А. А. Акопян, А. А. Саакян, О системе дифференциальных уравнений, связанной с полиномиальным классом сдвигов бокс сплайна,
Матем. заметки, 1988, том 44, выпуск 6, 705–724

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 44, № 6 (1988)

О СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННОЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ КЛАССОМ СДВИГОВ БОКС СПЛАЙНА

А. А. Акопян, А. А. Саакян

§ 1. **Введение.** Авторами вводится система линейных дифференциальных уравнений с частными производными, решениями соответствующей однородной системы которой являются полиномы, разложимые по сдвигам бокс сплайна. Для таких систем доказывается теорема существования и единственности. Приводится метод выбора независимых начальных условий. Интересно, что эти независимые начальные условия в свою очередь оказываются тесно связанными с базисом пространства сплайнов, состоящего из B-сплайнов. Мы даем также характеристику пространства полиномов, изоморфного этому пространству сплайнов.

Как следствия получаются некоторые свойства полиномиального класса бокс сплайна, а также вычисляются размерности пространств сплайнов в некоторых специальных случаях.

Бокс сплайн $B(x \mid X)$ с множеством узлов

$$X = \{x^1, \ldots, x^n\} \subset \mathbf{R}^k \setminus \{0\},$$

$$\langle X \rangle := \text{линейная оболочка } \{X\} = \mathbf{R}^k,$$

определяется соотношением (см. [1])

$$\int_{\mathbf{R}^k} f(x)\, B(x \mid X)\, dx = \int_{[0,1]^n} f(t_1 x^1 + \ldots + t_n x^n)\, dt_1 \ldots dt_n \quad \forall f \in C(\mathbf{R}^k).$$

Используя формулу $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(tx) = D_x f(tx)$, где D_x означает производную по направлению x, получаем следующую рекуррентную формулу (см. [2]):

$$D_{x^i} B(x \mid X) = B(x \mid X \setminus \{x^i\}) - B(x - x^i \mid X \setminus \{x^i\}). \tag{1}$$

Обозначим

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(X) = \{Y\colon Y \subset X,\ \langle X \setminus Y \rangle \neq \mathbf{R}^k\},$$

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(X) = \{Z\colon Z \subset X,\ \langle X \setminus Z \rangle = \mathbf{R}^k\},$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(X) = \{f\colon D_Y f = 0 \quad \forall Y \in \mathcal{Y}\},\ \text{где}\ D_Y = \prod\nolimits_{y \in Y} D_y.$$

С помощью (1) легко устанавливается, что $B(x \mid X)$ является гладкой кусочно полиномиальной функцией степени не выше $n - k$ ($n = \# X\colon =$ мощность X), точнее,

$$B(x \mid X) \in C^{d(X)-1}(\mathbf{R}^k) \setminus C^{d(X)}(\mathbf{R}^k),$$

где

$$d(X) = \max\{\# Z\colon Z \in \mathcal{Z}\}$$

и является полиномом из $\mathfrak{D}$ на каждом множестве, ограниченном $(k-1)$-мерными гиперплоскостями вида $x + \langle Y \rangle$, где $Y \subset X$, $\dim \langle Y \rangle = \# Y = k - 1$ и $x = \sum_{x^i \notin Y} c_i x^i$, $c_i \in \{0, 1\}$ (см. [2]).

Пусть $\pi_m = \pi_m(\mathbf{R}^k)$ — совокупность многочленов k переменных суммарной степени не выше m, $\pi_m^0 = \pi_m^0(\mathbf{R}^k)$ — совокупность однородных полиномов степени m и $\pi = \bigcup_{m=0}^{\infty} \pi_m$, $\pi_{-1} = \{0\}$.

Легко видеть, что

$$\pi_{d(X)} \subset \mathfrak{D}, \quad \pi_{d(X)+1} \not\subset \mathfrak{D}.$$

Теперь обозначим через $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(X)$ линейную оболочку целочисленных сдвигов бокс сплайна $B(x \mid X)$, т. е.

$$\mathfrak{J} = \langle \{B(\cdot - \alpha \mid X)\colon \alpha \in \mathbf{Z}^k\} \rangle.$$

Из характеризации бокс сплайна следует, что

$$\pi \cap \mathfrak{J} \subset \mathfrak{D}.$$

Оказывается, что при $X \subset \mathbf{Z}^k$ множество полиномов из пространства $\mathfrak{J}$ совпадает с $\mathfrak{D}$:

$$\pi \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{D},$$

более того, в этом случае отображение

$$(Af)(x) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^k} f(\alpha)\, B(x - \alpha \mid X)$$

является взаимно однозначным из $\mathfrak{D}$ на $\mathfrak{D}$ (см. [3]).

§ 2. Система дифференциальных уравнений. Пусть $E_1, \ldots, E_N$ — все (различные) $(k - 1)$-мерные подпространства $\mathbf{R}^k$, порожденные узлами из X, т. е.

$$E_i = \langle Y_i \rangle, \quad Y_i \subset X; \quad X_i = X \setminus E_i \quad (i = 1, \ldots, N).$$

Для исследования пространства $\mathfrak{D}(X)$ естественно рассматривать следующую систему:

$$D_{X_i} f = \varphi_i \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{2}$$

Легко заметить, что $\mathfrak{D}(X)$ совпадает с множеством решений однородной системы (2).

Необходимые условия разрешимости системы (2) — условия согласованности правых частей имеют вид

$$D_{X_j \setminus X_i} \varphi_i = D_{X_i \setminus X_j} \varphi_j \qquad (1 \leqslant i \neq j \leqslant N). \tag{3}$$

Начальные условия для системы (2) пока будем задавать с помощью некоторой достаточно гладкой функции $\psi(x)$:

$$D_Z f(0) = D_Z \psi(0) \quad \forall Z \in \mathscr{Z} \tag{4}$$

(здесь и ниже $D_Z f = f$, если $Z = \varnothing$).

ТЕОРЕМА 1. *Система* (2), *правая часть которой удовлетворяет условиям согласованности* (3), *с начальными условиями* (4) *имеет единственное решение.*

Следующая теорема играет решающую роль в доказательстве теоремы 1 и содержит рекуррентный метод решения системы (2).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\langle x^{l_1}, \ldots, x^{l_k} \rangle = \mathbf{R}^k$ $(1 \leqslant l_1 < \ldots < l_k \leqslant n)$. *Тогда система* (2) *с начальными условиями* (4) *и с условиями согласованности* (3) *эквивалентна системе*

$$D_{x^{l_m}} f = F_m \qquad (m = 1, \ldots, k) \tag{5}$$

с единственным начальным условием

$$f(0) = \psi(0), \tag{6}$$

где F_m $(m = 1, \ldots, k)$ *удовлетворяют разветвленным системам*

$$D_{X_i \setminus \{x^{l_m}\}} F_m = \Phi_{m,\,i} \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{7}$$

с начальными условиями

$$D_Z F_m(0) = D_Z \psi_m(0) \qquad \forall Z \in \mathscr{X}(X \setminus \{x^{l_m}\}) \tag{8}$$

и условиями согласованности

$$D_{X_j \setminus X_i \setminus \{x^{l_m}\}} \Phi_{m,\,i} = D_{X_i \setminus X_j \setminus \{x^{l_m}\}} \Phi_{m,\,j} \tag{9}$$

$$(1 \leqslant i \neq j \leqslant N),$$

где $\psi_m = D_{x^{l_m}} \psi$ *и*

$$\Phi_{m,\,i} = \begin{cases} \varphi_i, & \text{если } x^{l_m} \in X_i, \\ D_{x^{l_m}} \varphi_i, & \text{если } x^{l_m} \notin X_i. \end{cases} \tag{10}$$

Доказательство. Пусть f является решением системы (2) с начальными условиями (4) и имеет место (3). Тогда, рассматривая (5) как обозначение, легко получаем (6), (7), (8), (9).

