A. B. Zheglov, On the structure of two-dimensional local skew fields, *Izv. RAN. Ser. Mat.*, 2001, Volume 65, Issue 1, 25–60

DOI: 10.4213/im318

УДК 512.625+512.552.32+512.717

А. Б. Жеглов

О строении двумерных локальных тел

Понятие n-мерного локального тела является прямым обобщением понятия n-мерного локального поля. Мы исследуем 2-мерные локальные тела и решаем проблему классификации для тел нулевых равных характеристик и с последним полем вычетов, лежащим в центре, а также приводим условие, при котором существует сечение отображения вычета в телах, первое тело вычетов которых коммутативно. При выполнении этого условия мы решаем проблему классификации для любых 2-мерных локальных тел.

Для тел нулевых равных характеристик и с последним полем вычетов, лежащим в центре, мы приводим критерий сопряженности двух элементов.

Библиография: 8 наименований.

В алгебраической геометрии и теории чисел хорошо известно понятие n-мерного локального поля, имеющее многочисленные применения (см. [3], а также [4] и [5]). В работе [6] было предложено рассматривать n-мерные локальные поля без условия коммутативности, т.е. n-мерные локальные тела, и поставлена задача их классификации и описания классов сопряженных элементов.

В настоящей работе эти задачи изучаются для двумерных локальных тел с телом вычетов, являющимся полем. Для таких тел дается достаточное условие (теорема 1) вложения тела вычетов, и в случае его выполнения приводится классификация тел относительно изоморфизмов, сохраняющих локальную структуру. В случае невыполнения этого условия приводится пример, когда тело вычетов не вкладывается в тело, и дается классификация двумерных тел характеристики нуль, у которых последнее поле вычетов лежит в центре, а поле вычетов вкладывается в тело.

Работа построена следующим образом. Во введении даются определения и доказываются некоторые общие теоремы для любых двумерных локальных тел, § 2 посвящен вопросу вложимости поля вычетов в тело и классификации тел, для которых выполняется соответствующее условие. В § 3 приводится классификация тел характеристики нуль, у которых имеется вложение поля вычетов в тело и последнее поле вычетов лежит в центре. Теоремы сопряженности доказываются в § 4. Все основные результаты первых трех параграфов сформулированы в теореме 5 в § 3.

Автор хотел бы выразить глубокую признательность своему научному руководителю А. Н. Паршину за постоянное внимание к работе, а также Н. И. Дубровину за ценные консультации.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96050) и INTAS (грант № 93-2805).

§ 1. Введение

Определение 1. Пусть K и k – произвольные тела. Будем говорить, что K *является n-мерным локальным телом, имеющим тело k последним телом вычетов*, если тело K имеет следующую структуру: или $n = 0$ (и при этом $K = k$), или K обладает дискретным нормированием $\nu\colon K^* \cup \{0\} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, где $\nu\colon K^* \to \mathbb{Z}$ – сюръективный гомоморфизм, $\nu(0) = \infty$ и $\nu(a+b) \geqslant \inf(\nu(a), \nu(b))$, его кольцо нормирования $\mathscr{O} := \{x \in K\colon \nu(x) \geqslant 0\}$ является полным и отделимым относительно топологии, задаваемой ν, и его тело вычетов является $(n-1)$-мерным локальным телом с последним телом вычетов k.

Следующие утверждения являются хорошо известными фактами из теории нормирования алгебр с делением (см., например, [1]).

Лемма 1. *Пусть K – произвольное тело, обладающее дискретным нормированием. Тогда*:

i) *его кольцо нормирования $\mathscr{O}$ является топологической группой относительно топологии, задаваемой нормированием ν, и одновременно метрическим пространством*;

ii) *$\mathscr{O}$ является локальным кольцом и областью главных идеалов.*

Для каждого двумерного локального тела имеем

$$K \supset \mathscr{O} \to \overline{K} \supset \overline{\mathscr{O}} \to k,$$

где $\overline{\mathscr{O}}$ – кольцо нормирования тела $\overline{K}$. Имеются также две фильтрации:

$$K \supset \mathscr{O} \supset \wp \supset \wp^2 \supset \cdots, \qquad \overline{K} \supset \overline{\mathscr{O}} \supset \overline{\wp} \supset \overline{\wp}^2 \supset \cdots,$$

где $\overline{\wp}$ – максимальный идеал в $\overline{\mathscr{O}}$, и дискретное нормирование $\overline{\nu}$ поля $\overline{K}$.

Определение 2. *Изоморфизмом локальных тел K и K'* будем называть изоморфизм их как колец, сохраняющий фильтрации, указанные выше.

Это эквивалентно сохранению нормирований ν и $\overline{\nu}$.

Определение 3. Произвольное двумерное локальное тело будем называть *расщепимым*, если существует гомоморфизм $\overline{K} \hookrightarrow \mathscr{O} \subset K$, являющийся сечением отображения $\mathscr{O} \to \mathscr{O}/\wp = \overline{K}$.

Элементы $z \in \mathscr{O}$, $\nu(z) = 1$, и $u \in \overline{\mathscr{O}} \subset \overline{K}$, $\overline{\nu}(u) = 1$, будем называть *локальными параметрами* (или *переменными*) *тела K*.

Предложение 1. *Пусть тело K расщепимо. Фиксируем некоторые параметры z и u. Тогда имеет место изоморфизм $K = \overline{K}((z))$ как векторное пространство, закон умножения двух рядов из которого задается с помощью тождества*

$$za = a^{\alpha} z + a^{\delta_1} z^2 + a^{\delta_2} z^3 + \cdots,$$

где $a \in \overline{K}$, α – некоторый автоморфизм, $\delta_i\colon \overline{K} \to \overline{K}$ – некоторые линейные отображения.

Доказательство. То, что расщепимое тело представляется в виде $\overline{K}((z))$, доказывается стандартным образом. А именно, пусть $a \in K$, $\nu(a) = j$. Тогда $\nu(az^{-j}) = 0$ и $\overline{az^{-j}} := az^{-j} \bmod \wp \in \overline{K}$. Будем считать, что этот элемент из $\overline{K}$ лежит в $\mathcal{O}$, поскольку у нас есть сечение. Тогда $\nu(az^{-j} - \overline{az^{-j}}) \geqslant 1$. Продолжая дальше этот процесс, мы получаем, что a записывается в виде ряда $\sum_{i=j}^{\infty} a_i z^i$, $a_i \in \overline{K}$. Закон умножения, указанный в формулировке, получается аналогичным образом: определим $a^{\alpha} = zaz^{-1} \bmod \wp$, где $a \in \overline{K}$. Ясно, что α – автоморфизм. Поскольку $\nu(zaz^{-1}) = 0$, zaz^{-1} записывается в общем виде как ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$, где $a_i \in \overline{K}$. Как мы уже выяснили, $a_0 = a^{\alpha}$. Остальные коэффициенты переобозначим следующим образом: $a^{\delta_i} := a_i$, $i \geqslant 1$. Линейность определенных таким образом отображений δ_i проверяется непосредственно.

