Н. Н. Холщевникова, Пример последовательности, не суммируемой положительным регулярным методом к элементу своего ядра,
Матем. заметки, 1980, том 28, выпуск 3, 365–378

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 28, № 3 (1980)

ПРИМЕР ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, НЕ СУММИРУЕМОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ РЕГУЛЯРНЫМ МЕТОДОМ К ЭЛЕМЕНТУ СВОЕГО ЯДРА

Н. Н. Холщевникова

Рассмотрим два свойства последовательностей в локально выпуклом линейном топологическом пространстве сокращенно, ЛВП).

Пусть X — ЛВП, $\{x_n\}$ и $\{x_n^k\}$ — последовательности элементов из X.

Первое свойство, так называемое свойство диагонали: если $x_n^k \to x$ при $n \to \infty$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, то найдется возрастающая последовательность номеров $\{n_k\}$ такая, что $x_{n_k}^k \to x$ при $k \to \infty$.

Пусть $E \subset X$. Через $\operatorname{Conv} E$ обозначим выпуклую оболочку множества E, а через $\overset{s}{\operatorname{Conv}}\, E$ — секвенциальное замыкание $\operatorname{Conv} E$, т. е. множество пределов последовательностей, элементы которых принадлежат $\operatorname{Conv} E$. Множество $\bigcap_{m=0}^{\infty} \overset{s}{\operatorname{Conv}} \{x_m, x_{m+1}, \ldots\}$ называется ядром последовательности $\{x_n\}$.

Сформулируем теперь второе свойство: если ядро последовательности $\{x_n\}$ содержит элемент x, то найдется положительная регулярная матрица, суммирующая $\{x_n\}$ к x.

Хорошо известно, что метрические пространства обладают первым свойством. Легко видеть, что если выполняется первое свойство, то выполняется и второе. Банаховы пространства со слабой топологией обладают вторым свойством. Пространство суммируемых на $[0, 1]$ функций

L [0, 1] со слабой топологией дает пример пространства без свойства диагонали, но со вторым свойством.

Приведем пример локально выпуклого пространства, в котором не выполняется второе свойство. Цель построения этого примера была следующая.

Обозначим через $T(1)$ класс регулярных числовых матриц (c_{mn}), для которых

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |c_{mn}| = 1$$

(положительные регулярные матрицы принадлежат этому классу).

В [1] приведены две теоремы, которые мы сформулируем здесь для случая матриц класса $T(1)$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть X — ЛВП, $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность в X, (c_{mn}) — матрица класса $T(1)$. Тогда, если для бесконечного числа возрастающих номеров m_k ряды $\sum_{n=0}^{\infty} c_{m_k n} x_n$ сходятся к некоторым элементам t_k, то множество предельных точек последовательности $\{t_k\}$ содержится в ядре последовательности $\{x_n\}$.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть X — ЛВП, всякое сепарабельное ограниченное подмножество которого метризуемо, $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность в X и F — непустое замкнутое множество, содержащееся в ядре $\{x_n\}$. Тогда существует матрица класса $T(1)$, преобразующая $\{x_n\}$ в последовательность, множество предельных точек которой совпадает с F.*

В числовом случае теоремы 1 и 2 доказаны К. Кноппом и Р. Агнью (см. [2]).

Как видно из формулировок, теорема 2 не является обратной к теореме 1, так как в ее условии содержится дополнительное требование метризуемости ограниченных сепарабельных подмножеств. Мы покажем, что если это дополнительное требование опустить, то теорема 2 становится неверной. А, именно, приведем пример локально выпуклого пространства X и ограниченной последовательности $\{x_n\}$ в нем таких, что множество $\bigcap_{m=0}^{\infty} \overset{s}{\mathrm{Conv}} \cdot \{x_m, x_{m+1}, \ldots\}$ (ядро $\{x_n\}$) содержит множество F, состоящее из одной точки 0, но ни одна матрица класса $T(1)$ не суммирует $\{x_n\}$ к нулю.

В качестве X рассмотрим линейное пространство действительных функций, определенных на отрезке [0, 2], с топологией поточечной сходимости. Это локально выпуклая топология, обладающая свойствами:

$$f_n \to f \text{ при } n \to \infty \text{ в топологии } X \text{ тогда и только тогда, когда } f_n(\xi) \to f(\xi), \text{ при } n \to \infty \text{ поточечно,} \tag{1}$$

если $|f_n(\xi)| \leqslant 1$ для $\xi \in [0, 2]$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$, то множество функций $\{f_n\}$ ограниченно в топологии X. (2)

