



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Золотых, А. А. Михалев, Ранги подалгебр  
свободных супералгебр Ли,  
*Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*,  
1996, номер 2, 36–40

<https://www.mathnet.ru/vmumm1989>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

28 апреля 2025 г., 11:59:22



УДК 512.554,33,34,37,38

А. А. Золотых, А. А. Михалев

### РАНГИ ПОДАЛГЕБР СВОБОДНЫХ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ

Данная статья продолжает исследования, начатые в [1]. Основным результатом работы является критерий независимости подмножества свободной цветной ( $p$ -)супералгебры Ли, что дает удобный алгоритм для определения независимости подмножества (теорема 2). В качестве следствия получены критерий и алгоритм, определяющие, является ли эндоморфизм свободной цветной ( $p$ -)супералгебры Ли мономорфизмом.

1. Свободные цветные ( $p$ -) супералгебры Ли. Пусть  $K$  — поле,  $\text{char } K \neq 2$ ,  $G$  — абелева полугруппа,  $\varepsilon: G \times G \rightarrow K^*$  — кососимметрическая билинейная форма,  $G_+ = \{g \in G \mid \varepsilon(g, g) = 1\}$ ,  $G_- = \{g \in G \mid \varepsilon(g, g) = -1\}$ ,  $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$  —  $G$ -градуированная  $K$ -алгебра. Алгебра  $R$  с умножением  $[ , ]$  является цветной супералгеброй Ли, если

$$[a, b] = -\varepsilon(d(a), d(b)) [b, a],$$

$$[a, [b, c]] = [[a, b], c] + \varepsilon(d(a), d(b)) [b, [a, c]],$$

где  $a, b, c$  —  $G$ -однородные элементы из  $R$ ,  $d(u) = g$  при  $u \in R_g$  (в случае  $\text{char } K = 3$  предполагаем дополнительно, что  $[v, [v, v]] = 0$  для всех  $G$ -однородных элементов  $v$ ,  $d(v) \in G_-$ ).

Пусть  $\text{char } K = p > 2$ ,  $R$  — цветная супералгебра Ли над  $K$ , тогда  $R$  — цветная  $p$ -супералгебра Ли, если на однородных компонентах  $R_g$ ,  $g \in G_+$ , задано отображение  $[p]: R_g \rightarrow R_{pg}$ , такое, что для всех  $z \in R$ ,  $\alpha \in K$ ,  $G$ -однородных  $x, y \in R$ ,  $d(x) = d(y)$ , выполнены следующие условия:

$$(\alpha x)^{[p]} = \alpha^p x^{[p]}, \quad (\text{ad}(x^{[p]}))(z) = (\text{ad } x)^p(z),$$

$$(x + y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \sum s_i(x, y),$$

где  $js_j(x, y)$  — коэффициенты при  $t^{j-1}$  в многочлене  $(\text{ad}(tx + y)^{p-1})(x)$ , при этом  $(\text{ad } a)(b) = [a, b]$ .

Пусть  $X$  —  $G$ -градуированное множество,  $A(X)$  — свободная  $G$ -градуированная ассоциативная  $K$ -алгебра с единицей. Рассмотрим новую операцию на  $A(X)$ :  $[a, b] = ab - \varepsilon(d(a), d(b))ba$  для  $G$ -однородных элементов  $a, b \in A(X)$ . Тогда  $A(X)$  — цветная супералгебра Ли. Пусть  $L(X)$  — подалгебра в  $A(X)$  с операцией  $[ , ]$ , порожденная множеством  $X$ . Алгебра  $L(X)$  является свободной цветной  $K$ -супералгеброй Ли на  $X$  (см. [2]). Если  $\text{char } K = p > 2$ ,  $a^{[p]} = a^p$  для всех  $G$ -однородных элементов  $a \in A(X)$ ,  $d(a) \in G_+$ , то  $A(X)$  с операциями  $[ , ]$  и  $[p]$  является цветной  $p$ -супералгеброй Ли, а ее подалгебра  $L^p(X)$ , порожденная мно-

жеством  $X$ , — свободной цветной  $p$ -супералгеброй Ли. При этом  $A(X)$  является универсальной обертывающей алгеброй для  $L(X)$  (в случае  $\text{char } K = p > 2$  также ограниченной универсальной обертывающей алгеброй для  $L^p(X)$ ).

Для  $G$ -однородного элемента  $a \in L(X)$  ( $a \in L^p(X)$ ) через  $a^0$  обозначим старшую по длине компоненту элемента  $a$ . Подмножество  $H$  алгебры  $L(X)$  ( $L^p(X)$  соответственно), состоящее из  $G$ -однородных элементов, называется приведенным, если для любого  $a \in H$  элемент  $a^0$  не лежит в подалгебре, порожденной подмножеством  $\{b^0 \mid b \in H, b \neq a\}$ , и независимым, если подмножество  $H$  является множеством свободных образующих подалгебры в  $L(X)$  (в  $L^p(X)$  соответственно), им порожденной.