Оказывается, что для каждого введенного выше отображения δ_i выполняется некоторое тождество. Чтобы написать его, введем предварительно несколько новых обозначений.

Рассмотрим кольцо некоммутативных полиномов от двух переменных $\mathbb{Z}\langle\alpha, \delta\rangle$. Определим теперь отображение

$$\sigma\colon \mathbb{Z}\langle\alpha, \delta\rangle \to \mathbb{Z}\langle\alpha, \delta, \delta_i; i \geqslant 1\rangle$$

со значениями в кольце некоммутативных многочленов от переменных α, δ, δ_i, $i \geqslant 1$, как отображение, которое заменяет в каждом слове, начиная с правого конца, сочетания типа $\delta^i\alpha$ на δ_i, т.е.

$$\sigma(\alpha^{a_1}\delta^{b_1} \dots \alpha^{a_n}\delta^{b_n}) = \alpha^{a_1}\delta_{b_1} \dots \delta_{b_{n-1}}\alpha^{a_n - 1}\delta^{b_n},$$

где $a_1, b_n \geqslant 0$, $a_i, b_j \geqslant 1$, $i > 1$, $j < n$ – натуральные числа.

Нас будут интересовать значения этого отображения на многочленах, все мономы которых оканчиваются на α. В этом случае значения отображения σ будут принадлежать кольцу $\mathbb{Z}\langle\alpha, \delta_i; i \geqslant 1\rangle$.

Например,

$$\sigma(\alpha^k) = \alpha^k, \qquad \sigma(\alpha^k\delta^l\alpha^i) = \alpha^k\delta_l\alpha^{i-1},$$

где k, l, i – натуральные числа, $i, l \geqslant 1$.

В кольце $\mathbb{Z}\langle\alpha, \delta\rangle$ определим теперь многочлены S_i^k как сумму всех мономов, принадлежащих орбите монома $\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{i-k}\underbrace{\delta \dots \delta}_{k}$ под действием группы подстановок S_i:

$$S_i^k = \sum_{\tau \in S_i/G} \tau(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{i-k}\underbrace{\delta \dots \delta}_{k}),$$

где G – стационарная подгруппа.

Непосредственно из определения вытекает следующая лемма.

Лемма 2. *Многочлены S_i^k удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению*:

$$S_{i+1}^{k+1} = \alpha S_i^{k+1} + \delta S_i^k,$$

с начальными условиями $S_i^i = \delta^i$, $S_i^0 = \alpha^i$, где $k, i \in \mathbb{Z}$, $i \geqslant k$, $i \geqslant 1$.

Теперь мы можем написать тождества для отображений δ_i.

Предложение 2. *Пусть $i \geqslant 1$. Тогда*

$$\delta_i(ab) = \sum_{k=0}^{i} \sigma(\delta^{i-k}\alpha)(a)\sigma(S_i^k\alpha)(b), \qquad a, b \in \overline{K}.$$

Доказательство. Пусть $a, b \in \overline{K}$. Имеем

$$(ab)^\alpha z + (ab)^{\delta_1} z^2 + \cdots = z(ab) = (a^\alpha z + a^{\delta_1} z^2 + \cdots)b. \qquad (*)$$

Если мы распишем правую часть так, чтобы это был ряд, у которого степени z стоят справа, и затем сравним коэффициенты при одинаковых степенях z в левой и правой частях, мы получим общие формулы для $\delta_i(ab)$. Наша задача – доказать, что формулы из формулировки предложения совпадают с этими формулами.

Возьмем произвольное $i \geqslant 1$ и посмотрим на формулу для $\delta_i(ab)$, получающуюся из формулы $(*)$. Эта формула есть коэффициент при z^{i+1}. Пусть x_k – коэффициенты при z^{i+1} в рядах $z^{i+1-k}b$. Тогда коэффициент при z^{i+1} состоит из суммы

$$\alpha(a)x_i + \sum_{k=0}^{i-1} \delta_k(a)x_k = \sum_{k=0}^{i} \sigma(\delta^{i-k}\alpha)(a)x_k.$$

Заметим, что x_k – это некоторые многочлены, состоящие из суммы мономов, каждый из которых имеет общий вид

$$\alpha^{a_1}\delta_{b_1}\ldots\alpha^{a_n}\delta_{b_n}\alpha^{a_{n+1}}(b), \qquad a_k, b_k \in \mathbb{Z}, \quad a_k, b_k \geqslant 0$$

(δ_0 считается равным 1). Несложно видеть, что все различные мономы входят в эти многочлены с целыми положительными коэффициентами.

Покажем, что $x_k = \sigma(S_i^k\alpha)(b)$.

Для доказательства этого факта достаточно показать, что все слагаемые из $\sigma(S_i^k\alpha)(b)$ присутствуют в x_k, а также что числа слагаемых в x_k и в $\sigma(S_i^k\alpha)(b)$ совпадают, где под числом слагаемых понимается сумма коэффициентов мономов.

Действительно, все мономы в $\sigma(S_i^k\alpha)(b)$ по определению разные и входят туда с коэффициентами, равными 1. Несложно видеть, что число слагаемых там равно $C_i^k = i!/(i-k)!k!$. С другой стороны, все различные мономы в x_k входят с целыми положительными коэффициентами. Поэтому если мы покажем, что каждый моном из $\sigma(S_i^k\alpha)(b)$ присутствует в качестве слагаемого в x_k и число слагаемых в x_k равно C_i^k, мы получим искомое утверждение.