Перейдем теперь к построению последовательности $\{x_n\}$. Сначала построим счетное число счетных наборов функций $\{f_{ik}\}_{k=1}^{\infty}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Запишем эти функции в виде таблицы так, что в i-ой строке стоят функции f_{ik} $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, а в k-ом столбце — функции f_{ik} $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Перенумеруем далее функции диагональным способом и положим функцию x_n равной функции с номером n:

$$\begin{array}{ccccc} f_{11} = x_0 & f_{12} = x_1 & f_{13} = x_3 & f_{14} = x_6 & \ldots \\ f_{21} = x_2 & f_{22} = x_4 & f_{23} = x_7 & f_{24} = x_{11} & \ldots \\ f_{31} = x_5 & f_{32} = x_8 & f_{33} = x_{12} & f_{34} = x_{15} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \tag{3}$$

Областью определения функций f_{ik} будет отрезок $[0, 2]$. Характеристическую функцию множества E, т. е. функцию, равную единице на E и нулю вне E, будем обозначать $\chi_E(\xi)$. Определим сначала функции f_{ik} на отрезке $[1, 2]$. Положим

$$\varphi_i(\xi) = \chi_{\left(2 - \frac{1}{2^{i-1}},\, 2 - \frac{1}{2^i}\right)}(\xi), \quad \xi \in [0, 2], \tag{4}$$

и

$$f_{i1}(\xi) = \varphi_i(\xi), \quad \xi \in [1, 2], \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{5}$$

$$f_{ik}(\xi) = -\varphi_i(\xi), \quad \xi \in [1, 2], \quad i = 1, 2, 3, \ldots; \quad k = 2, 3, 4, \ldots$$

Затем определим функции $\{f_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ на всем отрезке $[0, 2]$. Положим

$$f_{11}(\xi) = \chi_{(0,\,1/2)}(\xi) + \varphi_1(\xi), \tag{6}$$

$$f_{1k}(\xi) = -\chi_{(1/2^k,\,1/2)}(\xi) - \varphi_1(\xi), \ k = 2, 3, 4, \ldots \tag{7}$$

Заметим, что из формул (6) и (7) следует

$$f_{11}(\xi) + f_{1k}(\xi) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty, \quad \xi \in [0, 2]. \tag{8}$$

Дадим теперь общее определение функций f_{ik} (для $i = 2, 3, 4, \ldots, k = 1, 2, 3, \ldots$) на полуинтервале $[0, 1]$. Положим

$$f_{ik}(\xi) = f_{1k}\left(8^{i-1}\left(\xi - \frac{\nu}{8^{i-1}}\right)\right), \quad \xi \in \left[\frac{\nu}{8^{i-1}}, \frac{\nu+1}{8^{i-1}}\right), \tag{9}$$

$\nu = 0, 1, \ldots, 8^{i-1} - 1,\ i = 2, 3, 4, \ldots;\ k = 1, 2, 3, \ldots$ Заметим, что, когда ξ меняется в полуинтервале $\left[\frac{\nu}{8^{i-1}}, \frac{\nu+1}{8^{i-1}}\right)$, аргумент функции f_{1k} в формуле (9) изменяется от 0 до 1.

Из формул (4)—(7) и (9) видно, что теперь функции f_{ik} определены полностью на $[0, 2]$. Так как $|f_{ik}(\xi)| \leqslant 1$, то и $|x_n(\xi)| \leqslant 1$, следовательно, ввиду (2), последовательность $\{x_n\}$ ограничена в топологии X. Из условия (8) и определения функций (см. (5) и (9)) следует, что

$$f_{i1}(\xi) + f_{ik}(\xi) \to 0 \text{ при } k \to \infty,\ \xi \in [0, 2],\quad i = 1, 2, 3, \ldots \tag{10}$$

Докажем теперь, что функция $x(\xi) \equiv 0$ принадлежит множеству $\bigcap_{m=0}^{\infty} \overset{s}{\mathrm{Conv}}\,\{x_m, x_{m+1}, \ldots\}$.

Пусть m фиксировано. Из определения $\{x_n\}$ (см. (3)) следует, что найдется номер $r \geqslant m$ такой, что $f_{m1} = x_r$. Существует также возрастающая последовательность номеров $p_k(m)$ таких, что

$$f_{mk} = x_{p_k(m)}, \quad p_k(m) > r \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots).$$

Из формулы (10) и определения множеств $\mathrm{Conv}\,\{x_m, x_{m+1}, \ldots\}$ следует, что

$$\frac{1}{2}(f_{m1} + f_{mk}) = \frac{1}{2}(x_r + x_{p_k(m)}) \to 0 \quad \text{при } k \to \infty,$$

где

$$\frac{1}{2}(x_r + x_{p_k(m)}) \in \mathrm{Conv}\,\{x_r, x_{r+1}, \ldots\}.$$

Поэтому $x = 0 \in \overset{s}{\mathrm{Conv}}\,\{x_r, x_{r+1}, \ldots\}$. Так как $r \geqslant m$, то $0 \in \overset{s}{\mathrm{Conv}}\,\{x_r, x_{r+1}, \ldots\} \subset \overset{s}{\mathrm{Conv}}\,\{x_m, x_{m+1}, \ldots\}$ и в силу произвольности m имеем

$$0 \in \bigcap_{m=0}^{\infty} \overset{s}{\mathrm{Conv}}\,\{x_m, x_{m+1}, \ldots\}. \tag{11}$$

Этим первая половина утверждения доказана.

