Доклады Академии наук СССР
1958. Том 122, № 3

МАТЕМАТИКА

А. М. ПОЛОСУЕВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 22 V 1958)

В настоящей статье методом Н. М. Коробова обобщаются многомерные задачи равномерного распределения систем функций, являющихся произведением показательной функции на многочлен, которые рассмотрены им в работе ([1]). В основе доказательства сформулированной ниже теоремы лежит лемма, являющаяся аналогом основной леммы работы ([1]).

Пусть даны s конечноразностных уравнений:

$$\psi_\nu(x) = a_1^{(\nu)}\psi_\nu(x-1) + \ldots + a_{n_\nu}^{(\nu)}\psi_\nu(x-n_\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots, s, \tag{1}$$

с целыми коэффициентами; $a_{n_\nu}^{(\nu)} \neq 0$, $n_\nu \geqslant 1$ для каждого ν. Выберем s простых чисел $p_1 < p_2 < \ldots < p_s$ таких, что

$$p_1 > \max_{1 \leqslant \nu \leqslant s} |a_{n_\nu}^{(\nu)}|.$$

Зададим начальные данные функции $\psi_\nu(x)$, положив $\psi_\nu(j) = \delta_j^{(\nu)}$, где $\delta_j^{(\nu)}$ — целое число и $0 \leqslant \delta_j^{(\nu)} \leqslant p_\nu - 1$, $j = 1, 2, \ldots, n_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, s$, причем хотя бы одно из чисел $\delta_1^{(\nu)}, \ldots, \delta_{n_\nu}^{(\nu)}$ отлично от нуля для каждого ν. Обозначим через $\lambda_{\nu 1}, \ldots, \lambda_{\nu n_\nu}$ корни характеристического уравнения

$$\lambda^{n_\nu} = a_1^{(\nu)}\lambda^{n_\nu - 1} + \ldots + a_{n_\nu}^{(\nu)}$$

конечноразностного уравнения (1).

Будем предполагать, что для каждого ν корни $\lambda_{\nu 1}, \lambda_{\nu 2}, \ldots, \lambda_{\nu n_\nu}$ различны и что для величин $\lambda_\nu = \lambda_{\nu 1}$ и $\theta_\nu = \max\limits_{2 \leqslant j \leqslant n_\nu} |\lambda_{\nu j}|$ выполняются неравенства

$$\lambda_\nu > 1, \ \theta_\nu < 1 \quad \text{при } \nu = 1, 2, \ldots, s.$$

Таким образом, при $n_\nu = 1$ λ_ν — целое число; при $n_\nu \geqslant 2$ λ_ν — число Пизо.

Введем следующие обозначения:

1) τ_ν — любое целое число, удовлетворяющее условиям

$$\psi_\nu(x + \tau_\nu) \equiv \psi_\nu(x) \pmod{p_\nu}, \quad \tau_\nu \equiv 0 \pmod{p_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, s.$$

(Такое τ_ν всегда можно найти согласно лемме 1 работы ([1]).)

2) $f_\nu(x) = b_0^{(\nu)} + b_1^{(\nu)}x + \ldots + b_{k_\nu}^{(\nu)}x^{k_\nu}$ — целочисленный многочлен степени k_ν, не равный тождественно нулю по $\bmod\, p_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, s$.

Согласно лемме 2 работы ([1]) выберем начальные значения функции $\psi_\nu(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots, s$, так, чтобы сравнение

$$\psi_\nu(z) \equiv 0 \pmod{p_\nu}, \quad z = 1, 2, \ldots, \tau_\nu,$$

имело не более τ_ν / p_ν решений.

При таких соглашениях и обозначениях справедлива следующая лемма.

Лемма. *При любых целых $a \geqslant 0$, $r \geqslant 1$ имеет место оценка*

$$\sum_{x=1}^{rp_1\ldots p_s\tau_1\ldots\tau_s} \exp 2\pi i \sum_{\nu=1}^{s} \frac{\psi_\nu(x) f_\nu(a+x)}{p_\nu(\lambda_\nu^{\tau_1\ldots\tau_s} - 1)} =$$
$$= O(rp_1\ldots p_{s-1}\tau_1\ldots\tau_s + rp_1\ldots p_s \ln(a + r\tau_1\ldots\tau_s)),$$

где входящая в символ O постоянная зависит от величин $a_1^{(1)}, \ldots, a_{n_s}^{(s)}$, $b_0^{(1)}, \ldots, b_{k_s}^{(s)}, n_1, \ldots, n_s, s$.