Покажем сначала, что любой моном из $\sigma(S_i^k\alpha)(b)$ присутствует в x_k. По определению всякий моном из $\sigma(S_i^k\alpha)(b)$ есть моном $\sigma(\tau(\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{i-k}\underbrace{\delta\ldots\delta}_{k})\alpha)(b)$, где $\tau \in S_i$, т.е. моном вида $\alpha^{a_1}\delta_{b_1}\ldots\alpha^{a_n}\delta_{b_n}\alpha^{a_{n+1}}(b)$, где $a_j \geqslant 0$, $b_j \geqslant 1$, $\sum_{j=1}^n b_j = k$, $\sum_{j=1}^{n+1} a_j = i-k+1-n$. Чтобы этот моном присутствовал в x_k, необходимо, чтобы он присутствовал в ряде $z^{i+1-k}b$ в качестве коэффициента при z^{i+1}. Чтобы это увидеть, запишем последний ряд так:

$$z^{i+1-k}b = z^{i+1-k-a_{n+1}}\alpha^{a_{n+1}}(b)z^{a_{n+1}} + \text{остальные мономы.}$$

Распишем выделенный моном:

$$\begin{aligned}
&z^{i+1-k-a_{n+1}}\alpha^{a_{n+1}}(b)z^{a_{n+1}} = \\
&\quad = z^{i+1-k-a_{n+1}-1}[\alpha^{a_{n+1}+1}(b)z + \cdots + \delta_{b_n}\alpha^{a_{n+1}}(b)z^{b_n+1} + \cdots]z^{a_{n+1}} \\
&\quad = z^{i+1-k-a_{n+1}-1}\alpha^{a_{n+1}+1}(b)z^{a_{n+1}+1} \\
&\qquad + z^{i+1-k-a_{n+1}-1}\delta_{b_n}\alpha^{a_{n+1}}(b)z^{b_n+1+a_{n+1}} + \cdots .
\end{aligned}$$

Записывая теперь аналогичным образом $z^{i+1-k-a_{n+1}-1}b_1$, где в качестве b_1 выступает $\delta_{b_n}\alpha^{a_{n+1}}(b)$, получим на следующем шаге

$$z^{i+1-k-a_{n+1}-1-a_n-1}b_2z^{b_n+1+a_{n+1}+a_n+b_{n-1}+1},$$

где $b_2 = \delta_{b_{n-1}}\alpha^{a_n}\delta_{b_n}\alpha^{a_{n+1}}(b)$. Действуя далее по индукции, получаем на последнем шаге

$$\begin{aligned}
&z^{i+1-k-\sum a_j-n}\alpha^{a_1}\delta_{b_1}\dots\alpha^{a_n}\delta_{b_n}\alpha^{a_{n+1}}(b)z^{\sum b_j+n+\sum a_j} \\
&\quad = \alpha^{a_1}\delta_{b_1}\dots\alpha^{a_n}\delta_{b_n}\alpha^{a_{n+1}}(b)z^{i+1},
\end{aligned}$$

т.е. искомый моном в x_k найден.

Таким образом, любое слагаемое из $\sigma(S_i^k\alpha)(b)$ присутствует в x_k. Покажем теперь, что число слагаемых в x_k равно C_i^k.

Обозначим через s_n^l число слагаемых в коэффициенте при z^l в ряде z^naz^{-n}, $a \in \overline{K}$. Тогда число слагаемых в x_k есть s_{i+1-k}^k. Утверждается, что выполняется следующее рекуррентное соотношение:

$$s_n^d = \sum_{l=0}^{d} s_{n-1}^l.$$

Докажем это по индукции. Пусть $n = 1$. Тогда $s_1^d = 1$ для всех $d \geqslant 0$. С другой стороны, все слагаемые s_0^l, $l > 0$, равны нулю, и лишь $s_0^0 = 1$.

Пусть теперь n любое. Пусть

$$z^{n-1}az^{-n+1} = y_0 + y_1z + \cdots ,$$

где $y_0 \in \overline{K}$. Тогда

$$z^naz^{-n} = zy_0z^{-1} + zy_1z^{-1}z + \cdots = [y_0^{\alpha} + y_0^{\delta_1}z + \cdots] + [y_1^{\alpha} + y_1^{\delta_1}z + \cdots]z + \cdots .$$

Отсюда следует, что коэффициент при z^d есть

$$\sum_{j=1}^{d}\delta_j(y_{d-j}) + \alpha(y_d).$$

Поскольку число слагаемых в y_j равно s_{n-1}^j, отсюда получаем

$$s_n^d = \sum_{j=0}^{d} s_{n-1}^j.$$

Теперь, наконец, покажем, что $s_{i+1-k}^k = C_i^k$, если $k < i+1$. Докажем это по индукции. Пусть $i = 0$. Тогда $s_1^0 = 1 = C_i^0$. Считаем теперь, что формулы доказаны для $i-1$. Пусть $k < i+1$; тогда

$$\begin{aligned}
s_{i+1-k}^k = \sum_{l=0}^{k} s_{i-k}^l &= C_i^k + C_{i-1}^{k-1} + \dots + C_{i-k}^0 \\
&= \bigl(\dots(((C_{i-k}^0 + C_{i-k+1}^1) + C_{i-k+2}^2) + C_{i-k+3}^3) + \dots + C_i^k\bigr) \\
&= \bigl(\dots(((C_{i-k+2}^1) + C_{i-k+2}^2) + C_{i-k+3}^3) + \dots + C_i^k\bigr) = C_{i+1}^k.
\end{aligned}$$

Поскольку число слагаемых в x_k равно s_{i+1-k}^k, предложение доказано.

Следствие 1. *Пусть* $\alpha = \mathrm{Id}$. *Тогда*

$$\delta_i(ab) = \delta_i(a)b + \sum_{k=1}^{i} \delta_{i-k}(a) \sum_{(j_1,\dots,j_l)} C_{i-k+1}^l \delta_{j_1}\dots\delta_{j_l}(b).$$

Здесь $\delta_0 = \alpha$, $0 < l \leqslant \min\{i-k+1, k\}$, $j_m \geqslant 1$, $\sum j_m = k$, *вектор* $(j_1,\dots,j_l)$ *принадлежит орбите целочисленного вектора с суммой координат, равной* k, *под действием группы подстановок* S_l.

В дальнейшем будет часто употребляться следующее понятие.

Определение 4. Пусть (α,β) – некоторые эндоморфизмы тела L. Отображение $\delta\colon L \to L'$, где $L \subset L'$ – произвольные тела, называется (α,β)-*дифференцированием*, если оно линейно и удовлетворяет тождеству

$$\delta(ab) = \delta(a)b^\alpha + a^\beta\delta(b),$$

где $a, b \in L$; $(\alpha, 1)$-дифференцирование будем называть просто α-*дифференцированием.*

Например, δ_1 – (α^2,α)-дифференцирование.