Пусть теперь f является решением системы (5) с начальными условиями (6), где F_m — решение системы (7) с начальными условиями (8), и имеет место (9).

Для доказательства (2) и (3) заметим, что при любом $i = 1, \ldots, N$ X_i содержит некоторый элемент x^{l_m} $(1 \leqslant m \leqslant k)$, так как множество $X \setminus X_i$ принадлежит $(k - 1)$-мерному подпространству. Следовательно, согласно (5), (7) и (10) мы будем иметь, что

$$D_{X_i} f = D_{X_i \setminus \{x^{l_m}\}} F_m = \varphi_i,$$

где $F_m = D_{x^{l_m}} f$, откуда вытекает выполнение равенств (2).

Для этого же m из (9) имеем, что

$$D_{X_j \setminus X_i} \varphi_i = D_{X_i \setminus X_j \setminus \{x^{l_m}\}} \Phi_{m,\,j} \qquad (1 \leqslant i \neq j \leqslant N).$$

Ясно, что правая часть этого равенства равна $D_{X_i \setminus X_j} \varphi_j$ независимо от того, $x^{l_m} \in X_j$ или $x^{l_m} \notin X_j$, что доказывает (3).

Выполнение условий (4) достаточно проверить только в случае

$$Z \subset X \setminus \{x^{l_1}, \ldots, x^{l_k}\}, \qquad Z \neq \varnothing$$

(остальные случаи содержатся в (8) и (6)).

Предположим $Z = \{y\} \bigcup Z'$ и $y = \sum_{m=1}^{k} \lambda_m x^{l_m}$. Тогда

$$D_y = \sum_{m=1}^{k} \lambda_m D_{\{x^{l_m}\} \bigcup Z'}, \tag{11}$$

и легко видеть, что $\lambda_m = 0$, если $\{x^{l_m}\} \bigcup Z' \notin \mathscr{Z}$. Это доказывает (4), так как дифференциальные операторы в правой части равенства (11), для которых $\lambda_m \neq 0$, содержат элементы из базиса $(x^{l_1}, \ldots, x^{l_k})$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1 проводим индукцией относительно $n = \# X$. Случай $n = k$ общеизвестен. Предположим, что теорема 1 верна для систем, мощность множества узлов которых меньше n, и докажем для n. Нетрудно убедиться, что разветвленные системы (7) имеют единственные решения. Действительно, в системе (7) можно отбросить уравнение с множеством дифференцирования, удовлетворяющим соотношению

$$\langle X \setminus X_i \setminus \{x^{l_m}\}\rangle \neq \mathbf{R}^{k-1},$$

так как это уравнение ввиду условий согласованности (9) следует из уравнения с множеством узлов

$$X \setminus X_j \setminus \{x^{l_m}\} \supset X \setminus X_i \setminus \{x^{l_m}\},$$

$$\text{где } \langle X \setminus X_j \setminus \{x^{l_m}\}\rangle = \mathbf{R}^{k-1}.$$

Теперь заметим, что при $\langle X \setminus \{x^{l_m}\}\rangle = \mathbf{R}^k$ система, полученная после отброса, является системой типа (2) с множеством узлов $X \setminus \{x^{l_m}\}$ мощности $n - 1$.

В случае же $\langle X \setminus \{x^{l_m}\}\rangle = \mathbf{R}^{k-1}$ после отброса останется одно (решенное) уравнение

$$F_m = \varphi_{i_0} \quad (1 \leqslant i_0 \leqslant N)$$

без начальных условий. Это и является единственным решением соответствующей разветвленной системы.

Остается убедиться, что правые части уравнений системы (5), т. е. решения разветвленных систем, согласованы:

$$D_{x^{l_i}} F_j = D_{x^{l_j}} F_j \quad (1 \leqslant i \neq j \leqslant k). \tag{12}$$

Сначала рассмотрим случай $\langle X \setminus \{x^{l_i}\}\rangle = \mathbf{R}^k$. Тогда обе функции в правой и левой частях (12) удовлетворяют повторно разветвленной системе с множеством узлов

$X \setminus \{x^{l_i}, x^{l_j}\}$ мощности $n-2$ с одинаковыми правыми частями и начальными условиями и, следовательно, совпадают в силу индукционного предположения.

В случае $\langle X \setminus \{x^{l_m}\}\rangle \neq \mathbf{R}^k$, $m = i, j$, имеем, что $F_i = \varphi_{i_0}$ и $F_j = \varphi_{j_0}$ для некоторых i_0, j_0, $1 \leqslant i_0 \neq j_0 \leqslant N$, и (12) есть одно из условий (3). Теорема 1 доказана.

Обозначим решение системы (2) с условиями (3) и (4) через

$$f\,(x, X, \{\varphi_i\}_{i=1}^N, \psi),$$

и пусть $\{\bar{x}^{l_m}\}_{m=1}^k$ — дуальный базис $\{x^{l_m}\}_{m=1}^k$, т. е.

$$x^{l_i} \cdot x^{l_j} = \delta_{i,\,j} \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant k).$$

Тогда, используя выражение решения системы (5) через криволинейный интеграл, для решений систем (2)—(4) получаем следующую рекуррентную формулу (в обозначениях теоремы 2):

$$f\,(x) = \psi\,(0) + \int_0^x \sum_{i=1}^k F_i\, d\bar{x}^{l_i}.$$

Следующий результат показывает, в частности, что решение (2)—(4) является полиномом, если таковы функции в правой части системы (2).

Следствие 1. *Класс функций, удовлетворяющих соотношениям*

$$D_{X_i} f \in \pi_{n-k+m-\#X_i} \qquad (i = 1, \ldots, N),$$

совпадает с π_{n-k+m} $(m = 0, 1, \ldots)$.

Доказательство по индукции относительно $n = \# X$ сразу вытекает из теоремы 2.

При $m = 0$, очевидно, получаем

Следствие 2. $\mathfrak{D} \subset \pi_{n-k}$.

Этот результат был доказан Даменом и Мичелли в [3].

Чтобы заменить функцию ψ в правой части начальных условий (4) на произвольные числа, мы подберем линейно независимые начальные условия из (4).

