



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А.-А. А. Юцис, Турниры и обобщенные
таблицы Юнга,
Матем. заметки, 1980, том 27, вы-
пуск 3, 353–359

<https://www.mathnet.ru/mzm6519>

Использование Общероссийского математического портала
Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны
с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

30 апреля 2025 г., 13:51:35



ТУРНИРЫ И ОБОБЩЕННЫЕ ТАБЛИЦЫ ЮНГА

А.-А. А. Юцис

1. Кнудом в работе [1] на базе алгоритма, предложенного Шенстедом [2], построены биективные отображения множества целочисленных неотрицательных матриц и множества $(0, 1)$ -матриц на соответствующие подмножества упорядоченных пар обобщенных таблиц Юнга. Им же рассмотрено сужение первого из отображений на симметрические матрицы с заданным следом, приводящее к их отображению на множество обобщенных таблиц Юнга определенных схем: вследствие симметричности матрицы обе таблицы в паре совпадают, а наложение ограничения на след эквивалентно выбору таблиц только определенных схем Юнга. Бэрдж [3], видоизменив способ применения алгоритма Шенстеда, строит ряд биективных отображений различных подмножеств симметрических матриц, в том числе и $(0, 1)$ -матриц, на подмножества обобщенных таблиц Юнга. В каждом из них ограничение, налагаемое на матрицы, приводит к соответствующим ограничениям на схемы Юнга, появляющихся в отображении обобщенных таблиц.

Интерпретация целочисленной неотрицательной матрицы в качестве матрицы смежностей [4], [5] некоторого графа или мультиграфа определенно (в зависимости от наложенных ограничений) класса позволяет отнести перечисленные результаты к графотеоретическим. В настоящей заметке построено биективное отображение множества k -вершинных p -турниров на множество обобщенных таблиц одной определенной схемы Юнга. Отмечается связь с теорией представлений групп. В п. 3 доказывается

условия построения (2) выражаются системой неравенств:

$$\left. \begin{aligned} \forall t \in K \quad \forall t \geq r > 1 \quad (\lambda_{t, r-1} \geq \lambda_{t, r}), \\ \forall k \geq t > 1 \quad \forall t > r \geq 1 \quad (\lambda_{t, r} \geq \lambda_{t-1, r} \geq \lambda_{t, r+1}). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Этим устанавливается взаимно однозначное отображение между двумя множествами: множеством целочисленных неотрицательных матриц $\|\lambda_{t,r}\|$, удовлетворяющих (4), именуемых схемами Гельфанда — Цейтлина [6], и множеством обобщенных таблиц Юнга (с фиксированным K). В теории представлений групп оба множества используются при однозначной индексации базисов неприводимых представлений полной линейной группы $SL(k)$ [6] — [8].

3. Всюду в нижеследующем в качестве множества вершин p -турниров будет принято множество K . Матрица смежностей $A_\theta = \|a_{i,j}(\theta)\|$ p -турнира θ удовлетворяет следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} \forall i \in K \quad (a_{i,i}(\theta) = 0), \\ \forall i \neq j; i, j \in K \quad (a_{i,j}(\theta) + a_{j,i}(\theta) = p), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

т. е. в p -турнире каждая пара $\{i, j\}$ вершин соединена p дугами: $a_{i,j}(\theta)$ дуг направлены от вершины i к вершине j и $a_{j,i}(\theta)$ дуг направлены от j к i ; дуги не помечены (одноцветны).

Пусть: 1) x_1, x_2, \dots, x_k — комплексные переменные, 2) $X = \|\delta_{i,j}x_i\|$ — диагональная матрица ($i, j \in K$), 3) $\|b_{i,j}(\theta)\| = XA_\theta$ (матричное произведение), 4) P — множество всех p -турниров на K , 5) $C_{\langle d \rangle}$ — число p -турниров с набором полустепеней исхода $\langle d \rangle \equiv \langle d_1, d_2, \dots, d_k \rangle$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\theta \in P} \prod_{i,j \in K} b_{i,j}(\theta) &= \sum_{\langle d \rangle} C_{\langle d \rangle} x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_k^{d_k} = \\ &= \prod_{i>j; i,j \in K} \left(\sum_{l=1}^p x_i^{p-l} x_j^l \right) = \\ &= \frac{\prod_{i>j=1}^k (x_i^{p+1} - x_j^{p+1})}{\prod_{i>j}^k (x_i - x_j)} = \frac{|x_i^{(p+1)(k-j)}|}{|x_i^{k-j}|}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь первое равенство — прямое следствие определения. Второе — справедливо вследствие эквивалентности суммирования по всем турнирам $\theta \in P$ независимому для каждой пары вершин перебору всех возможных

$p + 1$ различных ориентаций соединяющих их дуг. Последние два равенства относятся к элементарной алгебре, однако отражают существенное для нас обстоятельство: равенство производящей функции для чисел $C_{\langle d \rangle}$ отношению двух определителей Вандермонда.