Если $\alpha = \mathrm{Id}$, то δ_1 – дифференцирование в обычном смысле; $\delta_2 = \delta_1^2 + \delta$, где δ – тоже некоторое дифференцирование. Вообще, верно следующее

Следствие 2. *Если* $\delta_1 = \dots = \delta_{k-1} = 0$, *то* δ_k – (α^{k+1},α)-*дифференцирование.*

Наконец, приведем еще одно следствие, которое будет нам полезно в дальнейшем, а именно в §3.

Следствие 3. *Пусть* $\overline{K}$ – *поле*, $\overline{K} = k((u))$, $k \subset Z(K)$ *и отображения* δ_i, $i \geqslant 1$, *непрерывны*, *если* $\operatorname{char} k = 0$. *Тогда*

$$\delta_i\biggl(\sum_{j=N}^{\infty} x_j u^j\biggr) = \sum_{j=N}^{\infty} x_j \delta_i(u^j), \qquad x_j \in k.$$

Таким образом, *для любого* i δ_i *определяется значениями* $\delta_i(u)$ *и* $\delta_j(u)$ *с* $j < i$.

Доказательство. В случае $\operatorname{char} k = p \neq 0$ непрерывность отображений δ_i, $i \geqslant 1$, вытекает из того факта, что $\delta_i(a^{p^i}) = 0$ для любого $a \in \overline{K}$. Поскольку для одномерных равнохарактеристических локальных полей топология определяется однозначно локальной структурой, непрерывность наших отображений не зависит от выбора параметризации (о связи локальной структуры, параметризации и топологии локальных полей любой размерности см. [8]).

Покажем, что α непрерывен. Для этого в нашем случае, т.е. в случае одномерного локального поля, достаточно показать, что α сохраняет нормирование. Докажем это сразу в произвольной характеристике.

Чтобы доказать наше утверждение, достаточно показать, что $\overline{\nu}(\alpha(u')) = 1$ для любого u', $\overline{\nu}(u') = 1$. Рассмотрим автоморфизм α':

$$\alpha'(a) := \overline{z^{-1}az},$$

где $a \in \overline{K}$ (все обозначения из предложения 1). Очевидно, что $\alpha' = \alpha^{-1}$.

Пусть u' – произвольный параметр. Положим $\kappa = \overline{\nu}(\alpha(u'))$. Покажем, что $|\kappa| \leqslant 1$ или $|\kappa| = p^q$, $q \in \mathbb{N}$. Пусть это не так. Тогда $\kappa = mp^q$, $(m,p) = 1$, $|m| \neq 1$. Тогда существуют $c \in k$, $a \in \overline{K}$: $\alpha(u') = ca^m$. Отсюда получаем

$$u' = \alpha^{-1}(\alpha(u')) = c(\alpha^{-1}(a))^m,$$

т.е.

$$\overline{\nu}(u') = 1 = \overline{\nu}(c(\alpha^{-1}(a))^m) = m\overline{\nu}(\alpha^{-1}(a)).$$

Противоречие.

Покажем, что $\kappa \geqslant 0$. Пусть это не так, т.е. $\kappa < 0$. Рассмотрим элемент $u' + u'^2$ ($u' + u'^3$, если $\operatorname{char} k = 2$). Тогда $\overline{\nu}(\alpha(u' + u'^2)) = 2\kappa < -1$. Если $\operatorname{char} k \neq 2$, это противоречит только что доказанному утверждению, что $|\overline{\nu}(\alpha(u'))| = p^q$ или $|\overline{\nu}(\alpha(u'))| \leqslant 1$ для любого параметра u'. Если $\operatorname{char} k = 2$, то то же рассуждение проходит для элемента в скобках.

Аналогично для числа $\kappa' := \overline{\nu}(\alpha^{-1}(u'))$ выполнено $0 \leqslant \kappa' \leqslant 1$ или $\kappa' = p^l$.

Покажем, что $\kappa \neq p^q$. Доказательство от противного разбивается на два случая.

1) Пусть $\kappa' \leqslant 1$. Существуют $r \in k$, $a_1 \in k((u))$: $\alpha(u') = c_2 u'^2 a_1^{p^q-2}$. Отсюда

$$1 = 2\overline{\nu}(\alpha^{-1}(u')) + (p^q - 2)\overline{\nu}(\alpha^{-1}(a_1)),$$

т.е. $(p^q-2)\mid 1$. Последнее выполняется, только если $p=3,\ q=1$. Но в последнем случае можно воспользоваться тем же рассуждением с $\alpha(u')=c_3u'^5a_1^{-2}$. Тогда мы получим, что $\overline{\nu}(\alpha^{-1}(a_1))=2$, что противоречит свойству κ'.

2) Пусть $\kappa'=p^l$. Запишем тогда $\alpha(u')$ как $\alpha(u')=cu'a^{p^q-1}$ для некоторых $c\in k,\ a\in k((u)),\ \overline{\nu}(a)=1$. Отсюда

$$\overline{\nu}(u')=1=\overline{\nu}(\alpha^{-1}(u'))+(p^q-1)\overline{\nu}.$$

Противоречие, так как $\overline{\nu}(\alpha^{-1}(a))\geqslant 0$ по свойству числа κ.

Итак, $\kappa=0$ или $\kappa=1$, т.е. мы показали, что для любого параметра u' $\overline{\nu}(\alpha(u'))=0$ или $\overline{\nu}(\alpha(u'))=1$. Пусть $\kappa=0$. Тогда рассмотрим элемент $x=u'+c_1u'^2+c_2(u'^3+c_1u'^4)$, где $c_1=-w_0^{-1}$, если $\alpha(u')=w_0+\cdots$, а c_2 – такой элемент из k, что $\overline{\nu}(\alpha(x))>1$ (нетрудно видеть, что он всегда существует, так как $\overline{\nu}(\alpha(u'+c_1u'^2))>0$). Противоречие. Следовательно, $\kappa=1$ и наше утверждение доказано, т.е. α – непрерывный автоморфизм.

Теперь в силу полноты и отделимости топологии в $k((u))$ достаточно показать, что ряд $\sum_{j=N}^{\infty}x_j\delta_i(u^j)$ сходится. Доказательство проводится индукцией по i. Если $i=0$, то $\overline{\nu}(\alpha(u^j))=j$, и ряд сходится. Если $i=1$, то $\overline{\nu}(\delta_1(u^j))=(j-1)\overline{\nu}(\delta_1(u))$, и опять ряд сходится в силу полноты $k((u))$.