Докажем теперь, что ни одна матрица класса $T(1)$ не суммирует последовательность $\{x_n\}$ к нулю. Доказательство проведем от противного. Пусть некоторая матрица (c_{mn}) класса $T(1)$ суммирует $\{x_n\}$ к 0. Тогда

$$t_m(\xi) \to 0 \text{ при } m \to \infty, \ \xi \in [0, 2], \tag{12}$$

где $t_m(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} x_n(\xi)$.

Теперь нам понадобится одно простое утверждение о свойствах регулярных матриц.

ЛЕММА. *Пусть* (c_{mn}) — *регулярная матрица класса* $T(1)$. *Тогда можно выбрать такие возрастающие последовательности натуральных чисел* $\{\nu_l\}$ *и* $\{n(\nu_l)\}$ *и так определить числа* $\tilde{c}_{ln}$ *для* $l \leqslant n \leqslant n(\nu_l)$, $l = 0, 1, 2, \ldots,$ *что*

$$\sum_{n=l}^{n(\nu_l)} \tilde{c}_{ln} = 1, \quad \tilde{c}_{ln} \geqslant 0, \tag{13}$$

$$\lim_{\to\infty} \left\{\sum_{n=l}^{n(\nu_l)} |\tilde{c}_{ln} - c_{\nu_l n}| + \sum_{n=0}^{l-1} |c_{\nu_l n}| + \sum_{n=n(\nu_l)+1}^{\infty} |c_{\nu_l n}|\right\} = 0. \tag{14}$$

Доказательство. В силу необходимых и достаточных условий регулярности матрицы найдутся возрастающие последовательности $\{\nu_l\}$ и $\{n(\nu_l)\}$, такие, что для каждого натурального l выполняются неравенства

$$\sum_{n=0}^{l} |c_{\nu_l n}| < 1/2^l, \quad \sum_{n=n(\nu_l)+1}^{\infty} |c_{\nu_l n}| < 1/2^l,$$

$$\left|\sum_{n=l}^{n(\nu_l)} c_{\nu_l n} - 1\right| < 1/2.$$

Положим

$$\overset{+}{c}_{ln} = \begin{cases} \operatorname{Re} c_{\nu_l n}, & \text{если } \operatorname{Re} c_{\nu_l n} > 0, \\ 0, & \text{если } \operatorname{Re} c_{\nu_l n} \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\tilde{c}_{ln} = \frac{\overset{+}{c}_{ln}}{\sum_{n=l}^{n(\nu_l)} \overset{+}{c}_{ln}} \quad \text{для} \quad l \leqslant n \leqslant n(\nu_l), \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда $\sum_{n=l}^{n(\nu_l)} \tilde{c}_{ln} = 1$, $\tilde{c}_{ln} \geqslant 0$, и так как (c_{mn}) — матрица класса $T(1)$, то выполняется и условие (14). Лемма доказана.

По матрице (c_{mn}) определим числа $\tilde{c}_{ln}$, как указано в лемме. Положим

$$\tau_l(\xi) = \sum_{n=l}^{n(\nu_l)} \tilde{c}_{ln} x_n(\xi) \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

Из условий (12), (14) и ограниченности $\{x_n(\xi)\}$ следует, что

$$\tau_l(\xi) \to 0 \text{ при } l \to \infty, \ \xi \in [0, 2]. \tag{16}$$

В силу соответствия между функциями x_n и f_{ik} (см. (3)), для каждой функции x_n найдутся номера $i(n)$ и $k(n)$ такие, что $x_n = f_{i(n)k(n)}$. Положим для каждого натурального l

$$\max_{\substack{l \leqslant n \leqslant n(\nu_l) \\ \tilde{c}_{ln} \neq 0}} i(n) = j(l), \qquad \max_{l \leqslant n \leqslant n(\nu_l)} \{2, k(n)\} = h(l). \tag{17}$$

