С. Е. Козлов, Геометрия вещественных грассмановых многообразий. Часть III, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1997, том 246, 108–129

С. Е. Козлов

ГЕОМЕТРИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГРАССМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ. ЧАСТЬ III

Часть III. Экспоненциальное отображение грассманова многообразия в плюккеровой модели и его свойства

Большинство результатов настоящей работы основаны на каноническом представлении (7) п. 11.3 элемента $(\omega, X) \in TG^+_{p,n}$ касательного расслоения грассманова многообразия $G^+_{p,n}$. Это представление позволяет явно выписать параметрическое уравнение произвольной геодезической и определить понятие стационарных углов между ориентированными плоскостями. Для установления степени произвола в разложении (7) п. 11.3 построено каноническое изометрическое вложение касательного пространства $T_\omega G^+_{p,n}$ в пространство бивекторов $\Lambda_2(\mathbb{R}^n)$. Используя развитую технику, удалось выяснить строение замыкания произвольной геодезической в многообразиях $G_{p,n}$ и $G^+_{p,n}$.

§11. Каноническое представление касательного вектора $X \in T_\omega G^+_{p,n}$

11.1. Будем использовать обозначения, введенные в [1]. Рассмотрим элемент $(\omega, X) \in TG^+_{p,n}$ касательного расслоения грассманова многообразия $G^+_{p,n} \subset \Lambda_p(\mathbb{R}^n)$. Ортонормированным базисом $e = \{e_i\}_{i=1}^p$ и $n = \{n_\alpha\}_{\alpha=1}^q$ $(q = n - p)$ пространств V_ω и $V_\omega^\perp$ сопоставляется ортонормированный базис $\{\eta_{i\alpha}\}$ (см. [1], 6.2)

$$\eta_{i\alpha} = e_1 \wedge \ldots \wedge n_\alpha \wedge \ldots \wedge e_p = n_\alpha \wedge (\omega \llcorner e_i) \qquad (1)$$

касательного пространства $T_\omega G^+_{p,n}$. Из (1) следует, что любой вектор $X \in T_\omega G^+_{p,n}$ можно представить в виде

$$X = m_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_p + \ldots + e_1 \wedge \ldots \wedge e_{p-1} \wedge m_p, \quad m_i \in V_\omega^\perp. \qquad (2)$$

В сумме (2) вектора m_i не обязательно попарно ортогональны.

Теорема. *Пусть $\omega \in G^+_{p,n}$ и $X \in T_\omega G^+_{p,n}$, $X \neq 0$. Тогда в пространстве V_ω существует такой ортонормированный базис e, а в $V_\omega^\perp$ –*

набор $m = \{m_i\}_{i=1}^r$, $1 \leqslant r \leqslant \min(p,q)$ *ненулевых, попарно ортогональных векторов, таких что*

$$\begin{aligned} &\omega = e_1 \wedge \ldots \wedge e_p, \\ &X = (m_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_r + \ldots + e_1 \wedge \ldots \wedge e_{r-1} \wedge m_r) \wedge (e_{r+1} \wedge \ldots \wedge e_p). \end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим множество тех ортонормированных базисов пространства V_ω, для которых в (2) будет минимальным количество ненулевых слагаемых. Среди таких базисов выберем тот, для которого минимально произведение $|m_1|\ldots|m_r|$. По соображениям компактности такой базис найдется. Если $r = 1$, то утверждение теоремы тривиально. Пусть $r \geqslant 2$. Посмотрим как меняется разложение (2) при повороте пары (e_1, e_2) на угол φ.

$$e_1 = \tilde e_1 \cos\varphi + \tilde e_2 \sin\varphi, \quad e_2 = -\tilde e_1 \cos\varphi + \tilde e_2 \sin\varphi, \quad e_1 \wedge e_2 = \tilde e_1 \wedge \tilde e_2,$$
$$m_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge m_2 = (m_1 \cos\varphi - m_2 \sin\varphi) \wedge \tilde e_2 + \tilde e_1 \wedge (m_1 \sin\varphi + m_2 \cos\varphi).$$

Значит $\tilde m_1 = m_1 \cos\varphi - m_2 \sin\varphi$, $\tilde m_2 = m_1 \sin\varphi + m_2 \cos\varphi$ и $\tilde m_i = m_i$ при $i > 2$. Отсюда $\tilde m_1 \wedge \tilde m_2 = m_1 \wedge m_2$. Так как $|m_1 \wedge m_2|^2 = |m_1|^2|m_2|^2 - \langle m_1, m_2\rangle^2$, то минимуму $|m_1|\cdot|m_2|$ соответствует минимум $|\langle m_1, m_2\rangle|$. Но

$$\langle \tilde m_1, \tilde m_2\rangle = \langle m_1, m_2\rangle \cos(2\varphi) + \frac{1}{2}(|m_1|^2 - |m_2|^2)\sin(2\varphi).$$

Значит в точке минимума произведения $|m_1|\cdot|m_2|$ векторы m_1 и m_2 ортогональны. Аналогично рассматриваются другие пары (m_i, m_j). •

11.2. Утверждение. *В условиях Теоремы* 11.1 *справедливо равенство*

$$\operatorname{Ann} X = \operatorname{Lin}(e_{r+1}, \ldots, e_p). \tag{4}$$

Доказательство. Ясно, что правая часть (4) включена в левую. Пусть вектор $e \in \operatorname{Ann} X$. Дополним набор векторов m до ортогонального базиса $\{m_i\}_{i=1}^q$ пространства $V_\omega^\perp$. Вектор e представим в виде

$$e = \sum_{i=1}^r \lambda^i e_i + \sum_{j=r+1}^p \mu^j e_j + \sum_{k=1}^q \nu^k m_k.$$

Тогда

$$0 = X \wedge e = \sum_{i=1}^{r} \lambda^i (X \wedge e_i) + \sum_{k=1}^{q} \nu^k (X \wedge m_k).$$

В последнем равенстве набор векторов $X \wedge e_i$, $X \wedge m_k$ линейно независим, поэтому $\lambda^i = \nu^k = 0$ и $e \in \operatorname{Lin}(e_{r+1}, \dots, e_p)$. •

Пусть

$$\tilde{X} := m_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_r + \ldots + e_1 \wedge \ldots \wedge e_{r-1} \wedge m_r, \quad X_0 := e_{r+1} \wedge \ldots \wedge e_p.$$

Тогда (3) примет вид

$$X = \tilde{X} \wedge X_0, \quad V_{X_0} = \operatorname{Ann} X. \tag{5}$$

Из теоремы [1], 3.8 следует, что поливекторы $\tilde{X}$ и X_0 в (5) определяются по касательному вектору X с точностью до знака. Кроме того

$$\operatorname{Ann} \tilde{X} = 0.$$

11.3. Введем обозначения

$$\begin{gathered} \lambda^i := |m_i|, \quad n_i := m_i/\lambda^i, \quad i \in [1, r], \\ e_i(s) := e_i \cos s + n_i \sin s, \quad n_i(s) := -e_i \sin s + n_i \cos s. \end{gathered} \tag{6}$$

Разложение (2) примет вид

$$X = \tilde{X} \wedge X_0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda^i n_i \wedge (\omega \llcorner e_i). \tag{7}$$

Рассмотрим кривую

$$\omega(t) = e_1(\lambda^1 t) \wedge \ldots \wedge e_r(\lambda^r t) \wedge X_0. \tag{8}$$