Наконец, в силу предложения 2 при $j>1$

$$\delta_i(u^j)=\delta_i(u^{j-1})y_0+\sum_{k=0}^{i-1}\delta_k(u^{j-1})y_{i-k},$$

где $\overline{\nu}(y_k)$ не зависит от j. По предположению индукции

$$\begin{aligned}&\min\{\overline{\nu}(\delta_0(u^{j-1})y_i),\dots,\overline{\nu}(\delta_{i-1}(u^{j-1})y_1)\}\\&\qquad>\min\{\overline{\nu}(\delta_0(u^{j-2})y_i),\dots,\overline{\nu}(\delta_{i-1}(u^{j-2})y_1)\}\end{aligned}$$

и $\overline{\nu}(y_0)=1$, поэтому

$$\begin{aligned}&\min\{\overline{\nu}(\delta_i(u^{j-1})y_0),\overline{\nu}(\delta_0(u^{j-1})y_i),\dots,\overline{\nu}(\delta_{i-1}(u^{j-1})y_1)\}\\&\qquad>\min\{\overline{\nu}(\delta_i(u^{j-2})y_0),\overline{\nu}(\delta_0(u^{j-2})y_i),\dots,\overline{\nu}(\delta_{i-1}(u^{j-2})y_1)\}.\end{aligned}$$

Следовательно, ряд сходится.

§ 2. Расщепимые тела

С этого места и далее, если не оговорено противное, мы будем предполагать, что $\overline{K}$ – поле.

Для такого локального тела можно определить естественным образом канонический автоморфизм α тела вычетов $\overline{K}$.

Из определения локального тела имеем следующие точные последовательности:

$$1\to\mathscr{O}^*\to K^*\xrightarrow{\nu}\mathbb{Z}\to 1,$$

где $\mathcal{O}$ – кольцо нормирования;

$$1 \to 1 + \wp \to \mathcal{O}^* \to \overline{K}^* \to 1,$$

где $\wp$ – максимальный идеал.

Рассмотрим отображение

$$\phi\colon K^* \to \operatorname{Int}(K), \qquad \phi(x) = \operatorname{ad}(x), \qquad \operatorname{ad}(x)(y) = x^{-1}yx,$$

где $\operatorname{Int}(K)$ – группа внутренних автоморфизмов тела K. Поскольку внутренние автоморфизмы не меняют нормирование элемента, их можно ограничить на кольцо $\mathcal{O}$. Кроме того, они переводят идеал $\wp$ в себя. Это дает отображение $\phi\colon K^* \to \operatorname{Aut}(\mathcal{O}/\wp) = \operatorname{Aut}(\overline{K})$. Покажем теперь, что $\phi(\mathcal{O}^*)$ является тривиальным автоморфизмом поля $\overline{K}$. Чтобы показать это, воспользуемся второй из вышеприведенных точных троек. Покажем, что $\phi(1+\wp)$ действует на $\overline{K}$ тривиально. Для этого нужно показать, что $(1+\wp)^{-1}x(1+\wp) = x \mod \wp$ для любого $x \in \mathcal{O}$. Но это очевидно сразу после раскрытия скобок. Из этого факта следует, что мы можем определить действие $\overline{K}$ на $\overline{K}$. Покажем, что оно также тривиально. Действительно, это действие определяется как $a^{-1}xa \mod \wp$, где a, x – представители в кольце $\mathcal{O}$. Но это есть просто $\bar{a}^{-1}\bar{x}\bar{a} = \bar{x}$ (черта означает образ в теле вычетов), поскольку тело вычетов по предположению есть поле.

Определение 5. *Канонический автоморфизм α поля $\overline{K}$* определяется соотношением $\alpha = \phi(z)$, где $z \in K^*$ и $\nu(z) = 1$. Он не зависит от выбора z.

Опишем теперь все расщепимые двумерные локальные тела *с изоморфными последними полями вычетов* с точностью до изоморфизма. Пусть K и K' – два расщепимых тела, $K \cong \overline{K}((z))$, $K' \cong \overline{K}'((z'))$. Если $K \cong K'$, то отображение изоморфизма $\varphi\colon K \to K'$ можно представить как композицию изоморфизма $\phi\colon K \to K'$, $\phi(u) = u'$, $\phi(z) = z'$, и некоторого автоморфизма ψ тела K. В свою очередь, любой автоморфизм задается некоторой заменой переменных

$$\begin{aligned} u \mapsto u' &= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots, & \overline{\nu}(c_0) &= 1, \\ z \mapsto z' &= a_0 z + a_1 z^2 + \cdots, & a_0 &\neq 0, \end{aligned} \tag{$*$}$$

где $a_i, c_i \in \overline{K}$, в силу наших соглашений о сохранении изоморфизмами локальной структуры тела.

Легко видеть, что всякая замена переменных выглядит таким образом. Ясно также, что любая замена может быть разбита в последовательность замен $u \mapsto u'$, $z \mapsto z$; $u' \mapsto u'$, $z \mapsto z' = a_0'z + a_1'z^2 + \cdots$ или в обратном порядке. В свою очередь, замена $u \mapsto u'$ разбивается в последовательность замен $u \mapsto u_1' = c_0$, $u_1' \mapsto u_2' = u_1' + c_1'z, \dots, u_i' \mapsto u_{i+1}' = u_i' + c_i'z^i, \dots$, а замена $z \mapsto z'$ разбивается в последовательность замен $z \mapsto z_1' = a_0 z$, $z_1' \mapsto z_2' = z_1' + a_1' z^2, \dots, z_i' \mapsto z_{i+1}' = z_i' + a_i' z^{i+1}, \dots$

Замечание 1. Необходимо отметить, что любая общая замена переменных $(*)$ задает некоторое отображение $f\colon K\to K$, которое, в отличие от случая полей, не всегда является автоморфизмом. Действительно, пусть это не так, и любая замена переменных задает автоморфизм f. Рассмотрим замену $f(z)=z'$, $f(u)=u$, где z' – какая-то новая переменная. Тогда должны иметь место равенства

$$f(zu)=f(z)f(u)=z'u=u^{\alpha'}z'+u^{\delta_1'}z'^2+\cdots,$$
$$f(zu)=f(u^{\alpha}z+u^{\delta_1}z^2+\cdots)=u^{\alpha}z'+u^{\delta_1}z'^2+\cdots.$$

Отсюда $\alpha=\alpha'$, $\delta_1=\delta_1'$ и т.д., т.е. $\delta_i'=\delta_i\ \forall i$.

