatorname{cap} E(0, e^{-i\beta}, e^{i\beta})$, через $c(\beta)$ при $0 < \beta < \pi/2$ обозначаем общую точку трех аналитических дуг, образующих континуум $E(0, e^{-i\beta}, e^{i\beta})$, $c(0) = 1$, $c(\pi/2) = 0$.

Теорема 3. *Пусть $0 < \beta \leqslant \pi/2$. Пусть $\mathcal{D}_2(\beta)$ – семейство всех четверок неналегающих односвязных областей D_k, $k = 0, \dots, 3$, таких, что $0 \in D_0$, $\infty \in D_3$, $e^{-i\beta} \in D_1$, $e^{i\beta} \in D_2$. Для максимума $\mathcal{J}(\beta)$ произведения*

$$R(D_0, 0)R^{-1}(D_3, \infty)R(D_1, e^{-i\beta})R(D_2, e^{i\beta})$$

в семействе $\mathcal{D}_2(\beta)$ имеем равенство

$$\mathcal{J}(\beta) = 4^{-3}\sin^2\beta\ \mathcal{C}^{-4}(\beta). \tag{24}$$

При $\beta \in (0, \pi/2]$ справедливо неравенство

$$\mathcal{J}(\beta) \leqslant \mathcal{J}(\beta_0), \tag{25}$$

и равенство в (25) достигается только при $\beta = \beta_0$, где β_0, $\pi/6 < \beta_0 < \pi/2$, – решение уравнения

$$c(\beta) = \frac{1}{2}\cos\beta. \tag{26}$$

При любом $\beta \in (0, \pi/2]$ экстремальная система областей $D_k^*(\beta)$, $k = 0, \dots, 3$, в семействе $\mathcal{D}_2(\beta)$ единственна и представляет собой систему круговых областей квадратичного дифференциала $Q(z, \beta)dz^2$, определяемого следующим образом. При $0 < \beta < \pi/2$

$$Q(z, \beta)dz^2 = -\frac{1}{4\pi^2}\,\frac{(z-\mu)(z-1/\mu)(z-e^{-i\gamma})(z-e^{i\gamma})}{z^2(z-e^{-i\beta})^2(z-e^{i\beta})^2}dz^2, \tag{27}$$

где $m = \frac{1}{2}(\mu + 1/\mu)$ *и* $\cos\gamma$ $(0 < \mu < 1,\ \beta < \gamma < \pi)$ *удовлетворяют равенствам*

$$\begin{aligned} m &= c(\beta) + \sqrt{c^2(\beta) - 2c(\beta)\cos\beta + 1}, \\ \cos\gamma &= c(\beta) - \sqrt{c^2(\beta) - 2c(\beta)\cos\beta + 1}; \end{aligned} \tag{28}$$

$$Q(z, \pi/2)dz^2 = -\frac{1}{4\pi^2}\ \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2+1)^2}dz^2.$$

При отображении

$$w = \frac{1}{2}(t + 1/t)i\sin\beta + \cos\beta, \tag{29}$$

где

$$t = \frac{2i\sin\beta}{z + 1/z - 2\cos\beta},$$

каждой из областей $D_k^*(\beta)$, $k = 0, \dots, 3$, *соответствует внешность континуума наименьшей емкости* $E(0, e^{-i\beta}, e^{i\beta})$, $E(0, -i, i) = [-i, i]$.

Доказательство. Применим теорему 1 работы [1] к четверке точек $a_0 = 0$, $a_3 = \infty$, $a_1 = e^{-i\beta}$, $a_2 = e^{i\beta}$, где $0 < \beta \leqslant \pi/2$. Пусть λ – ангармоническое отношение этой четверки точек:

$$\lambda = \frac{a_1 - a_0}{a_1 - a_3} : \frac{a_2 - a_0}{a_2 - a_3} = e^{-2i\beta}, \quad a = \frac{\lambda+1}{\lambda-1} = i\operatorname{ctg}\beta.$$

По теореме 1 в [1], для искомого максимума имеем равенство

$$\mathcal{J}(\beta) = 4^{-3}\sin^2\beta\ \mathcal{C}^{-4}(\beta),$$

где $\mathcal{C}(\beta) = \operatorname{cap} E(0, e^{-i\beta}, e^{i\beta})$. Как показано в [11, гл. 1],

$$\sin\beta\frac{\mathcal{C}'(\beta)}{\mathcal{C}(\beta)} = \cos\beta - c(\beta),$$