Теорема. *Кривая $\omega(t)$ является нормальной геодезической в многообразии $G^+_{p,n}$ и*

$$\exp_\omega X = \omega(1). \tag{9}$$

Доказательство. Для любого $t \in \mathbb{R}$ набор векторов $\{e_i(\lambda^i t), n_i(\lambda^i t)\}_{i=1}^r$ ортонормирован. Справедливы равенства

$$e_i'(\lambda^i t) = \lambda^i n_i(\lambda^i t), \quad n_i'(\lambda^i t) = -\lambda^i e_i(\lambda^i t).$$

$$X(t) := \omega'(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda^i n_i(\lambda^i t) \wedge (\omega(t) \llcorner e_i(\lambda^i t)). \tag{10}$$

$$\omega(0) = \omega, \quad \omega'(0) = X, \quad |X(t)| = \left[\sum_{i=1}^{r} (\lambda^i)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Из (11) следует, что параметр t на кривой $\omega(t)$ пропорционален натуральному. Дифференцируя (10), находим

$$\omega''(t) = -|X|^2\omega(t) + \xi(t),$$

где вектор $\xi(t)$ является суммой слагаемых типа (10), в которых вместо какого-нибудь сомножителя e_j стоит n_j. Но такие векторы, как и $\omega(t)$, ортогональны к касательной плоскости $T_{\omega(t)}G^+_{p,n}$, поэтому $\omega(t)$ – геодезическая. Отсюда, с учетом (11), вытекает (9). $\bullet$

11.4. Из (7) следует, что

$$V_{\tilde{X}} = \mathrm{Lin}\,(e_i, n_i), \quad i \in [1, r].$$

Отображение

$$\zeta : \Lambda_r(V_{\tilde{X}}) \to \Lambda_p(\mathbb{R}^n), \quad \tau \mapsto \tau \wedge X_0$$

является изометрическим эндоморфизмом, переводящим простые r-векторы в простые p-векторы. Поэтому возникает индуцированное отображение

$$\zeta : G^+_{r,2r} \to G^+_{p,n},$$

которое по теореме 11.3 будет изометрическим вполне геодезическим вложением. Следовательно, геодезические $\omega(t)$ и

$$\zeta^{-1}(\omega(t)) = e_1(\lambda^1 t) \wedge \ldots \wedge e_r(\lambda^r t) \subset G^+_{r,2r}(V_{\tilde{X}})$$

изометричны как подмножества одного евклидова пространства $\Lambda(\mathbb{R}^n)$.

§12. Стационарные углы между плоскостями многообразий $G_{p,n}$ и $G^+_{p,n}$

12.1. Стационарные углы между неориентированными плоскостями вводились разными способами (см., напр., [2], I, [3], 3). Мы воспользуемся их определением, данным в [3].

Напомним, что в [1], 6.3 были отождествлены многообразие $G^+_{p,n}$ ориентированных p-мерных подпространств $\mathbb{R}^n$ с плюккеровой моделью этого многообразия $P(G^+_{p,n})$. Отождествим грассманово многообразие $G_{p,n}$ неориентированных p-плоскостей с фактор-пространством многообразия $G^+_{p,n}$ по диаметрально противоположным точкам. Тогда отображение проекции

$$\sigma : G^+_{p,n} \to G_{p,n} \tag{1}$$

является двухлистным изометрическим накрытием. В многообразии $G_{p,n}$ рассмотрим две точки $\tilde{\omega} = (\pm\omega)$ и $\tilde{\tau} = (\pm\tau)$. Построим нормальную кратчайшую $\tilde{\omega}(t)$, $t \in [0,1]$, соединяющую точки $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\tau}$. Обозначим $\omega(t)$ накрывающий кратчайшую $\tilde{\omega}(t)$ путь с началом в ω. Пусть $\omega(1) = \tau$. Тогда путь $\omega(t)$ есть кратчайшая, соединяющая точки ω и τ в $G^+_{p,n}$. Для вектора $X = \omega'(0)$ имеет место разложение (7) п. 11.3, откуда $\tau = \exp_\omega X$ и

$$\rho_0(\tilde{\omega}, \tilde{\tau}) = |X| = \left[\sum_{i=1}^{r} (\lambda^i)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Здесь через ρ_0 обозначена функция расстояния в многообразии $G_{p,n}$.

Теорема. *Коэффициенты λ^i в формуле (2) удовлетворяют неравенству*

$$0 < \lambda^i \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Доказательство. Построим набор углов $\{\tilde{\lambda}^i\}$, удовлетворяющий условиям

$$\lambda^i - \tilde{\lambda}^i = 0 \pmod{\pi}, \quad |\tilde{\lambda}^i| \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad |\tilde{\lambda}^i| \leqslant \lambda^i. \tag{4}$$

Рассмотрим геодезическую $\Gamma(t)$ в многообразии $G^+_{p,n}$

$$\Gamma(t) := e_1(\tilde{\lambda}^1 t) \wedge \ldots \wedge e_r(\tilde{\lambda}^r t) \wedge X_0.$$

Из (4) следует, что геодезическая $\sigma(\Gamma(t))$ соединяет точки $\tilde{\omega}$ с $\tilde{\tau}$ в $G_{p,n}$. Причем

$$L(\sigma(\Gamma(t))) = \left[\sum_{i=1}^{r} (\tilde{\lambda}^i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{r} (\lambda^i)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \rho_0(\tilde{\omega}, \tilde{\tau}). \tag{5}$$

Значит в (5) имеет место знак равенства и (3) следует из (4). •

12.2. Обозначим A_ω и $A_{\omega(t)}$ операторы ортогонального проектирования на плоскости ω и $\omega(t)$ при $t \in [0,1]$. В [3] под стационарными углами между плоскостями V_ω и $V_{\omega(t)}$ понимались углы между соответствующими собственными направлениями операторов $A_\omega \circ A_{\omega(t)}$ и $A_{\omega(t)} \circ A_\omega$ двойного проектирования. Эти операторы самосопряжены (см. [3]), что, впрочем, следует из приводимых ниже выкладок.

Теорема. *В обозначениях п.* 12.1 *вектор* e_i *является собственным вектором оператора* $A_\omega \circ A_{\omega(t)}$ *с собственным числом* $\cos^2(\lambda^i t)$.