Рассмотрим тело $\mathbb{Q}((u))((z))$ с соотношением $zu=(u+u^2)z$ и рассмотрим замену $z\mapsto z'=z+z^2$. Тогда

$$\begin{aligned}z'u&=(z+z^2)u=(u+u^2)z+z(u+u^2)z\\&=(u+u^2)z+[(u+u^2)z+(u+u^2)^2z]z\\&=(u+u^2)z'+[u+2u^2+2u^3+u^4-u-u^2]z^2\\&=(u+u^2)z'+[u^2+2u^3+u^4]z'^2+\cdots.\end{aligned}$$

Таким образом, здесь $\delta_1\neq\delta_1'$. Противоречие.

Предложение 3. *В любом двумерном расщепимом локальном теле K с $\alpha^n\neq\mathrm{Id}$ для всех n можно сделать замену переменных так, что $z'a=a^{\alpha}z'$ для любого a из $\overline{K}$.*

Доказательство. Доказывать утверждение будем по индукции, делая последовательно замены переменных так, чтобы в нуль последовательно обращались δ_1,δ_2.

Лемма 3 (о замене). *Пусть в K выполняется соотношение вида*

$$zaz^{-1}=a^{\alpha}+a^{\delta_j}z^j+a^{\delta_{j+1}}z^{j+1}+\cdots,$$

где $j\in\mathbb{N}$ такое, что $\delta_1=\cdots=\delta_{j-1}=0$, $\delta_j\neq0$. Тогда:

(i) *при замене $z\mapsto z'=z+bz^{q+1}$, $q\in\mathbb{N}$, имеет место соотношение*

$$z'az'^{-1}=a^{\alpha}+\cdots+a^{\delta_{q-1}}z'^{q-1}+(a^{\delta_q}+ba^{\alpha^{q+1}}-a^{\alpha}b)z'^q+\cdots,$$

т.е. $a^{\delta_q'}=a^{\delta_q}+ba^{\alpha^{q+1}}-a^{\alpha}b$;

(ii) *если $\alpha^n=1$ для некоторого n, то при замене $z\mapsto z'=z+bz^{q+1}$, где $n\mid q$, имеет место соотношение*

$$z'az'^{-1}=a^{\alpha}+\cdots+a^{\delta_{q+j-1}}z'^{q+j-1}+\Big(a^{\delta_{q+j}}+b(a^{\delta_j})^{\alpha^q}-a^{\delta_j}b^{\alpha^j}+b\sum_{k=1}^{q}((a^{\alpha^k})^{\delta_j})^{\alpha^{q-k}}-a^{\delta_j}\sum_{k=0}^{j-1}b^{\alpha^k}\Big)z'^{q+j}+\cdots;$$

(iii) *при замене $z\mapsto z'=bz$, $b\neq0$, имеет место соотношение*

$$z'az'^{-1}=a^{\alpha}+a^{\delta_j}(b^{-1})^{\alpha}\dots(b^{-1})^{\alpha^j}z'^j+\cdots.$$

Следствие 4. *Если* $\alpha = \mathrm{Id}$, *то*

$$z'az'^{-1} = a + \dots + a^{\delta_{q+j-1}} z'^{q+j-1} + (a^{\delta_{q+j}} + (q-j)a^{\delta_j} b)z'^{q+j} + \dots .$$

Доказательство леммы. (i) Имеем

$$\begin{aligned} z'az'^{-1} &= (1+bz^q)zaz^{-1}(1+bz^q)^{-1} \\ &= (zaz^{-1} + bz^q zaz^{-1})(1 - bz^q + bz^q bz^q - \dots) \\ &= (zaz^{-1} - zaz^{-1}bz^q + \dots + bz^q zaz^{-1} - \dots) \\ &= (zaz^{-1} - [a^\alpha + a^{\delta_j} z^j + \dots]bz^q + bz^q[a^\alpha + a^{\delta_j} z^j + \dots] + \dots) \\ &= (zaz^{-1} - [a^\alpha b + a^{\delta_j} b^{\alpha^j} z^j + \dots]z^q + ba^{\alpha^{q+1}} z^q + \dots) \\ &= (zaz^{-1} + (-a^\alpha b + ba^{\alpha^{q+1}})z^q + \dots) \\ &= a^\alpha + \dots + a^{\delta_{q-1}} z'^{q-1} + (a^{\delta_q} + ba^{\alpha^{q+1}} - a^\alpha b)z'^q + \dots . \end{aligned}$$

(ii) Имеем

$$\begin{aligned} z'az'^{-1} &= (1+bz^q)zaz^{-1}(1+bz^q)^{-1} = (zaz^{-1} + bz^q zaz^{-1})(1+bz^q)^{-1} \\ &= (a^\alpha + a^{\delta_j} z^j + \dots + a^{\delta_{q+j}} z^{q+j} + \dots + bz^q(a^\alpha + a^{\delta_j} z^j + \dots))(1+bz^q)^{-1} \\ &= \biggl(a^\alpha + ba^{\alpha^{q+1}} z^q + a^{\delta_j} z^j + \dots + a^{\delta_{q+j}} z^{q+j} + \dots + b\sum_{k=1}^{q}((a^{\alpha^k})^{\delta_j})^{\alpha^{q-k}} z^{q+j} \\ &\qquad + b(a^{\delta_j})^{\alpha^q} z^{q+j} + \dots\biggr)(1+bz^q)^{-1} \\ &= a^\alpha + \biggl(a^{\delta_j} z^j + \dots + a^{\delta_{q+j}} z^{q+j} + \dots + b\sum_{k=1}^{q}((a^{\alpha^k})^{\delta_j})^{\alpha^{q-k}} z^{q+j} \\ &\qquad + b(a^{\delta_j})^{\alpha^q} z^{q+j} + \dots\biggr)(1 - bz^q + bz^q bz^q - \dots) \\ &= a^\alpha + a^{\delta_j} z^j + \dots + a^{\delta_{q+j}} z^{q+j} + \dots + b\sum_{k=1}^{q}((a^{\alpha^k})^{\delta_j})^{\alpha^{q-k}} z^{q+j} \\ &\qquad + b(a^{\delta_j})^{\alpha^q} z^{q+j} + \dots - a^{\delta_j} b^{\alpha^j} z^{q+j} + \dots \\ &= a^\alpha + \dots + a^{\delta_{q+j-1}} z'^{q+j-1} + \biggl(a^{\delta_{q+j}} + b(a^{\delta_j})^{\alpha^q} - a^{\delta_j} b^{\alpha^j} \\ &\qquad + b\sum_{k=1}^{q}((a^{\alpha^k})^{\delta_j})^{\alpha^{q-k}} - a^{\delta_j}\sum_{k=0}^{j-1} b^{\alpha^k}\biggr)z'^{q+j}, \end{aligned}$$

поскольку $z'^j = z^j + \sum_{k=0}^{j-1} b^{\alpha^k} z^{q+j} + \dots$.