Запишем теперь $\tau_l(\xi)$ с помощью функций $f_{ik}(\xi)$ следующим образом:

$$\tau_l(\xi) = \sum_{n=l}^{n(\nu_l)} \tilde{c}_{ln} x_n(\xi) = \sum_{i=1}^{j(l)} \sum_{k=1}^{h(l)} \alpha_k^{(l, i)} f_{ik}(\xi), \tag{18}$$

где $\alpha_k^{(l, i)} = \tilde{c}_{ln}$, если среди функций x_ν $(l \leqslant \nu \leqslant n(\nu_l))$ найдется функция x_n равная, соответственно таблице (3), функции f_{ik} и $\alpha_k^{(l, i)} = 0$ в противном случае. На основании равенств (13) и (18) имеем

$$\sum_{n=l}^{n(\nu_l)} \tilde{c}_{ln} = \sum_{i=1}^{j(l)} \sum_{k=1}^{h(l)} \alpha_k^{(l, i)} = 1, \quad \alpha_k^{k(l, i)} \geqslant 0, \quad l = 0, 1, 2, \ldots \tag{19}$$

Чтобы получить противоречие с условием (12), рассмотрим подробнее свойства функций f_{ik} и докажем четыре утверждения (причем второе, третье и четвертое — в предположении, что условие (12) справедливо).

Утверждение 1. *Существует точка ξ_0 из отрезка* $[0, 2]$ *такая, что для каждого натурального* i

$$f_{i1}(\xi_0) = 1, \quad f_{ik}(\xi_0) = -1 \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots). \tag{20}$$

Доказательство. Построим по индукции вложенную последовательность интервалов $\mathcal{I}_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, обладающую следующими свойствами:

$\mathcal{I}_i$ — интервал вида $(r/8^i, (r+2)/8^i)$, где

$$r \text{ — целое}, \quad 0 \leqslant r \leqslant 8^i - 2. \tag{21}$$

Если $i > 1$, то

$$\text{для четных } i \ \mathcal{J}_i \text{ лежит в левой половине } \mathcal{J}_{i-1}, \quad (22)$$
$$\text{для нечетных } i \ \mathcal{J}_i \text{ лежит в правой половине } \mathcal{J}_{i-1}$$

и

$$f_{i1}(\xi) = 1, \quad f_{ik}(\xi) = -1, \quad \xi \in \mathcal{J}_i, \quad k = 2, 3, 4, \ldots; \quad i = 1, 2, 3, \ldots \quad (23)$$

Положим $\mathcal{J}_1 = (1/4, 1/2)$. Условие (21) выполнено для $\mathcal{J}_1$ при $i = 1$, $r = 2$. В силу формул (6) и (7)

$$f_{11}(\xi) = 1, \quad f_{1k}(\xi) = -1, \quad \xi \in \mathcal{J}_1 \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots). \quad (24)$$

Предположим теперь, что построены интервалы $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_{i-1}$ со свойствами (21) — (23), если $i > 2$, и со свойствами (21), (23), если $i = 2$. Построим интервал $\mathcal{J}_i$. В силу (21) $\mathcal{J}_{i-1} = (r/8^{i-1}, (r+2)/8^{i-1})$, где $0 \leqslant r \leqslant 8^{i-1} - 2$. Положим $\nu = r$, если i четное, и $\nu = r + 1$, если i нечетное, и рассмотрим интервал $(\nu/8^{i-1}, (\nu+1)/8^{i-1})$. Из определения функций f_{ik} на полуинтервале $[0, 1)$ (см. (9)) следует, что

$$f_{ik}(\xi) = f_{1k}\left(8^{i-1}\left(\xi - \frac{\nu}{8^{i-1}}\right)\right), \quad \xi \in \left(\frac{\nu}{8^{i-1}}, \frac{\nu+1}{8^{i-1}}\right), \quad k = 1, 2, 3, \ldots \quad (25)$$

Положим $\zeta = 8^{i-1}(\xi - \nu/8^{i-1})$. Если $\xi \in (\nu/8^{i-1}, (\nu+1)/8^{i-1})$, то $\zeta \in (0, 1)$. Определим теперь $\mathcal{J}_i$ как множество тех значений ξ, для которых $\zeta \in \mathcal{J}_1 = (1/4, 1/2)$. Тогда $\mathcal{J}_i$ есть интервал вида

$$\left(\frac{\nu}{8^{i-1}} + \frac{1}{4 \cdot 8^{i-1}}, \ \frac{\nu}{8^{i-1}} + \frac{1}{2 \cdot 8^{i-1}}\right) = \left(\frac{2+8\nu}{8^i}, \ \frac{4+8\nu}{8^i}\right),$$