**Теорема 1 [2, 3].** *Любое приведенное подмножество в  $L(X)$  (в  $L^p(X)$ ) является независимым.*

**2. Частные производные.** Пусть  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Любой элемент  $u \in A(X)$  может быть записан единственным образом в виде  $u = \alpha \cdot 1 + x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ , где  $u_i \in A(X)$ ,  $\alpha \in K$ . Элементы  $\frac{\partial u}{\partial x_i} = u_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , называются частными производными элемента  $u$ .

Пусть  $H = \{h_1, \dots, h_m\}$  — подмножество  $G$ -однородных элементов в  $L(X)$  (в  $L^p(X)$  соответственно). Через  $J(H)$  обозначим матрицу

$$J(H) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Пусть  $a_1, \dots, a_m \in A(X)$ . Так как элементы из  $H$  не содержат свободных членов, то

$$J(H) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = (0) \quad (1)$$

тогда и только тогда, когда  $h_1 a_1 + \dots + h_m a_m = 0$ .

**3. Основная теорема. Лемма.** Пусть  $h_1, \dots, h_m$  —  $G$ -однородные ненулевые элементы в  $L(X)$  (в  $L^p(X)$  соответственно),  $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ ,  $d(y_i) = d(h_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , и

$$h_1 a_1 + \dots + h_m a_m = 0$$

для не всех одновременно равных нулю  $a_i \in A(X)$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Тогда:

1) если  $f_i = h_i$  при  $i < m$  и  $f_m = h_m + F(h_1, \dots, h_{m-1})$ , где  $F(y_1, \dots, y_{m-1}) \in L(Y)$  ( $L^p(Y)$  соответственно),  $d(F) = d(h_m)$ , то

$$f_1 b_1 + \dots + f_m b_m = 0,$$

где  $b_i = a_i - \frac{\partial F}{\partial y_i} \Big|_{\substack{y_1=h_1 \\ \dots \\ y_{m-1}=h_{m-1}}} \cdot a_m$  при  $i < m$  и  $b_m = a_m$ ; при этом не все  $b_i$

равны нулю;

2) если  $h_1, \dots, h_m$  — однородные по длине элементы, то

$$F(h_1, \dots, h_m) = 0$$

для некоторого  $G$ -однородного ненулевого элемента  $F \in L(Y)$  ( $L^p(Y)$ ).

Доказательство. Первое утверждение леммы проверяется непосредственно:

$$0 = h_1 a_1 + \dots + h_m a_m = \sum_{i=1}^{m-1} f_i a_i + (f_m - F(f_1, \dots, f_{m-1})) a_m =$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} f_i \left( a_i - \frac{\partial F}{\partial y_i} \Big|_{\substack{y_1=f_1 \\ \dots \\ y_{m-1}=f_{m-1}}} \cdot a_m \right) + f_m a_m.$$

Если все  $b_i = 0$ , то  $a_m = b_m = 0$  и  $a_i = b_i + \frac{\partial F}{\partial y_i} \Big|_{\substack{y_1=h_1 \\ \dots \\ y_{m-1}=h_{m-1}}} \cdot a_m = 0$  для всех  $i = 1, \dots, m-1$ .

При доказательстве второго утверждения мы можем считать, что  $a_1, \dots, a_m$  однородны по длине и что элементы  $h_1, \dots, h_m$  линейно независимы (иначе утверждение тривиально). Тогда из обобщенного алгоритма Евклида в  $A(X)$  (см. [4]) следует, что один из  $h_j$  лежит в правом идеале алгебры  $A(X)$ , порожденном множеством  $\{h_i | i \neq j\}$ . Можно считать, что

$$h_1 = h_2 b_2 + \dots + h_m b_m.$$

Используя теорему Пуанкаре—Биркгофа—Витта для  $A(X) = U(L(X))$  ( $A(X) = u(L^p(X))$ ) соответственно, см. [5]), считаем, что  $b_i \in U(B) \subseteq A(X)$ , где  $B$  — подалгебра в  $L(X)$  (в  $L^p(X)$ ), порожденная подмножеством  $H$ .

Так как  $h_i, b_i, i=1, \dots, m$ , однородны по длине, то элемент  $h_1$  не участвует в записи  $b_2, \dots, b_m$ . Таким образом,  $h_1$  ассоциативно выражается через  $h_2, \dots, h_m$ , и по теореме Пуанкаре—Биркгофа—Витта  $h_1$  лежит в подалгебре, порожденной  $\{h_2, \dots, h_m\}$ , что завершает доказательство леммы.