Доказательство. Из (8) п. 11.3 следует

$$\tilde{\omega} = \operatorname{Lin}\{e_i, V_{X_0}\}_{i=1}^r, \quad \tilde{\omega}(t) = \operatorname{Lin}\{e_i((\lambda^i t)), V_{X_0}\}_{i=1}^r.$$

Каждый вектор плоскости $\tilde{\omega} \cap \tilde{\tau} = V_{X_0}$ есть собственный вектор оператора $A_\omega \circ A_{\omega(t)}$ с собственным числом 1. Согласно (6) п. 11.3 при $i \leqslant r$ будет

$$\begin{aligned} A_{\omega(t)}(e_i) &= e_i - \sum_{j=1}^r \langle e_i, n_j(\lambda^j t)\rangle n_j(\lambda^j t) = \\ &= e_i + n_i((\lambda^i t))\sin((\lambda^i t)) := f_i, \end{aligned} \tag{6}$$

$$(A_\omega \circ A_{\omega(t)})(e_i) = f_i - \sum_{j=1}^r \langle f_i, n_j\rangle n_j = e_i \cos^2((\lambda^i t)).\square$$

Проведя аналогичные выкладки для оператора $A_{\omega(t)} \circ A_\omega$, получим

$$(A_{\omega(t)} \circ A_\omega)(e_i((\lambda^i t))) = e_i((\lambda^i t))\cos^2((\lambda^i t)). \tag{7}$$

По теореме 12.1 $\lambda^i \leqslant \frac{\pi}{2}$, поэтому угол $(\lambda^i t)$ $(t \in [0,1])$ совпадает со стационарным углом между плоскостями V_ω и $V_{\omega(t)}$, соответствующим общему собственному числу $\cos^2((\lambda^i t))$ операторов $A_\omega \circ A_{\omega(t)}$ и $A_{\omega(t)} \circ A_\omega$. Причем кратность этого собственого числа равна количеству слагаемых в разложении (7) п. 11.3, с общим коэффициентом λ^i. Возможно изменив нумерацию, получим упорядоченный набор коэффициентов

$$0 < \lambda^1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda^r \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{8}$$

совпадающий с набором ненулевых стационарных углов между плоскостями $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\tau}$. Отсюда следует

Утверждение. *Набор (8) не зависит от выбора кратчайшей соединяющей точки $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\tau}$.*

Пусть
$$r_0 := \min\{p, q = n - p\}. \tag{9}$$
Рассмотрим три попарно ортогональные плоскости $\omega_1^{r_0}, \omega_2^{r_0}, \omega_3^{p-r_0}$ с соответствующими размерностями. Определим плоскости
$$\tilde{\omega} := \operatorname{Lin}(\omega_1^{r_0}, \omega_3^{p-r_0}), \quad \tilde{\tau} := \operatorname{Lin}(\omega_2^{r_0}, \omega_3^{p-r_0}). \tag{10}$$
Между этими плоскостями будет r_0 ненулевых стационарных углов, каждый из которых равен $\frac{\pi}{2}$. Из (2) находим, что $\rho_0(\tilde{\omega}, \tilde{\tau}) = \sqrt{r_0}\,\frac{\pi}{2}$, откуда, с учетом (8), получаем формулу
$$\operatorname{diam} G_{p,n} = \sqrt{r_0}\,\frac{\pi}{2}. \tag{11}$$

12.3. Пусть $\omega, \tau \in G^+_{p,n}$. Рассмотрим нормальную кратчайшую $\omega(t)$, $t \in [0,1]$, соединяющую ω с τ. Для вектора $X := \omega'(0)$ справедливо разложение (7) п. 11.3, откуда
$$\rho(\omega, \tau) = L(\omega(t)) = \left[\sum_{i=1}^{r} (\lambda^i)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{12}$$
где через ρ обозначена функция расстояния в многообразии $G^+_{p,n}$. Если бы в наборе $\{\lambda^i\}$ нашелся элемент $\lambda^k > \pi$ или два элемента λ^k, λ^m, $k \neq m$, для которых $\lambda^k + \lambda^m > \pi$, то воспользовавшись тем же приемом, что и в доказательстве теоремы 12.2 можно было бы укоротить и кратчайшую $\omega(t)$, соединяющую точки ω с τ. Следовательно, при необходимости изменив нумерацию, можно так упорядочить коэффициенты λ^i, что
$$0 < \lambda^1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda^r \leqslant \pi, \quad \lambda^{r-1} + \lambda^r \leqslant \pi. \tag{13}$$

Набор (13) чисел $\{\lambda^i\}$, дополненый $(p - r)$ нулями, назовем *стационарными углами* между ориентированными плоскостями ω и τ.

12.4. Наборы стационарных углов (13) между плоскостями ω, τ и (8) между $\sigma(\omega) = \tilde{\omega}$ и $\sigma(\tau) = \tilde{\tau}$, вообще говоря, могут не совпадать. Обозначим
$$\mu := \min\{\lambda^r, \pi - \lambda^r\}. \tag{14}$$
Из (13), (14) вытекает, что $\lambda^{r-1} \leqslant \mu \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Теорема. *Набор*

$$0 < \lambda^1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda^{r-1} \leqslant \mu \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{15}$$

задает ненулевые стационарные углы между неориентированными плоскостями $\sigma(\omega)$ *и* $\sigma(\tau)$.

Доказательство. Пусть $\bar{n}_r := n_r$ при $\lambda^r \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\bar{n}_r := -n_r$ при $\lambda^r > \frac{\pi}{2}$, $\bar{e}_r(s) := e_r \cos s + \bar{n}_r \sin s$. Рассмотрим геодезическую $\bar{\omega}(t) := e_1(\lambda^1 r) \wedge \ldots \wedge e_{r-1}(\lambda^{r-1} t) \wedge \bar{e}_r(\mu t)$. Из п. 12.2 следует, что набор (15) является набором стационарных углов между плоскостями $\tilde{\omega} = \sigma(\bar{\omega}(0))$ и $\sigma(\bar{\omega}(1))$. По определению геодезической $\bar{\omega}(t)$ справедливы равенства $\bar{\omega}(1) = \pm\omega(1) = \pm\tau$, которые влекут утверждение теоремы. •

Из (6), (8) п. 11.3 получаем

$$\langle \omega, \tau \rangle = \langle \omega, \omega(1) \rangle = \cos \lambda^1 \cdots \cos \lambda^k. \tag{16}$$

В силу (14), (16) будет

$$\mu = \begin{cases} \lambda^r, \ \langle \omega, \tau \rangle \geqslant 0, \\ \pi - \lambda^r, \ \langle \omega, \tau \rangle < 0. \end{cases} \tag{17}$$

Формулы (2) п. 12.1 и (12) позволяют выразить расстояние $\rho(\omega, \tau)$ через $\rho_0(\sigma(\omega), \sigma(\tau))$ и наибольший стационарный угол μ

$$\rho^2(\omega, \tau) = \begin{cases} \rho_0^2(\sigma(\omega), \sigma(\tau)) & \text{при } \langle \omega, \tau \rangle \geqslant 0, \\ \rho_0^2(\sigma(\omega), \sigma(\tau)) + \pi(\pi - 2\mu) & \text{при } \langle \omega, \tau \rangle < 0. \end{cases} \tag{18}$$

Из утверждения 12.2 и (14), (15) следует, что набор ненулевых стационарных углов (13) не зависит от выбора кратчайшей, соединяющей точки ω и τ.

12.5. Рассмотрим произвольную геодезическую в многообразии $G^+_{p,n}$. Можно считать, что в ее параметризации (8) п. 11.3 коэффициенты λ^i упорядочены

$$0 < \lambda^1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda^r, \quad \lambda^0 := 0.$$

Результаты предыдущих пунктов этого параграфа позволяют заключить, что верна

Теорема. 1) *Геодезическая* $\omega(t)$ *на отрезке* $[0, t_0]$, $t_0 := \pi/(\lambda^{r-1}+\lambda^r)$ *является кратчайшей, соединяющей точки* $\omega(0)$ *с* $\omega(t_0)$ *в многообразии* $G^+_{p,n}$.

2) *Геодезическая* $\tilde{\omega}(t) := \sigma(\omega(t))$ *на отрезке* $[0, \tilde{t}_0]$, $\tilde{t}_0 = \pi/(2\lambda^r)$ *является кратчайшей, соединяющей точки* $\tilde{\omega}(0)$ *с* $\tilde{\omega}(\tilde{t}_0)$ *в многообразии* $G_{p,n}$.