где $0 < 2 + 8\nu < 8^i - 2$, так как $0 \leqslant \nu \leqslant 8^{i-1} - 1$. Таким образом, интервал $\mathcal{J}_i$ удовлетворяет условию (21). Так как $\mathcal{J}_i \subset (\nu/8^{i-1}, (\nu+1)/8^{i-1})$, то в силу выбора ν, условие (22) тоже выполняется. Так как по определению $\mathcal{J}_i$ есть множество тех значений ξ, для которых $8^{i-1}(\xi - \nu/8^{i-1}) \in \mathcal{J}_1$, то ввиду формул (24) и (25), условие (23) тоже выполнено для интервала $\mathcal{J}_i$. Таким образом, для каждого натурального i можно построить интервал $\mathcal{J}_i$ со свойствами (21) — (23). В силу (21) и (22) найдется точка ξ_0 такая, что $\xi_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{J}_i$. Отсюда и из формулы (23) видим, что утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *Если условие* (12) *справедливо, то*

$$\lim_{l\to\infty} j(l) = \infty,$$

где числа $j(l)$ *определены формулой* (17).

Доказательство. Пусть формула (26) неверна. Тогда существует такая возрастающая подпоследовательность натуральных чисел $\{l_p\}$ и натуральное число q, что

$$j(l_p) = q \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots). \tag{27}$$

Тогда $\tau_{l_p}(\xi)$ (см. (18)) можно записать в виде

$$\tau_{l_p}(\xi) = \sum_{n=l_p}^{n(\nu_{l_p})} \bar{c}_{l_p n} x_n(\xi) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{k=1}^{h(l_p)} \alpha_k^{(l_p,\, i)} f_{ik}(\xi). \tag{28}$$

Обозначим через Q номер члена последовательности $\{x_n\}$, соответствующего функции f_{q1}, согласно (3), т. е. $f_{q1} = x_Q$. Из таблицы (3) ясно, что функции $f_{11}, f_{21}, \ldots, f_{q-1,\,1}$ равны функциям x_n с номерами n меньшими Q. Отсюда и из формулы (28) следует, что

$$\alpha_1^{(l_p,\, i)} = 0 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant q, \quad l_p \geqslant Q + 1, \tag{29}$$

так как функции f_{i1} $(1 \leqslant i \leqslant q)$, которым соответствуют коэффициенты $\alpha_1^{(l_p,\, i)}$ не входят в сумму в левой части равенства (28). Следовательно,

$$\tau_{l_p}(\xi_0) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{k=2}^{h(l_p)} \alpha_k^{(l_p,\, i)} f_{ik}(\xi) \qquad (l_p \geqslant Q + 1).$$

Тогда в точке ξ_0, в которой выполняется условие (20),

$$\tau_{l_p}(\xi) = -\sum_{i=1}^{q} \sum_{k=2}^{h(l_p)} \alpha_k^{(l_p,\, i)} \qquad \text{при } l_p \geqslant Q + 1.$$

В силу формул (19), (27) и (29)

$$\sum_{i=1}^{j(l_p)} \sum_{k=1}^{h(l_p)} \alpha_k^{(l_p,\, i)} = \sum_{i=1}^{q} \sum_{k=2}^{h(l_p)} \alpha_k^{(l_p,\, i)} = 1 \quad \text{при} \quad l_p \geqslant Q + 1$$

и, следовательно, $\tau_{l_p}(\xi_0) = -1$ при $l_p \geqslant Q + 1$. Отсюда видно, что если формула (26) неверна, то неверна также формула (16), а, значит, и условие (12). Поэтому, если условие (12) справедливо, то (26) выполняется. Таким образом, утверждение 2 доказано.

Заметим, что из формул (26) и (18) следует, что для каждого натурального i существует такое число N_i, что $j(l) \geqslant i$ для $l \geqslant N_i$ и, следовательно, числа $\alpha_k^{(l,\,i)}$ $(1 \leqslant k \leqslant h(l))$ определены для $l \geqslant N_i$.

Сформулируем теперь

Утверждение 3. *Если условие* (12) *справедливо, то*

$$\lim_{l\to\infty} \sum\nolimits_{k=1}^{h(l)} \alpha_k^{(l,\,i)} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots \tag{30}$$

При этом, для каждого фиксированного i мы будем считать, что в формуле (30) *рассматриваются суммы* $\sum\nolimits_{k=1}^{h(l)} \alpha_k^{(l,\,i)}$ *для* $l \geqslant N_i$.