откуда

$$\frac{d}{d\beta}\left\{\frac{\sin\beta}{\mathcal{C}^2(\beta)}\right\} = \frac{1}{\mathcal{C}^2(\beta)}\bigl(2c(\beta) - \cos\beta\bigr).$$

Функция $c(\beta)/\cos\beta$ строго убывает от 1 до 0 в интервале $[0, \pi/2]$ и уравнение

$$c(\beta) = \frac{1}{2}\cos\beta$$

имеет единственное решение $\beta = \beta_0$, $\pi/6 < \beta_0 < \pi/2$ (см. [11, гл. 1]). Очевидно, при $\beta = \beta_0$ функция $\mathcal{J}(\beta)$ достигает максимума, следовательно, при всех $\beta \in (0, \pi/2]$ справедливо неравенство (25) и равенство в нем достигается только при $\beta = \beta_0$.

При любом $\beta \in (0, \pi/2]$ рассмотрим линейное отображение областей $D_k^*(\beta)$, $k = 0, \dots, 3$, образующих экстремальную систему областей теоремы 3, при котором точки 0, $e^{-i\beta}$, $e^{i\beta}$ переходят соответственно в $a = i \operatorname{ctg} \beta$, -1, 1, а затем отображение каждой из полученных областей на внешность континуума $E(-1, 1, a)$, указанное в [1, теорема 1]. Таким путем приходим к выражению (29) для отображения $w = w(z)$ каждой из областей $D_k^*(\beta)$, $k = 0, \dots, 3$, на внешность континуума $E(0, e^{-i\beta}, e^{i\beta})$, т.е. на круговую область квадратичного дифференциала

$$q(w, \beta) dw^2 = -\frac{1}{4\pi^2} \, \frac{w - c(\beta)}{w(w - e^{-i\beta})(w - e^{i\beta})} \, dw^2.$$

Отсюда находим, что экстремальная система областей $D_k^*(\beta)$, $k = 0, \dots, 3$, определяется структурой траекторий дифференциала (27), для которого параметры μ и γ удовлетворяют равенствам (28).

Экстремальные конфигурации задачи о $J(\beta)$ изображены на рис. 2а и 2в, $E(0, e^{-i\beta}, e^{i\beta})$ обозначаем через $\mathcal{E}(\beta)$.

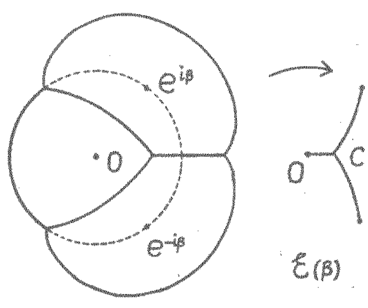

Рис. 5а $(0 < \beta < \pi/2)$

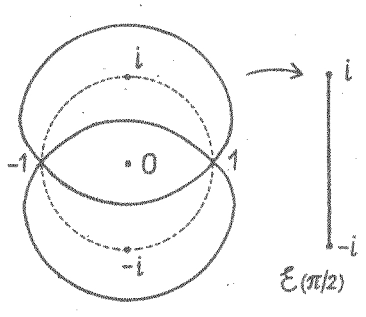

Рис. 5в.

Теорема 3 легко распространяется на случай любого четного числа точек на единичной окружности.

Следствие 1. *Пусть* $0 < \beta \leqslant \pi/2$, $n \geqslant 1$. *Пусть* $\widetilde{a}_0 = 0$, $\widetilde{a}_{2n+1} = \infty$, $\widetilde{a}_l = \exp\{i[-\beta + 2(l-1)\pi]/n\}$, $\widetilde{a}_{l+n} = \exp\{i[\beta + 2(l-1)\pi]/n\}$, $l = 1, \dots, n$. *Через* $\mathcal{D}_{2n}(\beta)$ *обозначаем семейство систем неналегающих односвязных областей* $\widetilde{D}_l$, $l = 0, \dots, 2n+1$, *таких, что* $\widetilde{a}_l \in \widetilde{D}_l$, $l = 0, \dots, 2n+1$. *Пусть* $\mathcal{J}_{2n}(\beta)$ – *максимум произведения*

$$R^{n^2}(\widetilde{D}_0, 0) R^{-n^2}(\widetilde{D}_{2n+1}, \infty) \prod_{l=1}^{n} \big[R(\widetilde{D}_l, \widetilde{a}_l) R(\widetilde{D}_{l+n}, \widetilde{a}_{l+n})\big]$$