§ 3. Независимые начальные условия и пространство полиномов, изоморфное пространству сплайнов. Нахождение независимых начальных условий из (4) равносильно выбору базиса в следующем полиномиальном пространстве:

$$\left\langle \left\{ \prod_{x^i \in Z} (x^i \cdot x) \colon Z \in \mathscr{X} \right\} \right\rangle; \tag{13}$$

при $Z = \varnothing$ полагаем, что

$$\prod_{x^i \in \varnothing} (x^i \cdot x) \equiv 1.$$

Рассмотрим набор проходящих через начало координат $(k-1)$-мерных гиперплоскостей $\mathcal{L}^0 = \{L_i^0\}_{i=1}^n$, где L_i^0 определяется уравнением

$$P_{L_i}(x) := x^i \cdot x = 0.$$

(В дальнейшем будем считать, что $(k-1)$-мерная гиперплоскость L задается уравнением $P_L(x) = 0$, $P_L \in \pi_1$.)

Пусть I_n — набор всех подмножеств множества $\{1, \ldots, n\}$ и

$$I_n^s = \{\omega\colon\ \omega \in I_n,\ \#\ \omega = s\}.$$

Учитывая, что для $\omega \in I_n$ условие $\langle \{x^i\}_{i\in\omega} \rangle = \mathbf{R}^k$ эквивалентно условию $\bigcap_{i\in\omega} L_i^0 = \{0\}$, пространство (13) можно представить в виде

$$\pi^0(\mathcal{L}^0) := \pi^0(\mathcal{L}^0, k) = \\ = \left\langle \left\{ \prod_{i\in\omega} P_{L_i^0}(x) : \omega \in I_n,\ \bigcap_{i=1,\ i\notin\omega}^n L_i^0 = \{0\} \right\} \right\rangle.$$

Это пространство распадается в прямую сумму подпространств однородных полиномов

$$\pi^0(\mathcal{L}^0) = \sum_{s=0}^{n-k} \pi_s^0(\mathcal{L}^0), \tag{14}$$

где

$$\pi_s^0(\mathcal{L}^0) := \pi_s^0(\mathcal{L}^0, k) = \\ = \left\langle \left\{ \prod_{i\in\omega} P_{L_i^0}(x) : \omega \in I_n^s,\ \bigcap_{i=1,\ i\notin\omega}^n L_i^0 = \{0\} \right\} \right\rangle. \tag{15}$$

Пусть теперь $\mathcal{L} = \{L_i\}_{i=1}^m$ — набор произвольных $(k-1)$-мерных гиперплоскостей с условиями

$$\bigcap_{i=1}^m L_i = \varnothing, \quad \bigcap_{i\in\omega} L_i \neq \varnothing \text{ при } \omega \in I_m^k. \tag{16}$$

Для $s = 0, \ldots, m-k-1$ обозначим

$$\pi_s(\mathcal{L}) := \pi_s(\mathcal{L}, k) = \\ = \left\langle \left\{ \prod_{i\in\omega} P_{L_i}(x) : \omega \in I_m^s,\ \bigcap_{\substack{i=1,\\ i\notin\omega}}^m L_i = \varnothing \right\} \right\rangle$$

$$\text{и } \pi_s(\mathcal{L}) = \{0\} \text{ при } s \geqslant m-k. \tag{17}$$

Нетрудно показать, что $\mathscr{L}^0$ можно дополнить гиперплоскостью L_0, не проходящей через начало координат, таким образом, чтобы система $\mathscr{L}^0 \bigcup L_0$ удовлетворяла условиям (16). Действительно, для этого достаточно выбрать прямые $l_\omega \subset \bigcap_{i\in\omega} L_i^0$, $\omega \in I_n^{k-1}$, и потребовать, чтобы гиперплоскость L_0 пересекалась с этими прямыми. Легко видеть, что тогда

$$\pi_s^0\,(\mathscr{L}^0) = \pi_s\,(\mathscr{L}^0 \bigcup L_0) \tag{18}$$

и наша задача сводится к выбору базиса в пространстве $\pi_s\,(\mathscr{L})$ $(s = 0, \ldots, m - k - 1)$. Это и есть пространство полиномов, изоморфное следующему пространству сплайнов (здесь мы без ограничения общности считаем, что L_i заданы уравнениями $x \cdot x^i + 1 = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$):

$$S^k_{m-k-s,\,\{x^1,\,\ldots,\,x^m\}} := \\ := \langle\{M\,(x\,|\,\{x^i\}_{i\in\omega}) \colon \omega \in I_m^{m-s},\ \mu_k\,([\{x^i\}_{i\in\omega}]) \neq 0\}\rangle,$$

где $M\,(x \mid A)$ — B-сплайн с множеством узлов A, а $\mu_k\,([A])$ — k-мера Лебега выпуклой оболочки множества A.

Изоморфизм задается следующей формулой Дамена и Мичелли (см. [4]):

$$\prod_{i=1}^m (x^i \cdot x + 1) \int_{R^k} (1 + xy)^{s-m} M\,(y\,|\,\{x^i\}_{i\in\omega})\,\mathrm{d}y = \\ = \prod_{\substack{i=1\\ i\notin\omega}}^m P_{L_i}\,(x), \qquad \omega \in I_m^{m-s}, \tag{19}$$

где $\bigcap_{i\in\omega} L_i = \varnothing$, что эквивалентно условию $\mu_k\,([\{x^i\}_{i\in\omega}]) \neq$ $\neq 0$.

Начиная с этого места, можно было бы свести нашу задачу к построению базиса в пространстве сплайнов (относительно базисов в пространстве сплайнов см. [5] и [6]) с последующим вычислением общего числа независимых начальных условий. Однако мы выберем иной путь — через характеризацию (см. теорему 3) полиномиального пространства $\pi_s\,(\mathscr{L})$, что, по-нашему, представляет самостоятельный интерес. Через $\mu(x) = \mu(x, \mathscr{L})$ обозначим кратность точки $x \in \mathbf{R}^k$ в наборе $\mathscr{L}$:

$$\mu\,(x) = \#\,\{i\colon\ 1 \leqslant i \leqslant m,\quad x \in L_i\}.$$

Нетрудно убедиться, что все полиномы $\prod_{i\in\omega} P_{L_i}\,(y)$ в (17) содержат не менее $\mu\,(x) + s - m + 1$ множителей, равных нулю в точке $x \in \mathbf{R}^k$. Следовательно, для любого $P \in \pi_s(\mathscr{L})$ имеем, что

$$D^\alpha P(x) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbf{Z}_+^k, \quad |\alpha| \leqslant \mu(x) + s - m, \tag{20}$$

при $\mu(x) \geqslant m - s$, где $D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{\alpha_k}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^k \alpha_i$.

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы полином $P(x)$, $P \in \pi_s$, принадлежал пространству $\pi_s(\mathscr{L})$, необходимо и достаточно выполнение условий* (20).