Доказательство. Пусть формула (30) неверна. Тогда найдутся натуральное число i_0, возрастающая последовательность номеров $\{l_r\}$ и отличное от нуля число α такие, что

$$\lim_{r\to\infty} \sum\nolimits_{k=1}^{h(l_r)} \alpha_k^{(l_r,\,i_0)} = \alpha \neq 0.$$

Обозначим интервал $(2 - 1/2^{i_0-1},\ 2 - 1/2^{i_0})$ буквой I. В силу определений (4) и (5) для $\xi \in I$

$$f_{i_0 1}(\xi) = 1, \quad f_{i_0 k}(\xi) = -1 \quad (k = 2, 3, 4, \ldots),$$
$$f_{ik}(\xi) = 0 \qquad (i \neq i_0, \ k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Поэтому см. (18)

$$\tau_{l_r}(\xi) = \alpha_1^{(l_r,\,i_0)} - \sum\nolimits_{k=2}^{h(l_r)} \alpha_k^{(l_r,\,i_0)}, \quad \xi \in I, \ l_r \geqslant N_{i_0}.$$

Пусть $f_{i_0 1} = x_s$. Так как для номеров l_r, больших s, функция $x_s(\xi)$ не входит в сумму $\tau_{l_r}(\xi) = \sum\nolimits_{n=l_r}^{n(\nu_{l_r})} \bar{c}_{l_r n} x_n(\xi)$, то $\alpha_1^{(l_r,\,i_0)} = 0$ для $l_r > \max\{s, N_{i_0}\}$. Отсюда следует, что

$$\lim_{r\to\infty} \sum\nolimits_{k=2}^{h(l_r)} \alpha_k^{(l_r,\,i_0)} = \alpha, \quad \tau_{l_r}(\xi) \to -\alpha \neq 0, \quad \xi \in I,$$

но это противоречит условию (16), а, значит, и условию (12). Поэтому, если условие (12) справедливо, то формула (30) верна. Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4. *Если условие* (12) *справедливо, то найдутся такие возрастающие последовательности натуральных чисел* $\{l_r\}$ *и* $\{m_r\}$ *и такая точка* ξ_1 *из отрезка* $[0, 2]$, *что для* $r = 1, 2, 3, \ldots$

$$f_{i1}(\xi_1) = 1, \quad f_{ik}(\xi_1) = 0 \quad (m_r \leqslant i \leqslant j(l_r), \; 2 \leqslant k \leqslant h(l_r)), \tag{31}$$

и

$$\sum_{i=1}^{m_r-1} \sum_{k=1}^{h(l)} \alpha_k^{(l,\, i)} < \frac{1}{2^r}, \quad l \geqslant l_r, \; r > 1. \tag{32}$$

Доказательство. Построим сначала последовательности $\{l_r\}$ и $\{m_r\}$, удовлетворяющие условию (32), и последовательность вложенных интервалов I_r, удовлетворяющих следующим условиям: если $r > 1$, то

$$\text{для четных } r \; I_r \text{ лежит в левой половине } I_{r-1}, \text{ для нечетных } r \; I_r \text{ лежит в правой половине } I_{r-1}, \tag{33}$$

$$f_{i1}(\xi) = 1, \quad f_{ik}(\xi) = 0 \quad (m_r \leqslant i \leqslant j(l_r), \; 2 \leqslant k \leqslant h(l_r), \quad \xi \in I_r). \tag{34}$$

Положим $m_1 = 1$, $l_1 = 1$. Рассмотрим функции f_{ik} для $1 \leqslant i \leqslant j(1)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ (где $j(1)$ определено формулой (17)) на полуинтервале $[0, 1/8^{j(1)-1})$. Так как $[0, 1/8^{j(1)-1}) \subset [0, 1/8^{i-1})$ при $1 \leqslant i \leqslant j(1)$, то ввиду определения (9)

$$f_{ik}(\xi) = f_{1k}(8^{i-1}\xi), \quad \xi \in \left[0, \frac{1}{8^{j(1)-1}}\right), \quad 1 \leqslant i \leqslant j(1), \; k = 1, 2, 3, \ldots \tag{35}$$

Напомним, что (см. (4), (6), (7))

$$f_{11}(\xi) = \chi_{(0,\, 1/2)}(\xi), \quad f_{1k}(\xi) = -\chi(1/2^k, 1/2), \quad \xi \in (0, 1), \; k = 2, 3, 4, \ldots \tag{36}$$

Значит, на интервале $(0, 1/2^{h(1)})$ ($h(1)$ определяется в формуле (17))

$$f_{11}(\xi) = 1, \quad f_{1k}(\xi) = 0, \quad k = 2, \ldots, h(1). \tag{37}$$

Положим $\eta = 8^{j(1)-1}\xi$. Тогда, если $\xi \in (0, 1/8^{j(1)-1})$, то $\eta \in (0, 1)$. Обозначим через I_1 множество тех ξ, для которых $\eta \in (0, 1/2^{h(1)})$. То есть $I_1 = \left(0, \dfrac{1}{8^{j(1)-1} 2^{h(1)}}\right)$. Из определения I_1 и формул (35) и (37) следует, что

$$f_{i1}(\xi)=1,\quad f_{ik}(\xi)=0,\quad \xi\in I_1,$$
$$1=m_1\leqslant i\leqslant j(1)=j(l_1),\quad 2\leqslant k\leqslant h(1),$$

так как, если $\xi\in I_1$, то $8^{i-1}\xi\in(0,\ 1/2^{h(1)})$. Таким образом, I_1 удовлетворяет условию (34) при $r=1$.