в семействе $\mathcal{D}_{2n}(\beta)$. *Имеет место неравенство*

$$\mathcal{J}_{2n}(\beta) \leqslant \mathcal{J}_{2n}(\beta_0), \tag{30}$$

где β_0 – *постоянная, определенная в теореме* 3, *и равенство в* (30) *достигается только при* $\beta = \beta_0$. *Экстремальная система областей* $\widetilde{D}_l^*(\beta_0)$, $l = 0, \dots, 2n+1$, *в семействе* $\mathcal{D}_{2n}(\beta)$ *единственна и соответствует экстремальной четверке областей* $D_k^*(\beta_0)$, $k = 0, \dots, 3$, *теоремы* 3 *при отображении* $z \to z^{1/n}$.

Доказательство. При $n = 1$ следствие 1 представляет собой утверждение теоремы 3, $\mathcal{J}_2(\beta) = \mathcal{J}(\beta)$, где $\mathcal{J}(\beta)$ – функция (24). Пусть $n \geqslant 2$. Система точек $\{\widetilde{a}_l\}$, $l = 0, \dots, 2n+1$, соответствует четверке точек 0, $e^{-i\beta}$, $e^{i\beta}$, ∞ при отображении $z \to z^{1/n}$. Из результатов единственности в задачах об экстремальном разбиении вытекает, что экстремальная система областей $\widetilde{D}_l^*$, $l = 0, \dots, 2n+1$, задачи о $\mathcal{J}_{2n}(\beta)$ соответствует экстремальной четверке областей D_j^*, $j = 0, \dots, 3$, задачи о $\mathcal{J}_2(\beta)$ при указанном отображении. Поэтому имеем равенства

$$R(\widetilde{D}_0^*, 0) = R^{1/n}(D_0^*, 0), \qquad R(\widetilde{D}_{2n+1}^*, \infty) = R^{1/n}(D_3^*, \infty),$$
$$R(\widetilde{D}_l^*, \widetilde{a}_l) = \frac{1}{n} R(D_1^*, e^{-i\beta}), \quad R(\widetilde{D}_{l+n}^*, a_{l+n}) = \frac{1}{n} R(D_2^*, e^{i\beta}), \ l = 1, \dots, n.$$

Следовательно,

$$\mathcal{J}_{2n}(\beta) = \frac{1}{n^{2n}} \mathcal{J}_2^n(\beta).$$

Отсюда и из теоремы 3 вытекает неравенство (30) и утверждение о случае равенства в этом неравенстве.

Теорема 3 и следствие 1 доказывают справедливость утверждения, приведенного в начале §2.2.

Литература

1. Г. В. Кузьмина, *К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **100** (1980), 131–145.
2. С. И. Федоров, *О максимуме одного конформного инварианта в задаче о неналегающих областях,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **112** (1981), 172–183.
3. В. Н. Дубинин, *Симметризация в теории функций комплексного переменного,* Успехи мат. наук **49**, вып. 1 (1994), 3–76.
4. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций.* I, II, Алгебра и анализ **9**, вып. 3 (1997), 41–103; вып. 5 (1997), 1–50.
5. Г. В. Кузьмина, *К вопросу об экстремальном разбиении римановой сферы,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **185** (1990), 72–95.
6. В. Н. Дубинин, *О максимуме одного конформного инварианта,* Препринт ДВО АН СССР. Ин-т приклад. мат., Владивосток, 1990.
7. Е. Г. Емельянов, *О связи двух задач об экстремальном разбиении,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **160** (1987), 91–98.
8. Г. В. Кузьмина, *О связи различных задач об экстремальном разбиении,* Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 116–131.
9. Л. И. Колбина, *Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении,* Докл. АН СССР **84** (1952), 865–868.
10. В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1988), 48–66.
11. Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы,* Тр. Мат. ин-та АН СССР **139** (1980), 1–240.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:kuzmina@pdmi.ras.ru

Поступило 15 марта 2001 г.