(iii) Имеем

$$\begin{aligned} z'az'^{-1} &= bzaz^{-1}b^{-1} = a^\alpha + ba^{\delta_j}(b^{-1})^{\alpha^j} z^j + \dots \\ &= a^\alpha + a^{\delta_j}(b^{-1})^\alpha \dots (b^{-1})^{\alpha^j} z'^j + \dots . \end{aligned}$$

Лемма 4. *Всякое* (α,β)*-дифференцирование* δ *поля* $\overline{K}$, $\alpha\neq\beta$, *является внутренним, т.е. существует* $d\in\overline{K}$ *такое, что*

$$\delta(a)=da^{\alpha}-a^{\beta}d \qquad \forall\, a\in\overline{K}.$$

Доказательство. Положим $d=\delta(a)/(a^{\alpha}-a^{\beta})$, где a – произвольный элемент такой, что $a^{\alpha}\neq a^{\beta}$. Он существует по условию $\alpha\neq\beta$. Положим $\delta_{\text{вн}}(x)=dx^{\alpha}-x^{\beta}d$. Утверждается, что $\delta=\delta_{\text{вн}}$. Действительно, рассмотрим $\bar\delta=\delta-\delta_{\text{вн}}$. Это (α,β)-дифференцирование. Пусть $b\in\overline{K}$. Тогда $\bar\delta(ab)=\bar\delta(ba)$. Но

$$\bar\delta(ab)=\bar\delta(a)b^{\alpha}+a^{\beta}\bar\delta(b)=a^{\beta}\bar\delta(b),$$

а

$$\bar\delta(ba)=\bar\delta(b)a^{\alpha}+b^{\beta}\bar\delta(a)=a^{\alpha}\bar\delta(b).$$

Отсюда $\bar\delta(b)=0$ для произвольного b.

Доказательство предложения. Пусть

$$zaz^{-1}=a^{\alpha}+a^{\delta_1}z+a^{\delta_2}z^2+\cdots.$$

Мы знаем, что δ_1 – (α^2,α)-дифференцирование (предложение 2 и следствие). Поскольку $\alpha^2\neq\alpha$, то δ_1 по лемме 4 – внутреннее дифференцирование и $\delta_1(a)=da^{\alpha^2}-a^{\alpha}d$. По лемме 3,(i) замена $z\mapsto z_2=z-d_1z^2$ дает нам

$$z_2az_2^{-1}=a^{\alpha}+a^{\delta_2'}z_2^2+\cdots,$$

причем $\delta_1'=0$. По следствию предложения 2 δ_2' – (α^3,α)-дифференцирование. Поскольку $\alpha^3\neq\alpha$, оно опять внутреннее, и мы можем применить лемму 3. При этом замена будет выглядеть как $z_2\mapsto z_3=z_2-d_2z_2^3$.

Рассуждая по индукции, на k-м шаге имеем

$$z_kaz_k^{-1}=a^{\alpha}+a^{\delta_k'}z_k^k+\cdots,$$

причем $\delta_j'=0$ при $j<k$. По следствию предложения 2 δ_k' – (α^{k+1},α)-дифференцирование. Поскольку $\alpha^{k+1}\neq\alpha$, оно опять внутреннее, и мы можем применить лемму 3. При этом замена будет выглядеть как $z_k\mapsto z_{k+1}=z_k-d_kz_k^{k+1}$.

Таким образом, мы получили, что последовательность замен $\{z_n\}$: $z_{n+1}=z_n-d_nz_n^{n+1}$, обращает в нуль все δ_i. Последовательность $\{z_n\}$, очевидно, сходится в K. В силу полноты и отделимости топологии по первому нормированию ν у нее существует единственный предел z. Он и будет, очевидно, искомым элементом для замены, для которого все отображения $\delta_i=0$, $i\geqslant 1$. Предложение доказано.

Теорема 1. *Пусть* K *– двумерное локальное тело, у которого первое тело вычетов – поле, и для всех* $n\in\mathbb{N}$ $\alpha^n\neq 1$. *Тогда*:

(i) $\operatorname{char}K=\operatorname{char}\overline{K}$;

(ii) *существует гомоморфизм* $\overline{K}\hookrightarrow\mathcal{O}\subset K$, *являющийся сечением отображения* $\mathcal{O}\mapsto\overline{K}$.

Доказательство. Доказательство разобьем на следующие шаги.

Шаг 0. Докажем, что $\operatorname{char} K = \operatorname{char} \overline{K}$.

Действительно, если это не так, то имеем $\operatorname{char} \overline{K} = l > 0$. Следовательно, $\nu(l) = r > 0$. Но тогда для любого элемента $t \in K$ такого, что $\nu(t) = 0$, имеем $ltl^{-1} \bmod \wp = \bar{t}^{\alpha^r}$, где $\bar{t}$ – образ t в $\overline{K}$. Доказательство этого факта следует из того, что $l = z^r u$, где u – единица в кольце $\mathscr{O}$, и совпадает с доказательством того, что α не зависит от выбора локального параметра z. С другой стороны, $lt = tl$, т.е. $ltl^{-1} \bmod \wp = \bar{t}$, что противоречит тому, что $\alpha^r \neq \mathrm{Id}$.

Шаг 1. Ясно, что простое поле вкладывается в $\mathscr{O}$. Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 5. *В $\overline{K}$ существует элемент c такой, что $c^{\alpha^k} \neq c \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Поскольку $\overline{K}$ – одномерное локальное поле, в нем есть фильтрация, определенная нормированием $\overline{\nu}$. Утверждается, что можно найти в $\overline{\mathscr{O}}$ последовательность $\{c_{j_i}\}$, $j_i, i \in \mathbb{N}$, со следующими свойствами:

(i) $\overline{\nu}(c_{j_i}) > \overline{\nu}(c_{j_{i-1}}) \ \forall\, i$;

(ii) если $k \in \mathbb{N}$: $k = 0 \bmod j_2 \dots j_l$ и $k \neq 0 \bmod j_2 \dots j_{l+1}$, то $\alpha^k(c_{j_1}) = c_{j_1}, \dots, \alpha^k(c_{j_{l-1}}) = c_{j_{l-1}}$, $\alpha^k(c_{j_l}) \neq c_{j_l}$ и

$$\overline{\nu}[(\alpha^k - \mathrm{Id})(c_{j_l})] < \overline{\nu}(c_{j_{l+1}}).$$

Будем строить ее по индукции следующим образом: выберем c_{j_1} таким, что $\alpha(c_{j_1}) \neq c_{j_1}$ и $\overline{\nu}(c_{j_1}) \geqslant 1$. Это всегда можно сделать: пусть u – элемент с $\overline{\nu}(u) = 1$. Если $\alpha(u) \neq u$, то в качестве c_{j_1} можно взять u. Если же $\alpha(u) = u$, то выберем какой-нибудь элемент c_{j_1} такой, что $\alpha(c_{j_1}) \neq c_{j_1}$. Если $\overline{\nu}(c_{j_1}) = 0$, то положим $\tilde{c}_{j_1} := c_{j_1}u$. Тогда $\overline{\nu}(\tilde{c}_{j_1}) = 1$ и $\alpha(c_{j_1}u) = \alpha(c_{j_1})u \neq c_{j_1}u$. Индекс j_1 положим равным 1.