В римановом многообразии две различные геодезические равной длины, соединяющие какие-либо две точки, не могут оставаться кратчайшими при их продолжении. Поэтому теорема 12.5 влечет

Следствие. *Геодезическая* $\omega(t)$ $(\tilde{\omega}(t))$ *является единственной кратчайшей, соединяющей точки* $\omega(0)$ *с* $\omega(t_1)$ $(\tilde{\omega}(0)$ *с* $\tilde{\omega}(\tilde{t}_1))$ *при* $t_1 < t_0$ $(\tilde{t}_1 < \tilde{t}_0)$ *в многообразии* $G^+_{p,n}$ $(G_{p,n})$ *(ср. с* [4], *Т. 9(a)).*

12.6. Теорема. *Справедливо равенство*

$$\operatorname{diam} G^+_{p,n} = \max\left\{\pi, \sqrt{r_0}\frac{\pi}{2}\right\}. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть $\omega, \tau \in G^+_{p,n}$. Из (12), (14), (15) следует

$$\rho^2(\omega, \tau) \leqslant \max_{\mu \in [0, \frac{\pi}{2}]} \{(r-1)\mu^2 + (\pi-\mu)^2\} = \max\left\{\pi^2, r\frac{\pi^2}{4}\right\}.$$

Длина кратчайшей, соединяющей плоскости (10), равна $\sqrt{r_0}\,\frac{\pi}{2}$ при любой ориентации этих плоскостей. Геодезическая

$$\omega_0(t) := (e_1\cos(\pi t) + n_1\sin(\pi t)) \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_p, \quad t \in [0, 1]$$

соединяет точки ω с $(-\omega)$. Так как многообразие $G^+_{p,n}$ лежит в единичной сфере евклидова пространства $\Lambda_p(\mathbb{R}^n)$, то геодезическая $\omega_0(t)$ длины π является кратчайшей. •

Сравнивая формулы (11) и (20), заметим, что

$$\begin{aligned} r_0 < 4 &\Longrightarrow \operatorname{diam} G_{p,n} < \operatorname{diam} G^+_{p,n} = \pi, \\ r_0 \geqslant 4 &\Longrightarrow G_{p,n} = \operatorname{diam} G^+_{p,n} = \sqrt{r_0}\,\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{20}$$

§13. Замкнутые геодезические и радиус инъективности в многообразиях $G^+_{p,n}$ и $G_{p,n}$

13.1. Утверждение. *Для геодезической в многообразии $G^+_{p,n}$ с параметризацией* (8) *п.* 11.3 *справедлива эквивалентность*

$$\omega(t_1)=\omega(t_2) \Longleftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}^r : \lambda^i(t_2-t_1)=\pi k^i, \quad \sum_{i=1}^{r} k^i = 0 \pmod 2. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\omega(t_1)=\omega(t_2)$. Тогда

$$1=\langle\omega(t_1),\omega(t_2)\rangle=\langle e_1(\lambda^1 t_1),e_1(\lambda^1 t_2\rangle\cdots\langle e_r(\lambda^r t_1),e_r(\lambda^r t_2)\rangle.$$

Поэтому $e_i(\lambda^i t_1)=\pm e_i(\lambda^i t_2)$, откуда следует импликация слева направо. Обратная импликация непосредственно следует из (8) п. 11.3. •

Из (1) и (10) п. 11.3 вытекает, что всякая геодезическая петля в многообразии $G^+_{p,n}$ является замкнутой геодезической.

Рассмотрим замкнутую геодезическую

$$\omega(t)=\exp_\omega(tX), \quad t\in[0,1], \quad \omega(0)=\omega(1).$$

Используя условие (1), найдем ее длину

$$L(\omega)=|X|=\left[\sum_{i=1}^{r}(\lambda^i)^2\right]^{\frac12}=\pi\left[\sum_{i=1}^{r}(k^i)^2\right]^{\frac12}. \tag{2}$$

Обозначим S длину самой короткой нетривиальной замкнутой геодезической. Из (1), (2) следует

$$S(G^+_{p,n}|=\begin{cases}2\pi, & r_0=1,\\ \sqrt{2}\pi, & r_0>1.\end{cases} \tag{3}$$

(Ясно, что замкнутые геодезические такой длины существуют.) Пусть r_c – минимальное из расстояний между парами сопряженных точек вдоль всевозможных геодезических. Известно (см. [5], Т. 3), что секционная кривизна многообразий $G^+_{p,n}$ и $G_{p,n}$ изменяется в пределах от нуля до двух. При $r_0=1$ эти многообразия изометричны единичной сфере и вещественному проективному пространству соответственно. Эти многообразия имеют постоянную единичную секционную кривизну. Согласно [6], 22.1.4 в многообразиях $G^+_{p,n}$ и $G_{p,n}$ для r_c справедлива оценка

$$r_c\geqslant\pi, \quad r_0=1 \quad \text{и} \quad r_c\geqslant\pi/\sqrt{2}, \quad r_0>1. \tag{4}$$

По теореме Клингенберга (см. [6], 24.1.6) в замкнутых римановых многообразиях M радиус инъективности $r_i(M)$ можно вычислить по формуле

$$r_i(M) = \min\left\{r_c, \frac{1}{2}S\right\}. \tag{5}$$

Из (3)–(5) следует

$$r_i(G^+_{p,n}) = \begin{cases} \pi, & r_0 = 1, \\ \pi/\sqrt{2}, & r_0 > 1. \end{cases} \tag{6}$$

13.2. Рассмотрим геодезическую петлю $\tilde{\omega}(t)$, $\tilde{\omega}(0) = \tilde{\omega}(1)$ в многообразии $G_{p,n}$. Построим накрывающий эту петлю геодезический путь $\omega(t) \subset G^+_{p,n}$ с началом в точке $\omega \in \sigma^{-1}(\tilde{\omega}(0))$. Возможны два варианта а) $\omega(1) = \omega$, б) $\omega(1) = -\omega$. В случае а) согласно п.13.1 петля $\tilde{\omega}(t) = \sigma(\omega(t))$ является замкнутой геодезической. Пусть $\omega(1) = -\omega$. Отсюда, как и в утверждении 13.1, следует, что найдутся r целых чисел k^i, таких что

$$\lambda^i = \pi k^i, \quad \sum_{i=1}^{r} k^i = 1 \pmod 2. \tag{7}$$

Поэтому и в случае б) петля $\tilde{\omega}(t)$ является замкнутой геодезической. Из (3), (7) находим

$$S(G_{p,n}) = \pi. \tag{8}$$

(Очевидно, что замкнутые геодезические такой длины существуют.) Из (4), (5), (8) следует

$$r_i(G_{p,n}) = \frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

§14. Единственность канонического представления касательного вектора $X \in T_\omega G^+_{p,n}$