Предположим теперь, что определены числа $l_1,\ldots,l_{r-1}$ и $m_1,\ldots,m_{r-1}$ так, что для них выполняется условие (32), если $r>2$ и построены интервалы $I_1,\ldots,I_{r-1}$, удовлетворяющие условию (34) и условию (33), если $r>2$. Определим числа l_r, m_r и интервал I_r. Длину интервала I будем обозначать через $|I|$. Выберем число m_r так, чтобы

$$m_r>m_{r-1},\quad |I_{r-1}|>4\,(1/8^{m_r-1}).$$

Тогда в каждой половине I_{r-1} содержится интервал вида $(p/8^{m_r-1},\ (p+1)/8^{m_r-1})$, где p — целое число, $0\leqslant p\leqslant 8^{m_r-1}-1$. Если r четное, то рассмотрим интервал $(p/8^{m_r-1},\ (p+1)/8^{m_r-1})$ лежащий в левой половине I_{r-1}, если r нечетное, то — в правой. На основании формул (26) и (30) выберем l_r так, чтобы выполнялись условия

$$l_r>l_{r-1},\quad j(l_r)\geqslant m_r,\quad l_r\geqslant N_{m_r} \tag{38}$$

(где $j(l)$ определено в формуле (17), а N_i перед утверждением 3) и

$$\sum_{i=1}^{m_r-1}\sum_{k=1}^{h(l)}\alpha_k^{(l,\,i)}<\frac{1}{2^r}\quad \text{при}\quad l\geqslant l_r.$$

Таким образом, условие (32) выполняется для m_r и l_r.

Рассмотрим функции f_{ik} $(m_r\leqslant i\leqslant j(l_r))$ на интервале $J=(p/8^{m_r-1},\ p/8^{m_r-1}+1/8^{j(l_r)-1})$. Для $m_r\leqslant i\leqslant j(l_r)$

$$J\subset\left(\frac{p}{8^{m_r-1}},\ \frac{p}{8^{m_r-1}}+\frac{1}{8^{i-1}}\right)=\left(\frac{p_i}{8^{i-1}},\ \frac{p_i+1}{8^{i-1}}\right), \tag{39}$$

где $0\leqslant p_i=p\cdot 8^{i-m_r}\leqslant 8^{i-1}-1$.

В силу определения (9)

$$f_{ik}(\xi)=f_{1k}\left(8^{i-1}\left(\xi-\frac{p_i}{8^{i-1}}\right)\right),\quad \xi\in\left(\frac{p_i}{8^{i-1}},\ \frac{p_i+1}{8^{i-1}}\right),$$

и поэтому, вследствие формулы (39)

$$f_{ik}(\xi)=f_{1k}\left(8^{i-1}\left(\xi-\frac{p}{8^{m_r-1}}\right)\right), \quad \xi\in J, \ m_r\leqslant i\leqslant j(l_r),$$
$$k=1, 2, 3, \ldots \qquad (40)$$

Положим $\theta = 8^{j(l_r)-1}(\xi-p/8^{m_r-1})$. Тогда, если $\xi\in J$, то $\theta\in(0, 1)$. Обозначим через I_r множество тех значений ξ, для которых $\theta\in(0, 1/2^{h(l_r)})$. Тогда

$$I_r=\left(\frac{p}{8^{m_r-1}}, \ \frac{p}{8^{m_r-1}}+\frac{1}{8^{j(l_r)-1}2^{h(l_r)}}\right).$$

Ввиду формул (17) и (36)

$$f_{11}(\xi)=1, \quad f_{1k}(\xi)=0, \quad k=2, \ldots, h(l_r); \quad \xi\in\left(0, \frac{1}{2^{h(l_r)}}\right).$$

Отсюда на основании (40) получаем, что

$$f_{i1}(\xi)=f_{11}\left(8^{i-1}\left(\xi-\frac{p}{8^{m_r-1}}\right)\right)=1, \ \xi\in I_r, \ m_r\leqslant i\leqslant j(l_r);$$
$$f_{ik}(\xi)=0, \quad \xi\in I_r, \quad m_r\leqslant i\leqslant j(l_r), \quad 2\leqslant k\leqslant h(l_r),$$