Для доказательства достаточности условий (20) нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Если Q — полином, а Ψ — класс полиномов, то

$$Q \cdot \Psi := \{Q \cdot P \colon P \in \Psi\},$$

$Q|_L$ — след полинома Q на гиперплоскости L, а

$$\Psi|_L = \{P|_L \colon P \in \Psi\}.$$

Пусть $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_l$ — все различные гиперплоскости из $\mathscr{L} = \{L_i\}_{i=1}^m$ с кратностями $\mu_1, \ldots, \mu_l$ соответственно:

$$\mu_i = \# \{j \colon 1 \leqslant j \leqslant m,\ L_j = L_i\},$$

$$\sum_{i=1}^l \mu_i = m.$$

Нам понадобится также обозначение

$$\mathscr{L} = \begin{Bmatrix} \Lambda_1, \ldots, \Lambda_l \\ \mu_1, \ldots, \mu_l \end{Bmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что если для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant l$, имеет место неравенство $\mu_i > m - s - k$, то

$$\pi_s(\mathscr{L}) = P_{\Lambda_i}^{\mu_i - m + s + k}(x)\, \pi_{m - \mu_i - k}\left(\mathscr{L} \,\middle\|\, \begin{Bmatrix} \Lambda_i \\ \mu_i - m + s + k \end{Bmatrix}\right), \tag{21}$$

так как все полиномы $\prod_{i \in \omega} P_{L_i}(x)$ в определении (17) содержат множитель $P_{\Lambda_i}^{\mu_i - m + s + k}(x)$. Следовательно, учитывая нижеследующую лемму 1 (см., например, [7]) при доказательстве теоремы, мы без ограничения общности можем предполагать, что имеют место неравенства

$$\mu_i \leqslant m - s - k \quad (i = 1, \ldots, l). \tag{22}$$

ЛЕММА 1. *Пусть L есть $(k-1)$-мерная гиперплоскость, $P \in \pi_s$ и*

$$(D_\lambda)^i P(x) = 0 \text{ при } x \in L \ (i = 0, \ldots, r-1),$$

где λ — нормаль L. Тогда

$$P(x) = P_L^r(x) \cdot Q(x), \text{ где } Q \in \pi_{s-r}.$$

В случае $k = 1$ теорема 3 справедлива для более общего полиномиального пространства. Пусть

$$T = \{t_1, \ldots, t_n\} = \begin{Bmatrix} \tau_1, \ldots, \tau_l \\ \mu_1^0, \ldots, \mu_l^0 \end{Bmatrix},$$

где $\tau_1, \ldots, \tau_l$ — все различные точки из $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset \subset \mathbf{R}^1$ с кратностями $\mu_1^0, \ldots, \mu_l^0$ соответственно; $\sum_{i=1}^l \mu_i^0 = n$. Рассмотрим пространство $(r + s \leqslant n)$

$$\pi_{s,r}(T) = \left\langle \left\{ \prod_{i \in \omega} (t - t_i) \colon \omega \in I_n^s, \right.\right.$$
$$\left.\left. \{t_i\}_{\substack{i=1 \\ i \notin \omega}}^n \text{ содержит } r \text{ различных точек} \right\} \right\rangle.$$

Очевидно, что $\pi_{s,2}(T) = \pi_s(T, 1)$ (см. (17)). Теорема 3 в одномерном случае равносильна следующей лемме при $r = 2$.

ЛЕММА 2. *Для любых s и r, $s + r \leqslant n = \sum_{i=1}^n \mu_i^0$,*

$$\pi_{s,r}(T) = \prod_{i=1}^l (t - \tau_i)^{\nu_+^{(i)}} \pi_N(\mathbf{R}^1), \tag{23}$$

где $\nu^{(i)} = \nu_{s,r}^{(i)}(T) = \mu_i^0 + s - n + r - 1$, $N = N_{s,r}(T) = s - \sum_{i=1}^l \nu_+^{(i)}$ и $\nu_+ = \max\{\nu, 0\}$.

Доказательство проведем по индукции относительно $n = \# T$. Как и для пространств $\pi_s(\mathcal{L})$ (см. (21) и (22)), без ограничения общности можем предполагать, что имеют место неравенства

$$\mu_i^0 \leqslant n - s - r + 1 \quad (i = 1, \ldots, l). \tag{24}$$

Тогда $N_{s,r}(T) = s$, и нам нужно доказать, что $\pi_{s,r}(T) = \pi_s$. Включение $\pi_{s,r}(T) \subset \pi_s$ очевидно; докажем, что

$$\pi_{s,r}(T) \supset \pi_s. \tag{25}$$

Для $n = s + r$ из (24) имеем, что $\mu_i^0 = 1$ $(i = 1, \ldots, l)$ и $l = n$. Тогда ясно, что для любого $j = 1, 2, \ldots, s + 1$

$$\prod\nolimits_{i=1,\, i\neq j}^{s+1} (t - t_i) \in \pi_{s,\, r}(T),$$

откуда вытекает (25) в силу интерполяционной формулы Лагранжа. Допустим теперь, что лемма верна для множеств узлов с мощностью $n - 1$, и докажем для T, $\# T = n$. Пусть

$$\{i_1, \ldots, i_q\} = \{i\colon 1 \leqslant i \leqslant l,\ \nu^{(i)} = 0\}.$$

Очевидно, что для каждого j, $j = 1, \ldots, q$,

$$\pi_{s,\, r}(T) \supset \pi_{s,\, r}(T \setminus \{\tau_{i_j}\}). \tag{26}$$

Но согласно индукционному предположению

$$\pi_{s,\, r}(T \setminus \{\tau_{i_j}\}) = \prod\nolimits_{p=1,\, p\neq j}^{q} (t - \tau_{ip})\, \pi_{s-q+1} \qquad (j = 1, \ldots, q), \tag{27}$$

так как

$$\nu_{s,\, r}^{p}(T \setminus \{\tau_{i_j}\}) = \begin{cases} 1 & \text{при } p \in \{i_1, \ldots, i_q\} \setminus \{i_j\}, \\ \leqslant 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

и $N_{s,\, r}(T \setminus \{\tau_{i_j}\}) = s - q + 1$.

Нетрудно убедиться, что из (26) и (27) вытекает (25). Лемма 2 доказана.

Следствие 3. $\sum\nolimits_{s=0}^{n-2} \dim \pi_{s,\, 2}(T) = \sum\nolimits_{1\leqslant i<j\leqslant l} \mu_i^0 \mu_j^0$.