14.1. Вопрос о единственности разложения (7) п. 11.3 потребовал введения специального градуированного представления внешней алгебры $\Lambda(\mathbb{R}^n)$, связанного с фиксированным подпространством $W \subset \mathbb{R}^n$ (см. ниже). Далее будет построена некоторая линейная изометрия внешней алгебры, сохраняющая упомянутую градуировку, которая позволит свести вопрос о единственности канонического представления касательного вектора X к вопросу о единственности разложения произвольного бивектора пространства $\Lambda_2(\mathbb{R}^n)$, реализующего так называемую массу бивектора. В [1], 9.3 доказано, что для любого ненулевого бивектора $\xi \in \Lambda_2(\mathbb{R}^n)$ существует набор единичных попарно ортогональных векторов $\{e_i, \bar{e}_i\}_{i=1}^r$ пространства $\mathbb{R}^n$ и набор таких вещественных чисел $0 < \mu^1 \leqslant \ldots \leqslant \mu^r$, что

$$\xi = \sum_{i=1}^{r} \mu^i e_i \wedge \bar{e}_i. \tag{1}$$

Собирая бивекторы $e_i \wedge \bar{e}_i$, относящиеся к равным μ^i, перепишем (1) в виде

$$\xi = \mu^{i_1}\xi_{i_1} + \ldots + \mu^{i_l}\xi_{i_l}, \tag{2}$$

где $0 < \mu^{i_1} < \ldots < \mu^{i_l}$, $i_1 = 1$, $i_l = r$, $i_0 := 0$,

$$\xi_{i_m} = e_{(i_{m-1}+1)} \wedge \bar{e}_{(i_{m-1}+1)} + \ldots + e_{i_m} \wedge \bar{e}_{i_m}, \quad m \in [1, l].$$

Утверждение (см. [7]). *В равенстве (2) числа μ^{i_m} и бивекторы ξ_{i_m} однозначно определяются по бивектору ξ.*

14.2. Фиксируем некоторое подпространство $W \subset \mathbb{R}^n$, $\dim W = p$, $\dim W^{\perp} = n - p = q$. Для индексов $r \in [0, p]$, $s \in [0, q]$ определим линейное пространство

$$\Lambda_{r,s}(W) := \mathrm{Lin}\,\{\Lambda_r(W) \wedge \Lambda_s(W^{\perp})\} \subset \Lambda_{r+s}(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda(\mathbb{R}^n). \tag{3}$$

$\Lambda_{r,s} := 0$, если $r > p$ или $s > q$.

Если $\{e_i\}$, $\{n_j\}$ – ортонормированные базисы пространств W и $W^{\perp}$, то набор

$$\{e_\lambda \wedge n_\mu\}, \quad \lambda \in \Lambda(p, r), \quad \mu \in \Lambda(q, s) \tag{4}$$

образует ортонормированный базис пространства $\Lambda_{r,s}(W)$. Из (4) непосредственно следуют формулы

$$\Lambda_{r_1,s_1}(W) \wedge \Lambda_{r_2,s_2}(W) \subset \Lambda_{r_1+r_2,s_1+s_2}(W), \tag{5}$$

$$\Lambda_m(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{r+s=m} \Lambda_{r,s}(W), \quad \Lambda(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{r,s \geqslant 0} \Lambda_{r,s}(W). \tag{6}$$

14.3. Ориентируем пространство W и рассмотрим оператор Ходжа $*(w) : \Lambda(W) \to \Lambda(W)$ (см. [1], 4.1). Напомним, что оператор $*(w)$ ортогонален и отображение $*(w) : \Lambda_p(W) \to \Lambda_{n-p}(W)$ является изометрическим изоморфизмом.

Теорема. *Существует единственный линейный оператор* $*_w : \Lambda(\mathbb{R}^n) \to \Lambda(\mathbb{R}^n)$, *удовлетворяющий равенствам*

$$*_w(x \wedge y) = *(w)x \wedge y \tag{7}$$

для любых $x \in \Lambda(W)$, $y \in \Lambda(W^\perp)$. *Этот оператор является изометрией алгебры* $\Lambda(\mathbb{R}^n)$. *Его сужение на* $\Lambda_{r,s}(W)$ *осуществляет линейную изометрию пространств* $\Lambda_{r,s}(W)$ *и* $\Lambda_{p-r,s}(W)$.

Доказательство. 1). Выберем какой-нибудь базис алгебры $\Lambda(\mathbb{R}^n)$, состоящий из точек подмножество $\Lambda(W) \wedge \Lambda(W^\perp)$ (например, базис (4)). Образ каждого элемента этого базиса при действии оператора $*_w$ однозначно определяется требованием (7), откуда следует единственность этого оператора.

2) Оператор $*_w$ тассует слагаемые в ортогональной сумме (6), то есть $*_w(\Lambda_{r,s}(W)) \subset \Lambda_{p-r,s}(W)$. Поэтому достаточно показать, что отображение

$$*_w : \Lambda_{r,s}(W) \to \Lambda_{p-r,s}(W)$$

является изометрическим изоморфизмом. Определим линейный оператор $*_w$ его действием на элементы базиса (4)

$$*_w(e_\lambda \wedge n_\mu) = *(w)e_\lambda \wedge n_\mu.$$

В силу линейности оператора Ходжа $*_w$ и билинейности операции внешнего умножения для определенного в (8) оператора $*_w$ выполнены равенства (7). Пространства $\Lambda_{r,s}(W)$ и $\Lambda_{p-r,s}(W)$ имеют одинаковую размерность, поэтому равенства

$$\begin{aligned}\langle *_w(e_{\lambda_1} \wedge n_{\mu_1}), *_w(e_{\lambda_2} \wedge n_{\mu_2})\rangle &= \langle *(w)e_{\lambda_1} \wedge n_{\mu_1}, *(w)e_{\lambda_2} \wedge n_{\mu_2}\rangle = \\ &= \langle *(w)e_{\lambda_1}, *(w)e_{\lambda_2}\rangle\langle n_{\mu_1}, n_{\mu_2}\rangle = \delta_{\lambda_1\lambda_2}\delta_{\mu_1\mu_2}\end{aligned}$$

устанавливают, что оператор $*_w$ являются ортогональным изоморфизмом этих пространств. •

14.4. Из разложения (7) п. 11.3 следует, что касательная плоскость $T_\omega G^+_{p,n}$ совпадает с пространством $\Lambda_{p-1,1}(W)$, где $W = V_\omega$.

Поливектор ω задает на W ориентацию. Оператор $*_w$ переводит касательное пространство $T_\omega G^+_{p,n}$ в пространство бивекторов $\Lambda_2(\mathbb{R}^n)$.

$$*_w(X) = *_w \sum_{i=1}^{r} \lambda^i n_i \wedge (\omega \llcorner e_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda^i e_i \wedge n_i. \tag{8}$$

Аналогично (2) запишем разложение (7) п. 11.3 в виде

$$X = \lambda^{i_1} X_{i_1} + \ldots + \lambda^{i_l} X_{i_l}, \tag{9}$$

где $0 < \lambda^{i_1} < \ldots < \lambda^{i_l}$, $i_1 = 1$, $i_l = r$, $i_0 := 0$,

$$X_{i_m} = n_{(i_{m-1}+1)} \wedge (\omega \llcorner e_{(i_{m-1}+1)}) + \ldots + n_{i_m} \wedge (\omega \llcorner e_{i_m}), \quad m \in [1, l].$$

Теорема. *В разложении (9) для касательного вектора $X \in T_\omega G^+_{p,n}$ коэффициенты λ^{i_m} и p-векторы X_{i_m} однозначно определяются по p-вектору X.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы 14.3, утверждения 14.1 и формул (8), (9).