так как, если $\xi\in I_r$, то при $m_r\leqslant i\leqslant j(l_r)$ $\quad 8^{i-1}(\xi-p/8^{m_r-1})\in(0, 1/2^{h(l_r)})$. Следовательно, для I_r выполнено условие (34). Условие (33) тоже выполнено, так как интервал I_r вложен в интервал $(p/8^{m_r-1}, (p+1)/8^{m_r-1})$, а последний был выбран надлежащим образом. Таким образом, можно определить последовательности $\{m_r\}$ и $\{l_r\}$ и интервалы $\{I_r\}$, удовлетворяющие условиям (32)—(34). Отсюда вытекает справедливость условия (31), где $\xi_1=\bigcap_{r=1}^{\infty}\bar{I}_r$. Утверждение 4 доказано.

Докажем теперь, что предположение о справедливости условия (12) ведет к противоречию. Пусть (12) выполнено. Тогда, как было показано, выполняется и условие (16). На основании (16), (18) и (20) имеем

$$\tau_l(\xi_0)=\sum_{n=l}^{n(\nu_l)}\bar{c}_{ln}x_n(\xi_0)=$$
$$=\sum_{i=1}^{j(l)}\alpha_1^{(l,i)}-\sum_{i=1}^{j(l)}\sum_{k=2}^{h(l)}\alpha_k^{(l,i)}\to 0 \quad (l\to\infty). \qquad (41)$$

В силу формулы (31)

$$\sum_{i=m_r}^{j(l_r)} \sum_{k=1}^{h(l_r)} \alpha_k^{(l_r,\, i)} f_{ik}(\xi_1) = \sum_{i=m_r}^{j(l_r)} \alpha_1^{(l_r,\, i)}. \tag{42}$$

Так как $|f_{ik}(\xi)| \leqslant 1$ и $\alpha_k^{(l,\, i)} \geqslant 0$ (см. (19)), то из неравенства (32) следует, что

$$\sum_{i=1}^{m_r-1} \sum_{k=1}^{h(l_r)} \alpha_k^{(l_r,\, i)} f_{ik}(\xi) \to 0 \qquad (r \to \infty,\ \xi \in [0, 2]). \tag{43}$$

Из формул (16), (18) и (42) вытекает, что

$$\tau_{l_r}(\xi_1) = \sum_{i=1}^{j(l_r)} \sum_{k=1}^{h(l_r)} \alpha_k^{(l_r,\, i)} f_{ik}(\xi_1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m_r-1} \sum_{k=1}^{h(l_r)} \alpha_k^{(l_r,\, i)} f_{ik}(\xi_1) + \sum_{i=m_r}^{j(l_r)} \alpha_1^{(l_r,\, i)} \to 0 \ (r \to \infty),$$

и, следовательно, в силу (43)

$$\sum_{i=m_r}^{j(l_r)} \alpha_1^{(l_r,\, i)} \to 0 \quad (r \to \infty). \tag{44}$$

Так как $\alpha_k^{(l_r,\, i)} \geqslant 0$, то из формулы (32) следует, что

$$\sum_{i=1}^{m_r-1} \alpha_1^{(l_r,\, i)} \to 0 \ \text{ при } \ r \to \infty.$$

Отсюда и из формулы (44) получаем, что $\sum_{i=1}^{j(l_r)} \alpha_1^{(l_r,\, i)} \to 0$ при $r \to \infty$ и, следовательно, в силу (41)

$$\sum_{i=1}^{j(l_r)} \sum_{k=2}^{h(l_r)} \alpha_k^{(l_r,\, i)} \to 0 \ (r \to \infty).$$

Из последних двух формул видим, что

$$\sum_{i=1}^{j(l_r)} \sum_{k=1}^{h(l_r)} \alpha_k^{(l_r,\, i)} \to 0 \quad (r \to \infty).$$

Но это противоречит равенству (19), в силу которого $\sum_{i=1}^{j(l_r)} \sum_{k=1}^{h(l_r)} \alpha_k^{(l_r,\, i)} = 1$. Таким образом, предположение о справедливости условия (12) неверно, так как приводит к противоречию. Следовательно, ни одна матрица класса $T(1)$ не суммирует последовательность $\{x_n\}$ к нулю. Отсюда и из формулы (11) заключаем, что пример построен.

Московский станкоинструментальный институт

Поступило 9.II.1979

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Холщевникова Н. Н., Пределы неопределенностей регулярных преобразований в линейных топологических пространствах, Докл. АН СССР, 225, № 5 (1975), 1027—1030.
[2] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, М., Физматгиз, 1960.