Очевидно, $\forall \langle d \rangle (\sum_{i=1}^k d_i = 1/2pk (k - 1) \equiv n)$. В пространстве тензора ранга n группы $GL(k)$ реализуются конечномерные неприводимые представления этой группы, задаваемые схемами Юнга $[\lambda]$ с $\sum_{i=1}^k \lambda_i = n$. Если матрица $X' \in GL(k)$ диагонализуема и x_1, x_2, \dots, x_k — ее собственные значения, то характер соответствующего представления равен [9]

$$\{\lambda\} \equiv \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\} = \frac{|x_i^{\lambda_j + k - j}|}{|x_i^{k-j}|}. \quad (7)$$

$\{\lambda\}$ является симметрической функцией от k переменных, именуемой функцией Шура и в отвлеченных от теории представлений групп контекстах. Из (6), (7) следует

Предложение. *Функция Шура $\{p(k-1), p(k-2), \dots, p, 0\}$ является производящей функцией для чисел помеченных p -турниров на k вершинах с заданными наборами полустепеней исхода $\langle d \rangle$.*

Из [9, стр. 191, теорема IX] следует, что в разложении

$$\{p(k-1), p(k-2), \dots, p, 0\} = \sum_{\langle d \rangle} C_{\langle d \rangle} x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_k^{d_k}$$

число $C_{\langle d \rangle}$ равно числу различных обобщенных таблиц Юнга схемы $[p(k-1), p(k-2), \dots, p]$, кратность появления в которых элемента t для каждого $t \in K$ равна d_t . Вследствие этого существует принципиальная возможность установления биективного отображения между двумя множествами, в котором наборы $\langle d \rangle$ сохраняются в виде соответствующих кратностей появления в обобщенных таблицах Юнга. Переходим к конструктивному построению такого отображения.

4. Основная составная часть алгоритмов Кнута, Бэрджа и нижеследующего — алгоритм внесения и обратный ему алгоритм удаления. В их изложении будем следовать работе [3], за строгими доказательствами отсылая к [1].

Алгоритм внесения применяется к обобщенной таблице τ и элементу $t_1 \in K$. Внесение t_1 в τ производится индуктивно: в первой строке t_1 замещает крайний левый

из элементов $t_2 > t_1$; если такого t_2 не окажется, t_1 помещается в добавляемой справа к первой строке таблицы τ новой клетке. t_2 замещает элемент $t_3 > t_2$ во второй строке или же добавляется к ней в случае отсутствия такого t_3 и так далее. Действие алгоритма заканчивается занесением некоторого t_r в добавленную к r -й строке клетку (в частном случае — добавлением к τ новой строки единичной длины с занесением в нее элемента t_r).

Алгоритм удаления обратен (см. [1]) алгоритму внесения. Заданы: таблица τ и ее строка λ_r при условии $\lambda_r > \lambda_{r+1}$. Удаляется крайняя правая клетка r -й строки, а элемент t_r , помещавшийся в ней, замещает в $(r - 1)$ -й строке крайний правый из элементов $t_{r-1} < t_r$. В свою очередь t_{r-1} замещает в $(r - 2)$ -й строке правый из элементов $t_{r-2} < t_{r-1}$ и так далее. Действие алгоритма заканчивается удалением из первой строки и тем самым из таблицы τ элемента t_1 .

Примем обозначения $V(\tau, t)$, $V(\tau; t_1, t_2, \dots, t_l)$ для обобщенных таблиц Юнга, построенных применением алгоритма внесения соответственно к τ , t и τ и к последовательности t_1, t_2, \dots, t_l : $V(\tau; t_1, t_2, \dots, t_l) = V(V(\tau; t_1, t_2, \dots, t_{l-1}), t_l) = \dots$. Пусть после внесения в τ элемента t_1 и элемента t_2 в $V(\tau; t_1)$, в добавленных к τ и к $V(\tau; t_1)$ клетках помещены, соответственно, элементы t'_1 и t'_2 . Существенно следующее утверждение:

ТЕОРЕМА Кнута [1, теорема 1]. $t_1 \leq t_2$ тогда и только тогда, если в $V(\tau; t_1, t_2)$ элемент t'_2 помещен правее или правее и выше (одновременно) элемента t'_1 .