§15. Плоское, вполне геодезическое подмногообразие, содержащее данную геодезическую

15.1. В многообразии $G^+_{p,n}$ рассмотрим геодезическую $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Пусть $\gamma(0) = \omega = e_1 \wedge \ldots \wedge e_p$. Для вектора $\gamma'(0) = X$ рассмотрим разложение (7) п. 11.3

$$X = \sum_{i=1}^{r} [\lambda^i n_i \wedge (\omega \llcorner e_i)]. \tag{1}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \xi_i &:= n_i \wedge (\omega \llcorner e_i), \quad T_0 := \mathrm{Lin}\,\{\xi_i\}, \quad i \in [1, r], \\ \xi &:= (\xi_1, \ldots, \xi_r), \quad x = (x^1, \ldots, x^r) \in \mathbb{R}^r. \end{aligned} \tag{2}$$

Из теоремы 11.3 следует, что

$$\rho(x) := \exp_\omega(x\xi^T) = e_1(x^1) \wedge \ldots \wedge e_r(x^r) \wedge X_0, \quad x\xi^T \in T_0. \tag{3}$$

Утверждение. *Для точек* $x_1\xi^T$, $x_2\xi^T \in T_0$ *справедлива эквивалентность*

$$\rho(x_1)=\rho(x_2) \Longleftrightarrow (x_2-x_1)\in\pi\mathbb{Z}^r, \quad \sum_{i=1}^r (x_2^i - x_1^i) = 0 \pmod{2\pi}. \quad (4)$$

Доказательство. Пусть $\rho(x_1)=\rho(x_2)$. Тогда

$$1=\langle\rho(x_1),\rho(x_2)\rangle = \langle e_1(x_1^1), e_1(x_2^1)\rangle\cdots\langle e_r(x_1^r), e_r(x_2^r)\rangle. \qquad (5)$$

Значит $|\langle e_i(x_1^i), e_i(x_2^i)\rangle| = 1$. Из определения (6) п. 11.3 векторов $e_i(s)$ и (5) следует (4). $\bullet$

Теорема. 1) *Отображение* $\exp_\omega\big|_{T_0}$ *есть локально изометрическое погружение.*

2) *Множество*

$$\Phi_0 := \exp_\omega T_0 \qquad (6)$$

является вполне геодезическим подмногообразием многообразия $G^+_{p,n}$.

Доказательство. 1) Из (3) находим

$$\frac{\partial\rho}{\partial x^i}(x) = e_1(x^1)\wedge\ldots\wedge n_i(x^i)\wedge\ldots\wedge e_r(x^r)\wedge X_0, \quad \left\langle \frac{\partial\rho}{\partial x^i}, \frac{\partial\rho}{\partial x^j}\right\rangle = \delta_{ij},$$

откуда вытекает 1). Из 1), (4) следует, что множество Φ_0 является подмногообразием, а отображение

$$\exp_\omega : T_0 \to \Phi_0 \qquad (7)$$

– изометрическим накрытием.

2) В плоскости T_0 рассмотрим прямую $x(t)=x_0+at$. Тогда

$$\rho(x(t)) = \Big[\bigwedge_{i=1}^r e_i(x_0^i + a^i t)\Big]\wedge X_0 = \Big[\bigwedge_{i=1}^r \big((e_i\cos x_0^i + n_i \sin x_0^i)\cos a^i t +$$
$$+ (-e_i \sin x_0^i + n_i\cos x_0^i)\sin a^i t\big)\Big]\wedge X_0 = \exp_{\tilde\omega}(t\tilde X),$$

где

$$\tilde e_i = e_i\cos x_0^i + n_i\sin x_0^i, \quad \tilde n_i = -e_i\sin x_0^i + n_i\cos x_0^i,$$

$$\tilde\omega = \tilde e_1\wedge\ldots\wedge\tilde e_r\wedge X_0, \quad \tilde X = \sum_{i=1}^r a^i\tilde n_i\wedge(\tilde\omega\llcorner\tilde e_i). \quad \square$$

15.2. Разложение (1) для единичного касательного вектора X к геодезической γ однозначно определяет набор $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^r)$ из r ненулевых вещественных чисел. Обозначим $g(\lambda)$ абелеву группу по сложению, порожденную этими числами. Очевидно, $g(\lambda)$ является группой без кручения, поэтому ([8], X, §9) она обладает свободным базисом $\mu = (\mu^1, \dots, \mu^s)$, $s \leqslant r$. По определению строк λ, μ найдутся такие целочисленные матрицы a и b, что

$$\mu = \lambda a, \quad \lambda = \mu b. \tag{8}$$

Так как базис μ свободен, то из (8) следует

$$ba = E_s. \tag{9}$$

Заметим, что матрицы a и b могут быть получены как прямоугольные блоки квадратных матриц c и c^{-1}, для некоторой целочисленной унимодулярной $r \times r$ матрицы c (см. [9], 2.5).

Определим набор

$$f := \xi b^T \tag{10}$$

векторов $f = (f_1, \dots, f_s) \in T_0^s$. Так как матрица b есть блок унимодулярной квадратной матрицы, то набор векторов f линейно независим. Из (1), (2), (8), (10) следует

$$X = \lambda \xi^T = \mu b \xi^T = \mu(\xi b^T) = \mu f^T. \tag{11}$$

Положим

$$T_X := \operatorname{Lin} f, \quad \Phi_X := \exp_\omega T_X. \tag{12}$$

Из (11) вытекает, что $X \in T_X$, причем набор μ коэффициентов разложения вектора X по базису f пространства T_X рационально независим. По теореме и утверждению п. 15.1 множество Φ_X является плоским, вполне геодезическим подмногообразием многообразия $G_{p,n}^+$.

15.3. Для матрицы $b = (b_k^m)$; $k \in [1, s]$, $m \in [1, r]$ определим числа $\sigma_k = \{0, 1\}$ по правилу

$$\sigma_k = \sum_{m=1}^{r} b_k^m \pmod 2. \tag{13}$$

Пусть в (1) нумерация выбрана так, что

$$\sigma_k = 1 \text{ при } k \in [1, s_0], \quad \sigma_k = 0 \text{ при } k \in [s_0 + 1, s], \; s_0 \in [0, s]. \tag{14}$$

Каждую точку $x \in T_X$ можно представить в виде

$$x = uf^T, \quad u = (u^n, \dots, u^s) \in \mathbb{R}^s. \tag{15}$$

Утверждение. *Пусть* $x_1, x_2 \in T_X$. *Тогда*

$$\exp_\omega x_1 = \exp_\omega x_2 \Longleftrightarrow (u_2 - u_1) \in \pi\mathbb{Z}^s, \quad \sum_{k=1}^{s_0}(u_2^k - u_1^k) = 0 \,(\mathrm{mod}\ 2\pi). \tag{16}$$

Доказательство. Из (10), (15) следует

$$x_2 - x_1 = u_2 f^T - u_1 f^T = (u_2 - u_1) b\xi^T.$$

Пусть выполнено равенство в левой части (16). В силу (4) найдется такой набор $k = (k^1, \dots, k^r) \in \mathbb{Z}^r$, при котором

$$(u_2 - u_1)b = \pi k, \quad \sum_{m=1}^{r} k^m = 0 \,(\mathrm{mod}\ 2). \tag{17}$$

Из (9), (17) вытекает

$$u_2 - u_1 = \pi \cdot ka \in \pi\mathbb{Z}^s, \quad \pi k^m = \sum_{k=1}^{s}(u_2^k - u_1^k) b_k^m.$$