**Теорема 2.** *Подмножество  $H = \{h_1, \dots, h_m\}$   $G$ -однородных элементов в  $L(X)$  (в  $L^p(X)$ ) независимо тогда и только тогда, когда столбцы матрицы  $J(H)$  независимы справа над  $A(X)$ , т. е. когда из (1) при  $a_i \in A(X)$  следует, что  $a_i = 0$  для всех  $i = 1, \dots, m$ .*

Доказательство. Если  $H$  не является независимым подмножеством, то существует ненулевой  $G$ -однородный элемент  $F \in L(Y)$  ( $F \in L^p(Y)$ ), где  $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ ,  $d(y_i) = d(h_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , такой, что  $F(h_1, \dots, h_m) = 0$ . Так как  $L(Y) \subseteq A(Y)$  ( $L^p(Y) \subseteq A(Y)$ ), то  $F \in A(Y)$ ,  $F \neq 0$ . Среди всех таких ассоциативных многочленов  $F$  выбираем многочлен  $F_0$  минимально возможной длины по  $Y$ . Ясно, что  $F_0$  не имеет свободного члена. Дифференцируя равенство  $F(h_1, \dots, h_m) = 0$  последовательно по  $x_1, \dots, x_n$ , получаем, что выполнено соотношение (1), где

$$a_i = \frac{\partial F_0}{\partial y_i} \Big|_{\substack{y_1=h_1 \\ \dots \\ y_m=h_m}}$$

Если  $\frac{\partial F_0}{\partial y_i} \neq 0$  в  $A(Y)$ , то из минимальности длины  $F_0$  в  $A(Y)$  следует, что  $a_i \neq 0$ . Допустим, что  $a_i = 0$  для всех  $i$ . Тогда  $\frac{\partial F_0}{\partial y_i} = 0$  для всех  $i$ , и так как  $F_0$  не имеет свободного члена, то  $F_0 = 0$  в  $A(y)$ . Полученное противоречие доказывает необходимость.

Пусть теперь есть нетривиальная зависимость (1). Тогда

$$h_1 a_1 + \dots + h_m a_m = 0.$$

Если

$$h_j^0 = F(h_1^0, \dots, h_{j-1}^0, h_{j+1}^0, \dots, h_m^0),$$

$F \in L(Y)$  ( $F \in L^p(Y)$ ), то рассмотрим подмножество  $H' = \{h'_1, \dots, h'_m\}$ , такое, что  $h'_j = h_j - F(h_1, \dots, h_{j-1}, h_{j+1}, \dots, h_m)$ ,  $h'_i = h_i$  при  $i \neq j$ . По лемме

$$h'_1 b_1 + \dots + h'_m b_m = 0$$

для некоторых одновременно не равных нулю  $b_1, \dots, b_m \in A(X)$ . При этом элемент  $h'_j$  имеет меньшую длину, чем  $h_j$ . Повторяя описанную процедуру, мы либо получим на некотором шаге нулевой элемент (и тогда множество  $H$  не является независимым), либо придем к приведенному подмножеству элементов  $\{u_1, \dots, u_m\}$ , удовлетворяющему нетривиальному соотношению  $u_1 e_1 + \dots + u_m e_m = 0$ . Выделяя старшую часть по длине, мы получаем нетривиальное однородное по длине соотношение

$$u_1^0 c_1 + \dots + u_m^0 c_m = 0.$$

По лемме существует нетривиальный  $G$ -однородный многочлен  $F \in L(Y)$  ( $F \in L^p(Y)$ ), такой, что  $F(u_1^0, \dots, u_m^0) = 0$ . Противоречие с утверждением теоремы 1 завершает доказательство.

**Следствие 1.** Пусть  $\varphi$  —  $G$ -однородный эндоморфизм алгебры  $L(Y)$  ( $L^p(Y)$  соответственно), такой, что столбцы матрицы Якоби  $J(\varphi) = J(\{\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)\})$  правонезависимы над  $A(X)$ . Тогда  $\varphi$  — автоморфизм.

Отметим, что если  $J(\varphi)$  обратима над  $A(X)$ , то  $\varphi$  — автоморфизм [6].

Напомним, что подалгебры свободных ( $p$ -)супералгебр Ли свободны (см. [2, 3]). Этот результат непосредственно вытекает из теоремы 1; ранг такой свободной алгебры определен однозначно и не зависит от выбора свободных образующих. Любой левый (правый) идеал алгебры  $A(X)$  является свободным модулем единственного ранга (см. [4]).