Действительно, согласно лемме 2

$$\sum\nolimits_{s=0}^{n-2} \dim \pi_{s,\, 2}(T) = \sum\nolimits_{s=0}^{n-2} (N_{s,\, 2}(T) + 1) =$$

$$= \sum\nolimits_{s=0}^{n-2} \Big(s + 1 - \sum\nolimits_{i=1}^{l} \nu_+^{(i)}\Big) =$$

$$= \frac{(n-1)\, n}{2} - \sum\nolimits_{i=1}^{l} \sum\nolimits_{s=0}^{n-2} (\mu_i^0 + s - n + 1)_+ =$$

$$= \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - \sum\nolimits_{i=1}^{l} \frac{\mu_i^0 (\mu_i^0 - 1)}{2} =$$

$$= \frac{\left(\sum\nolimits_{i=1}^{l} \mu_i^0\right)^2}{2} - \frac{\sum\nolimits_{i=1}^{l} (\mu_i^0)^2}{2} = \sum\nolimits_{1\leqslant i<j\leqslant l} \mu_i^0 \mu_j^0.$$

Заметим, что сумма $\sum_{i<j}\mu_i^0\mu_j^0$ совпадает с количеством всевозможных интервалов (t_i, t_j), $t_i \neq t_j$, t_i, $t_j \in T$ (см. следствие 8). Вернемся к изучению пространств $\pi_s(\mathscr{L})$ в многомерном случае. Для $i = 1, \ldots, l$ положим

$$\mathscr{L}_i = \left\{\begin{matrix} \Lambda_{1,i}, \ldots, \Lambda_{i-1,i}, \Lambda_{i+1,i}, \ldots, \Lambda_{l,i} \\ \mu_1, \ldots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \ldots, \mu_l \end{matrix}\right\},$$
$$\text{где } \Lambda_{j,i} = \Lambda_j \cap \Lambda_i.$$

Ясно, что для каждого $i = 1, \ldots, l$ $\mathscr{L}_i$ есть совокупность $(k-2)$-мерных гиперплоскостей в $(k-1)$-мерном пространстве L_i с аналогичными (16) свойствами

$$\bigcap_{j=1,\, j\neq i}^{l} \Lambda_{j,\,i} = \varnothing, \quad \bigcap_{j\in\omega} \Lambda_{j,\,i} \neq \varnothing \quad \forall \omega \subset$$
$$\subset \{1, \ldots, l\} \setminus \{i\}, \ \#\omega = k-1.$$

ЛЕММА 3. *Пусть имеют место неравенства* (22). *Тогда*

$$\pi_s(\mathscr{L}, k)\,|_{\Lambda_i} = \pi_s(\mathscr{L}_i, k-1) \quad (i = 1, \ldots, l).$$

Утверждение леммы сразу вытекает из соотношения

$$P_{\Lambda_j}\,|_{\Lambda_i} = P_{\Lambda_{j,\,i}} \quad (1 \leqslant i \neq j \leqslant l) \tag{28}$$

(имеющего место, разумеется, с точностью до постоянного (ненулевого) множителя) и из эквивалентности

$$\bigcap_{j\in\omega} \Lambda_j = \varnothing \Leftrightarrow \bigcap_{j\in\omega\setminus\{i\}} \Lambda_{j,\,i} = \varnothing$$

при $i \in \omega \subset \{1, \ldots, l\}$.

Следствие 4. *Пусть* $\mathscr{L}^0 = \left\{\begin{matrix} \Lambda_1^0, \ldots, \Lambda_l^0 \\ \mu_1^0, \ldots, \mu_l^0 \end{matrix}\right\}$ — *набор прямых, проходящих через начало координат в* $\mathbf{R}^2$. *Тогда*

$$\begin{aligned} &\text{а) } \pi_s^0(\mathscr{L}^0, 2) = \prod_{i=1}^{l} (x\cdot x^i)^{\nu_+^{(i)}} \pi_N^0(\mathbf{R}^2); \\ &\text{б) } \dim \pi^0(\mathscr{L}^0, 2) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant l} \mu_i^0\mu_j^0, \end{aligned} \tag{29}$$

где $\nu^{(i)}$ *и* N *определены в* (23) *при* $r = 2$.

Доказательство. Из определения (15) непосредственно вытекает, что

$$\pi_s^0(\mathscr{L}^0, 2) \subset \prod_{i=1}^{l} (x\cdot x^i)^{\nu_+^{(i)}} \pi_N^0(\mathbf{R}^2).$$

Пусть теперь полином P принадлежит правой части (29), а) и пусть L_0 — прямая, не проходящая через начало координат и пересекающаяся с прямыми Λ_i в точках τ_i, $i = 1, \ldots, l$. Тогда легко видеть, что (см. (28))

$$P|_{L_0} \in \pi_{s,2}(T), \text{ где } T = \left\{ \begin{matrix} \tau_1, \ldots, \tau_l \\ \mu_1^0, \ldots, \mu_l^0 \end{matrix} \right\},$$

и в силу леммы 3 существует полином

$$Q \in \pi_s(\mathscr{L}^0 \cup L_0, 2) = \pi_s^0(\mathscr{L}^0, 2) \text{ (см. (18))}$$

такой, что $Q|_{L_0} = P|_{L_0}$. Остается заметить, что из P, $Q \in \pi_s^0$ и $Q|_{L_0} = P|_{L_0}$ вытекает $Q \equiv P$.

Равенство б) в (29) сразу вытекает из а) и из следствия 3.

Следующая лемма играет основную роль при доказательстве теоремы 3.

ЛЕММА 4. *Если имеют место неравенства* (22), *то* $P \in \pi_s(\mathscr{L})$ *тогда и только тогда, когда* $P \in \pi_s$ *и для любого* $i = 1, \ldots, l$

$$\{(D_{\lambda_i})^j P\}|_{\Lambda_i} \in \pi_{s-j}(\mathscr{L}_i), \quad j = 0, \ldots, \min\{\mu_i - 1, s\}, \tag{30}$$

где λ_i — *нормаль* Λ_i.

ЛЕММА 5. *Пусть для некоторого* i_0, $1 \leqslant i_0 \leqslant l$, *имеем, что*

$$P(x) = P_{\Lambda_{i_0}}(x) \cdot Q(x).$$

Тогда $P \in \pi_s(\mathscr{L})$ *эквивалентно* $Q \in \pi_{s-1}(\mathscr{L} \setminus \{\Lambda_{i_0}\})$.

Допустим, что леммы 4 и 5 справедливы в пространстве $\mathbf{R}^{k-1}$, и докажем в R^k (в R^1 леммы 4 и 5 непосредственно вытекают из леммы 2).

Доказательство леммы 4. Легко видеть, что

$$\text{если } P \in \pi_s(\mathscr{L}), \text{ то } D_y P \in \pi_{s-1}(\mathscr{L}) \quad \forall y \in \mathbf{R}^k \tag{31}$$

и, следовательно, $(D_{\lambda_i})^j P \in \pi_{s-j}(\mathscr{L})$. Тогда в силу леммы 3 выполняются соотношения (30).