Откуда находим

$$0 = \left(\pi \sum_{m=1}^{r} k^m\right)(\mathrm{mod}\ 2\pi) = \sum_{k=1}^{s}\left[(u_2^k - u_1^k)\sum_{m=1}^{r} b_k^m\right](\mathrm{mod}\ 2\pi) =$$
$$= \sum_{k=1}^{s}[(u_2^k - u_1^k)\sigma_k]\,(\mathrm{mod}\ 2\pi)] = \left[\sum_{k=1}^{s_0}(u_2^k - u_1^k)\right] (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

Для доказательства импликации в (16) справа налево достаточно провести приведенные выкладки в обратном порядке. •

§16. Замыкания геодезических

16.1. Рассмотрим линейное пространство T_X как группу Ли по сложению. Подмножество

$$H := \{x \in T_X \,|\, \exp_\omega x = \omega\} \tag{1}$$

группы T_X, благодаря (16) п. 15.3, является ее подгруппой. Оттуда же следует, что

$$\exp_\omega x_1 = \exp_\omega x_2 \Longleftrightarrow (x_2 - x_1) \in H. \tag{2}$$

Поэтому отображение

$$\varphi : T_X/H \to \Phi_X, \quad \varphi(x+H) := \exp_\omega x \tag{3}$$

определено корректно и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T_X & & \\ {\scriptstyle \mathrm{Pr}}\big\downarrow & & \\ T_X/H & \xrightarrow{\varphi} & \Phi_X \end{array} \tag{4}$$

коммутативна. Причем отображение φ биективно. Подгруппа H замкнута в T_X, следовательно фактор-группа T_X/H естественно наделяется структурой группы Ли, при которой отображение проекции Pr является субмерсией (см. [10], с. 132). Из теоремы 15.1 и определений (12) п. 15.2 вытекает, что отображение $\exp_\omega \big|_{T_X}$ имеет постоянный ранг. По лемме [6], 30.1.5 заключаем, что отображение φ есть диффеоморфизм.

16.2. В этом пункте будет показано, что группа H является свободной абелевой группой. В (14) п. 15.3 был определен целочисленный параметр $s_0 \in [0, s]$, где $s = \dim T_X$. Для вычисления системы свободных образующих группы H определим матрицу $N = (N_i^j) \in M(s_0, \mathbb{Z})$, задавая ее ненулевые элементы

$$\begin{aligned} &1) s_0 > 0,\ s_0 = 0 \pmod 2 : \\ &\quad N_1^1 = -1,\ N_1^2 = N_{s_0}^1 = N_{s_0}^{s_0} = N_i^i = N_i^{i+1} = 1, \quad i \in [2, s_0 - 1]. \\ &2) s_0 > 1,\ s_0 = 1 \pmod 2 : \\ &\quad N_1^1 = N_1^{s_0} = N_i^i = N_1^{i-1} = 1, \quad i \in [2, s_0]. \\ &3) s_0 = 1 : N_1^1 = 2. \end{aligned} \tag{5}$$

По матрице N построим матрицу $\tilde N \in M(s, \mathbb{Z})$

$$\tilde N := \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & E_{s-s_0} \end{pmatrix},\ s_0 \in [1, s); \quad \tilde N := E_s,\ s_0 = 0; \quad \tilde N = N,\ s_0 = s. \tag{6}$$

Легко видеть, что

$$\det \tilde N = (-1)^{s_0+1} 2 \text{ при } s_0 > 0, \quad \det \tilde N = 1 \text{ при } s_0 = 0. \tag{7}$$

От базиса f пространства T_X перейдем к базису $h = (h_1, \dots, h_s)$ по формуле

$$h := f \tilde N. \tag{8}$$

Прямая проверка, с использованием (16) п. 15.3, дает

$$\pi h_i \in H, \quad i \in [1, s]. \tag{9}$$

Теорема. *Набор πh порождает группу H.*

Доказательство. Пусть $x \in H$. Тогда для некоторого $u \in \mathbb{R}^s$ будет

$$x = uf^T = u(h\tilde{N}^{-1})^T = [u(\tilde{N}^{-1})^T]h^T = \left[\frac{u}{\pi}(\tilde{N}^{-1})^T\right](\pi h)^T.$$

Из (16) п. 15.3 следует, что строка u/π состоит из целых чисел, и сумма первых s_0 ее элементов четна. Легко проверить, что при $s_0 > 0$ все элементы матрицы N^{-1} равны $\pm\frac{1}{2}$. Значит по определению (5) матрицы N будет $\left[\frac{u}{\pi}(\tilde{N}^{-1})^T\right] \in \mathbb{R}^s$. Из п. 15.3 вытекает, что при $s_0 = 0$ все элементы базиса f принадлежат группе H. $\bullet$

Доказанная теорема непосредственно влечет

Следствие. *Группа H является свободной абелевой группой с s образующими, а фактор-группа T_X/H диффеоморфна s-мерному тору.*

16.3. Вернемся к диаграмме (4). Диффеоморфизм φ индуцирует на торе T_X/H плоскую метрику (см. п. 15.2). При этом отображения $\exp_\omega\big|_{T_X}$ и Pr становятся универсальными изометрическими накрытиями, а само многообразие Φ_X можно рассматривать как плоский, вполне геодезический тор, вложенный в грассманово многообразие $G^+_{p,n}$.

Рассмотрим полузамкнутый параллелепипед

$$[\pi h] := \{uh^T | u \in [0, \pi)^s \subset \mathbb{R}^s\}, \tag{10}$$

натянутый на векторы базиса h. Так как набор h является свободным базисом группы H, то отображение $\mathrm{Pr}\big|_{[\pi h]}$, а тем самым и $\exp_\omega\big|_{[\pi h]}$, биективны. Поэтому

$$\mathrm{Vol}\,\Phi_X = \mathrm{Vol}\,[\pi h]. \tag{11}$$

Из (8), (11) следует

$$\mathrm{Vol}\,\Phi_X = \pi^s|h_1 \wedge \ldots \wedge h_s| = \pi^s|\det \tilde{N}|\,|f_1 \wedge \ldots \wedge f_s|. \tag{12}$$

В определении (10) п. 15.2 набора f базис ξ пространства T_0 ортонормирован. Из (7) и [1], п. 1.3, (4), (5) находим

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol}\Phi_X &= 2\pi^s[\det(bb^T)]^{\frac{1}{2}} \text{ при } s_0>0,\\ \operatorname{Vol}\Phi_X &= \pi^s[\det(bb^T)]^{\frac{1}{2}} \text{ при } s_0=0.\end{aligned} \tag{13}$$

Напомним, что условие $s_0=0$ означает четность суммы элементов каждой строки в матрице b.

16.4. Касательный вектор X к геодезической γ в базисе f имеет набор рационально независимых координат μ (см. (11) п. 15.2). При переходе к базису h по формуле (8) строка координат μ перейдет в строку

$$\nu=\mu(\tilde N^{-1})^T. \tag{14}$$

Матрица $(\tilde N^{-1})^T$ принадлежит множеству $Gl(s,\mathbb{Q})$, поэтому и набор координат ν будет рационально независимым.