**Следствие 2.** Пусть  $H = \{h_1, \dots, h_m\}$  — подмножество  $G$ -однородных элементов алгебры  $L(X)$  ( $L^p(X)$  соответственно). Тогда ранг подалгебры, порожденной подмножеством  $H$ , равен рангу свободного правого  $A(X)$ -подмодуля модуля  $A(X)^n$ , порожденного столбцами матрицы  $J(H)$ . В частности, если  $\varphi$  — эндоморфизм алгебры  $L(X)$  ( $L^p(X)$  соответственно), то ранг подалгебры  $\varphi(L(X))$  ( $\varphi(L^p(X))$ ) равен рангу свободного правого  $A(X)$ -подмодуля модуля  $A(X)^n$ , порожденного столбцами матрицы Якоби  $J(\varphi)$ .

**Замечание 1.** Следствие 2 дает эффективный алгоритм нахождения ранга конечно-порожденной подалгебры алгебры  $L(X)$  ( $L^p(X)$  соответственно) над конструктивным полем. Действительно, достаточно за конечное число шагов построить канонический базис правого идеала, порожденного столбцами матрицы  $J(H)$ . Число элементов в этом базисе дает искомый ранг. Другой алгоритм следует из теоремы 1: необходимо, используя элементарные преобразования и отбрасывая возможно возникающие нулевые элементы, редуцировать подмножество  $H$  к приведенному подмножеству  $H'$ , мощность которого  $|H'|$  дает ранг рассматриваемой подалгебры. В то же время, как показал У. У. Умирбаев в [7], проблема определения независимости конечного

подмножества элементов в свободной ассоциативной алгебре алгоритмически неразрешима.

Замечание 2. В настоящей статье мы рассматривали правые идеалы, порожденные столбцами матрицы Якоби. В [8] изучались левые идеалы, порожденные строками матриц  $J(H)$ ; ранги этих идеалов совпадают с рангами систем элементов  $H$ ; получен также критерий примитивности систем элементов.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Международного научного фонда и INTAS.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mikhalev A. A., Shpilrain V., Zolotykh A. A. Monomorphisms of free algebras. Preprint. University Bochum, 1994.
2. Михалев А. А. Подалгебры свободных цветных супералгебр Ли//Матем. заметки. 1985. 37, № 5. 653—661.
3. Михалев А. А. Подалгебры свободных  $p$ -супералгебр Ли//Матем. заметки. 1988. 43, № 2. 178—191.
4. Кон П. Свободные кольца и их связи. М., 1975.
5. Bahturin Yu. A., Mikhalev A. A., Petrogradsky V. M., Zaicev M. V. Infinite dimensional Lie superalgebras. Berlin, 1992.
6. Михалев А. А. О правых идеалах свободной ассоциативной алгебры, порожденных свободными цветными ( $p$ -)супералгебрами Ли//Успехи матем. наук. 1992. 47, № 5. 187—188.
7. Умирбаев У. У. Некоторые алгоритмические вопросы ассоциативных алгебр//Алгебра и логика. 1993. 32, № 4. 450—470.
8. Золотых А. А., Михалев А. А. Ранг элемента свободной ( $p$ -)супералгебры Ли//Докл. РАН. 1994. 334, № 6. 690—693.

Поступила в редакцию  
21.11.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 2

УДК 519.95

С. Б. Гашков

#### «ПРОКЛЯТИЕ РАЗМЕРНОСТЕЙ» ДЛЯ СЛОЖНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА

В работах [1—7] автор исследовал сложность приближенной реализации различных классов функций схемами и формулами в базисах, состоящих из непрерывных операций. Напомним постановку задачи.

Пусть  $\mathcal{K}$  — вполне ограниченное подмножество нормированного пространства и  $\mathcal{A}$  всюду плотно в  $\mathcal{K}$ . Сложность  $\varepsilon$ -приближения элемента  $x \in \mathcal{K}$  называется число

$$\mathcal{L}(x, \varepsilon) = \inf \{ \mathcal{L}(y) : y \in \mathcal{A}, \|x - y\| \leq \varepsilon \},$$

а сложностью  $\varepsilon$ -приближения класса  $\mathcal{K}$  — число

$$\mathcal{L}(\mathcal{K}, \varepsilon) = \sup \{ \mathcal{L}(x, \varepsilon) : x \in \mathcal{K} \},$$

где мера сложности  $\mathcal{L}$  определяется следующим образом.

Пусть  $B = \{w_k : k = 1, 2, \dots\}$  — некоторое множество непрерывных операций  $w_k : \mathbf{R}^{m_k} \rightarrow \mathbf{R}$ , называемое базисом. Схема  $S$  в базисе  $B$  — это произвольная последовательность непрерывных функций  $f_1(x), \dots$