Пусть теперь дана бесконечная последовательность простых чисел $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$, рост которых ограничен требованием

$$p_{\nu+1} = O(p_\nu).$$

Обозначим через $\tau_{j1} < \tau_{j2} < \ldots$ положительные целые числа, удовлетворяющие условиям:

$$\psi_{j\nu}(x + \tau_{j\nu}) \equiv \psi_{j\nu}(x) \pmod{p_\nu}, \quad \tau_{j\nu} \equiv 0 \pmod{p_\nu},$$
$$j = 1, 2, \ldots, s, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

где $\psi_{j\nu}(x)$ — решение конечноразностного уравнения

$$\psi(x) = a_1^{(j)}\psi(x-1) + \ldots + a_{n_j}^{(j)}\psi(x - n_j), \quad n_j \geqslant 1, \; p_1 > \max_{1 \leqslant j \leqslant s} |a_{n_j}^{(j)}|,$$

обладающего тем свойством, что число решений сравнения

$$\psi_{j\nu}(z) \equiv 0 \pmod{p_\nu}, \quad z = 1, 2, \ldots, \tau_{j\nu},$$

не превосходит $\tau_{j\nu} / p_\nu$.

Потребуем, кроме того, чтобы имела место оценка

$$\ln(\tau_{1(\nu+1)}, \ldots \tau_{s(\nu+s)}) = o(\tau_{1\nu}\ldots\tau_{s(\nu+s-1)}).$$

Пусть, далее, $t_1 < t_2 < \ldots$ — произвольные целые числа такие, что

$$t_\nu \geqslant \tau_{1(\nu+1)}\ldots\tau_{s(\nu+s)}, \quad \ln t_\nu = O(\ln(\tau_{1(\nu+1)}\ldots\tau_{s(\nu+s)}));$$

целые $n_1, n_2, \ldots$ определены соотношением

$$n_{\nu+1} = n_\nu + t_\nu p_\nu \ldots p_{\nu+s-1}\tau_{1\nu}\ldots\tau_{s(\nu+s-1)}, \quad n_1 = 0;$$

$\varphi(\nu) = o(p_\nu)$ — любая целочисленная функция, отличная от нуля при достаточно больших значениях аргумента.

Считаем, что $\lambda_{j1}, \ldots, \lambda_{jn_j}$ — корни характеристического уравнения

$$\lambda^{n_j} = a_1^{(j)}\lambda^{n_j-1} + \ldots + a_{n_j}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, s,$$

что все они различны и

$$\lambda_j = \lambda_{j1} > 1, \quad \theta_j = \max_{1 \leqslant k \leqslant n_j} |\lambda_{jk}| < 1.$$

Как и в работе ([1]), легко видеть, что

$$\psi_{j\,(\nu+j-1)}(x) = \gamma_{j\,(\nu+j-1)} \lambda_j^x + O\left(p_{\nu+j-1}\,\theta_j^x\right), \quad \gamma_{j(\nu+j-1)} = O\left(p_{\nu+j-1}\right),$$
$$j = 1, 2, \ldots, s, \ \nu = 1, 2, \ldots$$

Определим числа α_j рядом

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi(i)\,\gamma_{j\,(\nu+j-1)}}{p_{i+j-1}\left(\lambda_j^{\tau_{1i}\cdots\tau_{s\,(i+s-1)}} - 1\right)} \left(\frac{1}{\lambda_j^{n_i}} - \frac{1}{\lambda_j^{n_i+1}}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, s.$$

Теорема. *Пусть $f_1(x), \ldots, f_s(x)$ — целочисленные многочлены, неравные тождественно нулю. Тогда система функций*

$$\alpha_1 \lambda_1^x f_1(x), \ldots, \alpha_s \lambda_s^x f_s(x)$$

равномерно распределена в s-мерном пространстве.

Московский
энергетический институт

Поступило
19 V 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. М. Коробов, Изв. АН СССР, сер. матем.. 17, № 5 (1953).