Теорема. *Справедлива формула*

$$\operatorname{clos}\gamma(\mathbb{R})=\Phi_X:=\Phi(\gamma). \tag{15}$$

Доказательство. Пусть точка $x\in\Phi_X$. Отображение $\exp_\omega$ биективно на параллелепипеде $[\pi h]$ (см. (10)), поэтому найдется такая строка координат $v\in[0,1)^s$, что точка $\tilde x=\pi v h^T$ накрывает точку x при отображении $\exp_\omega\big|_{T_X}$. Геодезическую $\gamma(t)=\exp_\omega(tX)$ накрывает прямая $\tilde x(t)=tX=t\nu h^T$. Так как набор ν рационально независим, то из ([11], VII, 4.4) следует, что для любого $\varepsilon>0$ найдутся такие $t(\varepsilon)\in\mathbb{R}$ и $k(\varepsilon)\in\mathbb{Z}^s$, при которых

$$|\nu^i t-v^i-k^i|<\varepsilon,\quad i\in[1,s]. \tag{16}$$

Пусть $\tilde x(\varepsilon):=\pi(\nu t(\varepsilon)-k(\varepsilon))h^T\in T_X$. Из (16) вытекает, что $\tilde x(\varepsilon)\to\tilde x$ при $\varepsilon\to 0$. Кроме того, $\exp_\omega\tilde x(\varepsilon)=\exp_\omega(\pi\nu t(\varepsilon)h^T):=x(\varepsilon)\in\gamma(\mathbb{R})$, $\exp_\omega\tilde x=x$. При изометрическом накрытии $\exp_\omega\big|_{T_X}$ расстояния между парами точек не увеличиваются, значит $x(\varepsilon)\to x$. •

16.5. Итак, замыкание любой геодезической γ в многообразии $G^+_{p,n}$ является плоским вполне геодезическим тором. Его размерность s равна рангу конечно порожденной абелевлй группы $g(\lambda)$, построенной по набору вещественных коэффициентов λ в каноническом разложении касательного вектора X к геодезической γ.

По этому же набору λ определяются целочисленные матрицы b и параметр s_0. Выражение (13) для объема тора $\operatorname{clos}\gamma$ через матрицу b зависит от равенства или неравенства s_0 нулю. Дадим геометрическую интерпретацию этой альтернативе.

Из доказательства утверждения 15.3 следует, что при $s_0 = 0$ для любых $x_1, x_2 \in T_X$ $\exp_\omega x_1 \neq -\exp_\omega x_2$, то есть

$$\Phi(\gamma) \cap (-\Phi(\gamma)) = \varnothing. \tag{17}$$

Пусть $s_0 \neq 0$. В (15) п. 15.3 положим по определению $u_1 = 0$, $u_2 = (\pi, 0, \dots, 0)$. Тогда $\exp_\omega(u_1 f^T) = \omega = -\exp_\omega(u_2 f^T)$. По теореме 16.4 тор Φ_X не зависит от выбора точки $\omega \in \gamma$. Следовательно $(-\gamma) \subset \Phi(\gamma)$ и из (15) вытекает, что

$$\Phi(\gamma) = -\Phi(\gamma), \tag{18}$$

то есть тор $\Phi(\gamma)$ центрально симметричен.

16.6. Рассмотрим произвольную геодезическую $\tilde{\gamma}$ в многообразии $G_{p,n}$. Накрывающее множество $\sigma^{-1}(\tilde{\gamma})$ геодезической $\tilde{\gamma}$ состоит из двух геодезических γ и $(-\gamma)$ в многообразии $G^+_{p,n}$. Эти геодезические порождают одну и ту же группу $g(\lambda)$, а значит одну и ту жу целочисленную матрицу b. Если для матрицы b $s_0 = 0$, то множество $\sigma^{-1}(\operatorname{clos}\tilde{\gamma})$ распадается на две непересекающиеся компоненты связности $\Phi(\gamma)$ и $\Phi(-\gamma) = -\Phi(\gamma)$, на которых отображение проекции σ является изометрией. Поэтому объем множества $\Phi(\tilde{\gamma}) := \operatorname{clos}\tilde{\gamma}$ равен (см. (13))

$$\operatorname{Vol}\Phi(\tilde{\gamma}) = \operatorname{Vol}\Phi(\gamma) = \pi^s[\det(bb^T)]^{\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

При $s_0 > 0$ множество $\sigma^{-1}(\operatorname{clos}\tilde{\gamma}) = \Phi(\gamma) = \Phi(-\gamma)$ связно и центрально симметрично по формуле (18). В этом случае отображение $\sigma\big|_{\Phi(\gamma)}$ является двухлистным изометрическим накрытием, поэтому (см. (13))

$$\operatorname{Vol}\Phi(\tilde{\gamma}) = \frac{1}{2}\operatorname{Vol}\Phi(\gamma) = \pi^s[\det(bb^T)]^{\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

Объединяя (19), (20), приходим к формуле

$$\operatorname{Vol}\Phi(\tilde{\gamma}) = \pi^s[\det(bb^T)]^{\frac{1}{2}}. \tag{21}$$

Таким образом многообразие $\Phi(\tilde{\gamma}) = \operatorname{clos}\tilde{\gamma} \subset G_{p,n}$ является вполне геодезическим подмногообразием грассманова многообразия $G_{p,n}$, изометричным плоскому s-мерному тору с объемом (21).

Последнее замечание и формула (21) анонсированы в ([4], Т. 14).

Работа частично поддержана грантом РФФИ 96–01–00681.

Литература

1. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий. Части I, II.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997).
2. Л. Д. Иванов, *Вариации множеств и функций.* Наука, М, 1975.
3. Б. А. Розенфельд, *Многомерные пространства.* Наука, М, 1966.
4. Y.-C. Wong, *Differential geometry of Grassmann manifolds.* — Proc. Nat. Acad. USA **57,** No. **3** (1967), 589–594.
5. Y.-C. Wong, *Sectional curvatures of Grassmann manifolds.* — Proc. Nat. Acad. USA **60,** No. **1** (1968), 75–79.
6. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Введение в риманову геометрию* . С.-Петербург, Наука, 1994.
7. С. Е. Козлов, *Ортогонально совместимые бивекторы.* — Укр. геометр. сб. Вып. 27 (1984), 68–75.
8. Д. К. Фаддеев, *Лекции по алгебре.* М, Наука, 1984.
9. П. М. Кон, *Свободные кольца и их связи.* М, Мир, 1975.
10. С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.* М, Мир, 1964.
11. Б. М. Макаров, М. Г. Голузина и др., *Избранные задачи по вещественному анализу.* М, Наука, 1992.

Kozlov S. E. A Geometry of real Grassmannian manifolds. Part III. The exponential mapping of the Grassmannian manifold in the Plücker model and its properties.

A canonical decomposition for an element of the tangent fibration of Grassmannian manifold $G^+_{p,n}$ in its Plücker model is constructed. By means of the decomposition a concept of stationary angles between oriented planes is introduced and a connection with stationary angles in a nonoriented case is ascertained. A direct formula allowed to calculate the diameter and the radius of injectiveness of the manifold $G^+_{p,n}$ is given. A problem of the uniqueness of the above canonical decomposition has been reduced to a previously solved by the author similar problem of the decomposition of bivectors which realizes their mass. By virtue of a developed technique a structure of the closure of an arbitrary geodesic in manifolds $G^+_{p,n}$ and $G_{p,n}$ was determined. The last result for manifolds $G_{p,n}$ was earlier announced by Wong without proof.

Санкт-Петербургский
Государственный университет

Поступило 3 февраля 1997 г.