Обобщенную таблицу Юнга, взаимно однозначно отображающую турнир θ , построим индуктивно по подтурнирам. Пусть θ_t — подтурнир, полученный удалением из $\theta \equiv \theta_k$ всех вершин $t' > t$ (совместно с инцидентными им дугами). Пусть $\tau(\theta_t)$ — обобщенная таблица, взаимно однозначно отображающая подтурнир θ_t . Алгоритм R_t дополняет $\tau(\theta_{t-1})$ до $\tau(\theta_t)$ в два шага; первый шаг — алгоритм R_{t1} , второй шаг — алгоритм R_{t2} .

Алгоритм R_{t1} состоит в применении алгоритма внесения к $\tau(\theta_{t-1})$ и к лексикографической последовательности элементов

$$S_t(\theta): \overbrace{1, 1, \dots, 1}^{a_1, t^{(\theta)}}, \overbrace{2, 2, \dots, 2, \dots}^{a_2, t^{(\theta)}}, \overbrace{t-1, t-1, \dots, t-1}^{a_{t-1}, t^{(\theta)}}.$$

Результат действия R_{i1} — обобщенная таблица $V(\tau(\theta_{t-1}); S_t(\theta))$. Из теоремы Кнута, лексикографичности $S_t(\theta)$ и обратимости алгоритма внесения следует однозначная обратимость алгоритма R_{i1} .

Алгоритм R_{i2} добавляет к таблице $V(\tau(\theta_{t-1}); S_t(\theta))$ новые клетки до получения схемы Юнга $[p(t-1), p(t-2), \dots, p]$ и заносит в добавленные клетки элемент t . Обратимость очевидна.

Обобщенная таблица Юнга, взаимно однозначно отображающая турнир $\theta \equiv \theta_k$, строится последовательным применением алгоритмов R_2, R_3, \dots, R_k . Кратность появления элемента $t \in K$ в построенной таблице равна d_t , поскольку алгоритмом R_{i2} занесено $\sum_{i=1}^{t-1} a_{t,i}(\theta)$, а каждым из алгоритмов R_{i1} с $i > t$ занесено $a_{t,i}(\theta)$ элементов t .

З а м е ч а н и е — п р и м е р. Алгоритмом R_2 из пустой таблицы и последовательности, состоящей из $a_{1,2}(\theta)$ элементов $1 \in K$, строится однострочная обобщенная таблица

$$\overbrace{11 \dots 1}^{a_{1,2}(\theta)} \quad \overbrace{22 \dots 2}^{a_{2,1}(\theta)}$$

П р и м е р. Обобщенная таблица Юнга (3), отображающая турнир с матрицей смежностей

| | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|
| j | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| i | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| | 2 | 2 | 0 | 2 | 3 |
| | 3 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| | 4 | 2 | 0 | 2 | 0 |

построена описанным алгоритмом.

Институт физики
АН Литовской ССР

Поступило
29.VI.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] K n u t h D. E., Permutations, matrices and generalized Young tableaux, Pacific J. Math., **34**, № 3 (1970), 709—727.
 [2] S c h e n s t e d C., Longest increasing and decreasing subsequences, Canad. J. Math., **13**, № 2 (1961), 179—191.

- 3] B u r g e W. H., Four correspondences between graphs and generalized Young tableaux, J. Combinatorial Theory, Ser. A, 17, № 1 (1974), 12—30.
- [4] Х а р а р и Ф., Теория графов, М., «Мир», 1973.
- [5] Б е р ж К., Теория графов и ее применения, М., ИЛ, 1962.
- [6] Г е л ь ф а н д И. М., Ц е й т л и н М. Л., Конечномерные представления группы унитарных матриц, Докл. АН СССР, 71, № 5 (1950), 825—828.
- [7] Ж е л о б е н к о Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., «Наука», 1970.
- [8] Ю ц и с А.-А. А., Представления симметрических групп и коэффициенты Клебша — Гордана унитарных групп, Лит. матем. сб., 8, № 3 (1968), 597—609.
- [9] L i t t l e w o o d D. E., The theory of group characters and matrix representations of groups, Oxford, 1958.