Допустим теперь, что полином $P \in \pi_s$ удовлетворяет условиям (30), и докажем, что $P \in \pi_s(\mathscr{L})$. Для этого достаточно построить полиномы Q_{i_0, j_0}, $1 \leqslant i_0 \leqslant l$, $0 \leqslant j_0 \leqslant \mu_{i_0}$, такие, что $Q_{i_0, j_0} \in \pi_s(\mathscr{L})$ и

$$(D_{\lambda_i})^j P|_{\Lambda_i} = (D_{\lambda_i})^j Q_{i_0, j_0}$$

$$\text{при } 1 \leqslant i \leqslant i_0 - 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant \mu_i - 1 \text{ и } i = i_0, \tag{32}$$
$$1 \leqslant j \leqslant j_0 - 1,$$

так как в силу леммы 1 отсюда следует, что $P \equiv Q_{l,\,\mu_l}$. Построим $Q_{i_0,\,j_0+1}$, предполагая, что $Q_{i_0,\,j_0}$ построено (полагаем, что $Q_{1,\,0} \equiv 0$ и $Q_{i_0,\,0} = Q_{i_0-1,\,\mu_{i_0-1}}$). Согласно (32) и лемме 1

$$P(x) - Q_{i_0,\,j_0}(x) = \left[P_{\Lambda_{i_0}}^{j_0}(x) \prod_{i=1}^{i_0-1} P_{\Lambda_i}^{\mu_i}(x)\right] Q(x),$$

следовательно (см. (28)),

$$(D_{\lambda_{i_0}})^j [P - Q_{i_0,\,j_0}] \,|_{\Lambda_{i_0}} = c \left(\prod_{i=1}^{i_0-1} P_{\Lambda_{i,\,i_0}}^{\mu_i}\right) \cdot Q \,|_{\Lambda_{i_0}}, \tag{34}$$

и, учитывая (30), полином в правой части равенства (34) принадлежит $\pi_{s-j_0}(\mathscr{L}_{i_0})$, и, применив относительно этого полинома лемму 5 ($\dim \Lambda_{i_0} = k-1$), мы получим, что

$$Q \,|_{\Lambda_{i_0}} \in \pi_{s-j_0-\theta}\left(\mathscr{L}_i \setminus \bigcup_{i=1}^{i_0-1} \begin{Bmatrix} \Lambda_{i,\,i_0} \\ \mu_i \end{Bmatrix}\right), \quad \theta = \sum_{i=1}^{i_0-1} \mu_i.$$

Теперь применим лемму 3 и найдем полином

$$Q_1 \in \pi_{s-j_0-\theta}\left(\mathscr{L} \setminus \bigcup_{i=1}^{i_0-1} \begin{Bmatrix} \Lambda_i \\ \mu_i \end{Bmatrix}\right)$$

такой, что $Q_1 |_{\Lambda_{i_0}} = Q|_{\Lambda_{i_0}}$. Теперь легко проверить, что

$$Q_{i_0,\,j_0+1} = Q_{i_0,\,j_0} + \left[P_{\Lambda_{i_0}}^{j_0} \prod_{j=1}^{j_0-1} P_{\Lambda_i}^{\mu_i}\right] Q_1$$

является искомым полиномом.

Доказательство леммы 5. В силу (21) без ограничения общности можем считать, что выполняются неравенства (22). Обозначим

$$\mu_i' = \mu_i \text{ при } i = 1, \ldots, l, \; i \neq i_0 \text{ и } \mu_{i_0}' = \mu_{i_0} - 1,$$

$$\mathscr{L}' = \mathscr{L} \setminus \{\Lambda_{i_0}\} = \begin{Bmatrix} \Lambda_1, \ldots, \Lambda_l \\ \mu_1', \ldots, \mu_l' \end{Bmatrix}, \quad \mathscr{L}_i' = \mathscr{L}_i \setminus \{\Lambda_{i,\,i_0}\}.$$

Согласно лемме 4 достаточно доказать, что

$$(D_{\lambda_i})^j Q \,|_{\Lambda_i} \in \pi_{s-j}(\mathscr{L}_i'), \quad i = 1, \ldots, l; \quad j = 0, \ldots, \mu_i' - 1. \tag{35}$$

При $i = i_0$ (35) имеет место, так как

$$(D_{\lambda_{i_0}})^j P \,|_{\Lambda_{i_0}} = D_{\lambda_{i_0}} P_{\lambda_{i_0}} \,|_{\Lambda_{i_0}} \cdot (D_{\lambda_{i_0}})^{j-1} Q \,|_{\Lambda_{i_0}} = c\,(D_{\lambda_{i_0}})^{j-1} Q \,|_{\Lambda_{i_0}}.$$

Далее, при $i = 1, \ldots, l$, $i \neq i_0$ имеем, что (см. (25))

$$P \,|_{\Lambda_i} = P_{\Lambda_{i,\,i_0}} \cdot Q \,|_{\Lambda_i}, \tag{36}$$

$$\{(D_{\lambda_i})^j P\} \,|_{\Lambda_i} = c\,\{(D_{\lambda_i})^{j-1} Q\} \,|_{\Lambda_i} + P_{\Lambda_{i,\,i_0}} \{(D_{\lambda_i})^j Q\} \,|_{\Lambda_i}. \tag{37}$$

Из (36), учитывая, что $P|_{\Lambda_i} \in \pi_s(\mathscr{L}_i)$ (см. лемму 3), и применив лемму 5 для пространства Λ_i, $\dim \Lambda_i = k - 1$, мы находим, что

$$Q|_{\Lambda_i} \in \pi_{s-1}(\mathscr{L}_i').$$

Аналогично, из (37) следует, что если (35) имеет место при некоторых $j-1$ и i $(i \neq i_0)$, то (35) имеет место также при j и i. Леммы 4 и 5 доказаны.

Доказательство теоремы 3. Достаточность условий (20) для принадлежности полинома $P \in \pi_s$ пространству $\pi_s(\mathscr{L})$ мы докажем индукцией по k. При $k = 1$ это непосредственно вытекает из леммы 2 для $r = 2$.

Допустим, достаточность доказана в $\mathbf{R}^{k-1}$, докажем в $\mathbf{R}^k$. Согласно лемме 4 достаточно доказать, что при $i = 1, \ldots, l$; $j = 0, \ldots, \mu_i - 1$

$$Q := \{(D_{\lambda_i})^j P\}|_{\Lambda_i} \in \pi_{s-j}(\mathscr{L}_i).$$

Так как $\mu'(x) := \mu(x, \mathscr{L}_i) = \mu(x) - \mu_i$, $x \in \Lambda_i$, то согласно (20) $D^\alpha Q(x) = 0$ при $|\alpha| \leqslant \mu(x) - j - m + s = \mu'(x) + (s-j) - (m - \mu_i)$ и в силу индукционного предположения $Q \in \pi_{s-j}(\mathscr{L}_i)$ $(m - \mu_i = \# \mathscr{L}_i)$.

Теорема 3 доказана.

Теперь приведем некоторые следствия для пространств $\pi_s(\mathscr{L})$. Аналоги следствий 5 и 6 для пространства сплайнов (см. изоморфизм (19)) получены в [8] и [6].

Следствие 5. *Если для любого $x \in R^k$ имеем, что $\mu(x) < m - s$, то*

$$\pi_s(\mathscr{L}) = \pi_s(\mathbf{R}^k).$$

Следствие 6. *Предположим, что $\mu_{i_0} \leqslant m - s - k$, $1 \leqslant i_0 \leqslant m$, $0 < s < m - k$. Если $\{P_i\}_{i=1}^N$ — базис в пространстве $\pi_{s-1}(\mathscr{L} \setminus \{L_{i_0}\})$, где $1 \leqslant i_0 \leqslant m$, $\{q_i\}_{i=1}^M$ — базис в пространстве $\pi_s(\mathscr{L}_{i_0})$, а полиномы Q_i $(i = 1, \ldots, M)$ выбраны так, что (см. лемму 2)*

$$Q_i \in \pi_s(\mathscr{L}), \quad Q_i|_{L_{i_0}} = q_i \quad (i = 1, \ldots, M), \tag{38}$$

то система

$$\{P_{L_{i_0}} \cdot P_i\}_{i=1}^N \cup \{Q_i\}_{i=1}^M \tag{39}$$

образует базис в $\pi_s(\mathscr{L})$.

Доказательство. Пусть $P \in \pi_s(\mathscr{L})$; тогда в силу леммы 3 имеем, что $P|_{L_{i_0}} \in \pi_s(\mathscr{L}_{i_0})$ и, следовательно, существуют числа a_i $(i = 1, \ldots, M)$ такие, что

$$P\,|_{L_{i_0}} = \sum_{i=1}^{M} a_i q_i.$$

Тогда согласно (38)

$$P(x) - \sum_{i=1}^{M} a_i Q_i(x) = 0 \text{ при } x \in L_{i_0}$$

и согласно лемме 1

$$P(x) - \sum_{i=1}^{M} a_i Q_i(x) = P_{L_{i_0}}(x)\, Q(x),$$
$$Q \in \pi_{s-1}(\mathbf{R}^k). \tag{40}$$

Но тогда в силу леммы 5 мы будем иметь, что $Q \in \pi_{s-1}(\mathscr{L} \setminus \{L_{i_0}\})$, и поэтому существуют числа c_i $(i = 1, \ldots, N)$ такие, что

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i P_i(x), \qquad x \in \mathbf{R}^k.$$

Отсюда и из (40) получаем разложение полинома P по системе (39):

$$P(x) = \sum_{i=1}^{M} a_i Q_i(x) + \sum_{i=1}^{N} c_i\, [P_{L_{i_0}}(x)\, P_i(x)],$$
$$x \in \mathbf{R}^k.$$

Для доказательства линейной независимости системы (39) предположим, что

$$\sum_{i=1}^{M} a_i Q_i(x) + \sum_{i=1}^{N} c_i\, [P_{L_{i_0}}(x)\, P_i(x)] = 0, \qquad x \in \mathbf{R}^k. \tag{41}$$

Рассмотрев равенство (41) на гиперплоскости L_{i_0}, где $P_{L_{i_0}}(x) = 0$, получим, что $\sum a_i q_i = 0$ и в силу базисности $\{q_i\}$ $a_i = 0$ $(i = 1, \ldots, M)$. Далее, отсюда и из (41) находим, что

$$P_{L_{i_0}}(x) \sum_{i=1}^{N} c_i P_i(x) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}^k,$$

следовательно, $\sum c_i P_i = 0$ и в силу базисности $\{P_i\}$ $c_i = 0$ $(i = 1, \ldots, N)$. Следствие 6 доказано.

Следствие 7. *Пусть* $1 \leqslant i_0 \leqslant m$; *тогда*

$$\dim \pi_s(\mathscr{L}) = \dim \pi_{s-1}(\mathscr{L} \setminus \{L_{i_0}\}) + \dim \pi_s(\mathscr{L}_{i_0})$$
$$(0 \leqslant s \leqslant m - k - 1).$$

Действительно, при $\mu_{i_0} \leqslant m - s - k$ следствие 7 непосредственно вытекает из следствия 6, а при $\mu_{i_0} >$

$> m - s - k$ согласно (21) и (17)

$$\pi_s(\mathscr{L}) = P_{L_{i_0}} \cdot \pi_{s-1}(\mathscr{L} \setminus \{L_{i_0}\}), \quad \pi_s(\mathscr{L}_{i_0}) = \{0\}.$$

Следствие 8. *Имеет место равенство*

$$\sum_{s=0}^{m-k-1} \dim \pi_s(\mathscr{L}) = \# W(\mathscr{L}), \tag{42}$$

где

$$W(\mathscr{L}) = \{\Omega \subset \mathscr{L}\colon \ \# \Omega = k+1, \quad \bigcap_{L_i \in \Omega} L_i = \varnothing\}.$$

Доказательство. В случае $k = 1$ равенство (42) непосредственно вытекает из следствия 3. Допустим, (42) верно в пространстве $\mathbf{R}^{k-1}$, докажем в $\mathbf{R}^k$. Доказательство проведем индукцией по m. При $m = k + 1$ равенство (42) очевидно (в этом случае $\pi_0(\mathscr{L}) = \pi_0$, $W(\mathscr{L}) = \mathscr{L}$). Допустим, (42) имеет место при $m - 1$, докажем при m. Согласно следствию 7 имеем, что

$$\sum_{s=0}^{m-k-1} \dim \pi_s(\mathscr{L}) =$$
$$= \sum_{s=0}^{m-k-1} \dim \pi_{s-1}(\mathscr{L} \setminus \{L_{i_0}\}) + \sum_{s=0}^{m-k-1} \dim \pi_s(\mathscr{L}_{i_0}) =$$
$$= \# W(\mathscr{L} \setminus \{L_{i_0}\}) + \# W(\mathscr{L}_{i_0}) = \# W(\mathscr{L}),$$

что доказывает следствие 8.

Следующий результат определяет число независимых условий из (4).

Следствие 9. *Для любого набора* $X = \{x^1, \ldots, x^n\} \subset \mathbf{R}^k \setminus \{0\}$, $\langle X \rangle = \mathbf{R}^k$

$$\dim \pi^0(\mathscr{L}^0) = \# \mathscr{B}(X), \mathscr{B}(X) = \{Z \subset X : \dim \langle Z \rangle = \# Z = k\}.$$

Доказательство следует из следствия 8, (14) и (18):

$$\dim \pi^0(\mathscr{L}^0) = \sum_{s=0}^{n-k} \dim \pi_s^0(\mathscr{L}^0) = \sum_{s=0}^{n-k} \dim \pi_s(\mathscr{L}^0 \cup L_0) =$$
$$= \# W(\mathscr{L}^0 \cup L_0) = \# \{\Omega \subset \mathscr{L}^0 : \# \Omega = k, \quad \bigcap_{L_i \in \Omega} L_i =$$
$$= \{0\}\} = \# \mathscr{B}(X).$$

Так как $\mathfrak{D}(X)$ является классом решений однородной системы (2), из следствия 9 вытекает следующий результат Дамена и Мичелли (см. [9]):

$$\dim \mathfrak{D}(X) = \# \mathscr{B}(X).$$

Следующее утверждение показывает, что если для данного набора выполняется условие

$$\# \mathfrak{N}_s(\mathscr{L}) < \infty,$$
$$\mathfrak{N}_s(\mathscr{L}) = \{x \in \mathbf{R}^k\colon \ \mu(x, \mathscr{L}) + s - m \geqslant 0\}, \tag{43}$$

то условия (20) линейно независимы в $\pi_s(\mathbf{R}^k)$ и размерность пространства $\pi_s(\mathscr{L})$ легко вычисляется.

Следствие 10. *Если для некоторого* s $(0 \leqslant s \leqslant m-k-1)$ *имеет место* (43), *то*

$$\dim \pi_s(\mathscr{L}) = C_{s+k}^k - \sum\nolimits_{x \in \mathfrak{N}_s(\mathscr{L})} C_{n(x,\,s,\,\mathscr{L})+k}^k, \tag{44}$$

где $n(x, s, \mathscr{L}) = \mu(x, \mathscr{L}) + s - m$.

Доказательство. При $k = 1$ равенство (44) непосредственно вытекает из леммы 2. Допустим, что следствие 10 доказано в $\mathbf{R}^{k-1}$, докажем в $\mathbf{R}^k$. Мы воспользуемся индукцией по

$$n(s, \mathscr{L}) = \sum\nolimits_{x \in \mathfrak{N}_s(\mathscr{L})} n(x, s, \mathscr{L}).$$

Случай $n(s, \mathscr{L}) = 0$ вытекает из следствия 5. Допустим, следствие 10 доказано при $n(s, \mathscr{L}) < n_0$, и докажем при $n(s, \mathscr{L}) = n_0$. Пусть $n(s, \mathscr{L}) = n_0$ и $x_0 \in \mathfrak{N}_s(\mathscr{L})$. Выберем i_0, $1 \leqslant i_0 \leqslant m$, так, что $x_0 \in L_{i_0}$. Легко видеть, что тогда

$$n(x, s-1, \mathscr{L} \setminus \{L_{i_0}\}) = \begin{cases} n(x, s, \mathscr{L}) - 1 & \text{при } x \in L_{i_0}, \\ n(x, s, \mathscr{L}) & \text{при } x \notin L_{i_0}, \end{cases}$$

$$n(x, s, \mathscr{L}_{i_0}) = \begin{cases} n(x, s, \mathscr{L}) & \text{при } x \in L_{i_0}, \\ 0 & \text{при } x \notin L_{i_0}, \end{cases}$$

$$n(s-1, \mathscr{L} \setminus \{L_{i_0}\}) \leqslant n_0 - 1,$$

$$\# \mathfrak{N}_s(\mathscr{L}_{i_0}) + \# \mathfrak{N}_{s-1}(\mathscr{L} \setminus \{L_{i_0}\}) < \infty,$$

и, применив следствие 7 и индукционное предположение, получим, что

$$\begin{aligned} \dim \pi_s(\mathscr{L}) = C_{s+k-1}^k &- \\ - \sum\nolimits_{x \in \mathfrak{N}_s(\mathscr{L}) \cap L_{i_0}} C_{n(x,\,s,\,\mathscr{L})-1+k}^k &- \sum\nolimits_{x \in \mathfrak{N}_s(\mathscr{L}) \setminus L_{i_0}} C_{n(x,\,s,\,\mathscr{L})+k}^k + \\ + C_{s+k-1}^{k-1} &- \sum\nolimits_{x \in \mathfrak{N}_s(\mathscr{L}) \cap L_{i_0}} C_{n(x,\,s,\,\mathscr{L})+k-1}^{k-1} = \\ &= C_{s+k}^k - \sum\nolimits_{x \in \mathfrak{N}_s(\mathscr{L})} C_{n(x,\,s,\,\mathscr{L})+k}^k. \end{aligned}$$

Теперь, используя изоморфизм (19), приведем аналоги следствий 8 и 10 для пространства сплайнов. Пусть

$$X = \{x^1, \ldots, x^m\} \subset \mathbf{R}^k, \quad \mu_k[X] \neq 0.$$

Легко видеть, что при удобном выборе начала координат гиперплоскости L_i $(i = 1, \ldots, m)$, определенные уравнениями $x \cdot x^i + 1 = 0$, удовлетворяют условиям (16). Обозначим

$$\mathfrak{M}_s(X) = \{\Lambda\colon\ \Lambda \text{ — } (k-1)\text{-мерная гиперплоскость с } \mu(\Lambda, X) + s - m \geqslant 0\},$$

где $\mu(\Lambda, X) = \#(\Lambda \cap X)$.

Тогда условие (43) эквивалентно условию

$$\# \mathfrak{M}_s(X) < \infty, \tag{45}$$

и из следствий 8 и 10, используя изоморфизм (19), получим

Следствие 11.

а) $\sum_{s=0}^{m-k-1} \dim S^k_{m-k-s,\, X} = \#\{Z \subset X\colon\ \# Z = k+1,\ \mu_k[Z] \neq 0\}$.

б) *Если для некоторого* s $(0 \leqslant s \leqslant m-k-1)$ *имеет место* (45), *то*

$$\dim S^k_{m-k-s,\, X} = C^k_{s+k} - \sum_{\Lambda \in \mathfrak{M}_s(X)} C^k_{\mu(\Lambda,\, X)+s-m+k}.$$

Замечание. Имеет место следующая характеризация множества всех общих нулей (с их кратностями) полиномов $P \in \pi_s(\mathscr{L})$:

$$D^\alpha P(x) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbf{Z}^k_+,$$
$$|\alpha| \leqslant \mu(x, \mathscr{L}) + s - m + d(x, \mathscr{L}), \tag{46}$$

при $\mu(x, \mathscr{L}) \geqslant m - s - d(x, \mathscr{L})$, где $d(x, \mathscr{L})$ — размерность $\prod_{i=1,\, x \in L_i}^{m} L_i$.

Действительно, среди полиномов $\prod_{i \in \omega} P_{L_i}$ из (17) есть по крайней мере один, содержащий точно $\mu(x, \mathscr{L}) + s - m + d(x, \mathscr{L}) + 1$ множителей, равных нулю в точке x; у остальных полиномов число таких множителей не меньше.

Отсюда в силу теоремы 3 вытекает, что для полиномов $P \in \pi_s(\mathscr{L})$ условия (20) эквивалентны условиям (46).

Ереванский государственный университет
Институт математики АН АрмССР

Поступило 18.11.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] De Boor C., De Vore R. Approximation by smooth multivariate splines // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 276. P. 775—785.

[2] De Boor C., Hollig K. B-splines from parallelepipeds // J. Analyse Math. 1982/3. V. 42. P. 99—115.
[3] Dahmen W., Micchelli C. A. Translates of multivariate splines // Linear Algebra Appl. 1983. V. 52/53. P. 217—234.
[4] Dahmen W., Micchelli C. A. Recent Progress in Multivariate Splines // Approximation Theory. IV/eds. C. K. Chui, L. L. Schumaker, J. D. Ward, Academic Press, 1983. P. 27—121.
[5] Dahmen W., Micchelli C. A. On the linear independence of multivariate B-splines: II. Complete configurations // Math. Comp. 1983. V. 41. P. 143—163.
[6] Hakopian H. Multivariate spline functions, B-spline bases and polynomial interpolations. II // Studia Math. 1984. V. 79. P. 91—102.
[7] Hakopian H. Multivariate interpolation of Lagrange and Hermite type II // Studia Math. 1984. V. 80. P. 77—88.
[8] Goodman T. N. T. Interprolation in minimum semi-norm and multivariate B-splines // J. Approx. Theory. 1983. V. 37. P. 212—223.
[9] Dahmen W., Micchelli C. A. On the local linear independence of translates of a box spline // Studia Math. 1985. V. 82. P. 243—263.