Пусть j_2 – наименьшее число: $(\alpha^{j_1})^{j_2}(c_{j_1}) = c_{j_1}$, а $k_1 = \max\{\overline{\nu}[(\alpha^{j_1})^m(c_{j_1}) - c_{j_1}],\ m \in \{1, \dots, j_2 - 1\}\}$. Выберем $\tilde{c}_{j_2}$: $(\alpha^{j_1})^{j_2}(\tilde{c}_{j_2}) \neq \tilde{c}_{j_2}$. Положим $c_{j_2} = \tilde{c}_{j_2} c_{j_1}^{k_1+1}$. Тогда $(\alpha^{j_1})^{j_2}(c_{j_2}) \neq c_{j_2}$ и $\overline{\nu}[(\alpha^{j_1})^m(c_{j_1}) - c_{j_1}] < \overline{\nu}(c_{j_2}) \ \forall\, m < j_2$.

Далее действуем по индукции. В итоге получим последовательность, у которой свойства (i) и (ii) выполняются по построению.

Теперь положим $c = \sum_{i=1}^{\infty} c_{j_i}$. Тогда $\forall\, k \ \ \alpha^k(c) \neq c$. Действительно, пусть $k = 0 \bmod j_2 \dots j_l$ и $k \neq 0 \bmod j_2 \dots j_{l+1}$. Тогда в силу (ii)

$$\alpha^k(c) - c = \alpha^k(c_{j_l}) - c_{j_l} + \alpha^k\biggl(\sum_{i=l+1}^{\infty} c_{j_l}\biggr) - \sum_{i=l+1}^{\infty} c_{j_l}.$$

Но $\overline{\nu}(\alpha^k(c_{j_l}) - c_{j_l}) < \overline{\nu}(c_{j_{l+1}}) \leqslant \overline{\nu}\bigl(\alpha^k\bigl(\sum_{i=l+1}^{\infty} c_{j_l}\bigr) - \sum_{i=l+1}^{\infty} c_{j_l}\bigr)$. Отсюда имеем $\alpha^k(c) - c \neq 0$.

Обозначим через Π простое поле. Пусть $\overline{F} = \Pi(c) \subset K$. Покажем, что это поле всегда можно вложить в $\mathscr{O}$.

Возьмем любой подъем $c' \in \mathscr{O}$ элемента c: $c' \bmod \wp = c$. Очевидно, что c' коммутирует с любым элементом из простого поля. Легко видеть, что c трансцендентен над простым полем. Действительно, если бы он был алгебраичен, то его уравнение по модулю $\wp$ имело бы бесконечное число решений, так как $c^{\alpha^k} \neq c \ \forall k$, а этого не может быть. Поэтому кольцо $\Pi[c']$ не пересекается с $\wp$, т.е. $\Pi[c'] \cap \wp = 0$. Таким образом, поле частных $\overline{F}$ этого кольца можно вложить в $\mathcal{O}$.

Пусть теперь $\bar{L}$ – некоторое максимальное расширение поля $\overline{F}$, для которого имеется вложение в $\mathcal{O}$, $L \subset \mathcal{O}$ – образ при вложении, и пусть $\bar{a} \in \overline{K}$, $\bar{a} \notin \bar{L}$, – некоторый элемент. Наша цель – доказать, что существует такой элемент $a \in \mathcal{O}$, что $a \mod \wp = \bar{a}$ и a коммутирует с любым элементом из L.

Шаг 2. Покажем, что элемент a с указанными свойствами существует. Возьмем произвольный элемент a такой, что $a \mod \wp = \bar{a}$. Пусть $x \in L$ – произвольный элемент. Рассмотрим теперь элемент axa^{-1}. Имеем $axa^{-1} \mod \wp = x$, так как тело вычетов $\overline{K}$ – поле. Выберем в K элемент z такой, что $\nu(z) = 1$. Тогда axa^{-1} можно записать в виде

$$axa^{-1} = x + x^{\delta_1'} z,$$

где $x^{\delta_1'} \in \mathcal{O}$ – некоторый элемент. Легко проверить, что отображение $\bar{\delta}_1'$, ставящее в соответствие элементу x элемент $\overline{x^{\delta_1'}} \in \overline{K}$, является α-дифференцированием на L со значениями в $\overline{K}$:

$$\begin{aligned} a(x_1+x_2)a^{-1} &= (x_1+x_2) + (x_1+x_2)^{\delta_1'} z, \\ a(x_1+x_2)a^{-1} &= ax_1a^{-1} + ax_2a^{-1} = x_1 + x_1^{\delta_1'} z + x_2 + x_2^{\delta_1'} z \\ &= (x_1+x_2) + (x_1^{\delta_1'} + x_2^{\delta_1'})z. \end{aligned}$$

Отсюда $\overline{(x_1+x_2)^{\delta_1'}} = \overline{x_1^{\delta_1'}} + \overline{x_2^{\delta_1'}}$. Далее, имеем

$$a(x_1x_2)a^{-1} = (ax_1a^{-1})(ax_2a^{-1}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} x_1x_2 + (x_1x_2)^{\delta_1'} z &= (x_1 + x_1^{\delta_1'} z)(x_2 + x_2^{\delta_1'} z) \\ &= x_1x_2 + x_1x_2^{\delta_1'} z + x_1^{\delta_1'} z x_2 + x_1^{\delta_1'} z x_2^{\delta_1'} z \\ &\equiv x_1x_2 + x_1x_2^{\delta_1'} z + x_1^{\delta_1'} x_2^{\alpha} z \mod \wp^2 \\ &= x_1x_2 + (x_1^{\delta_1'} x_2^{\alpha} + x_1x_2^{\delta_1'})z \mod \wp^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\overline{(x_1x_2)^{\delta_1'}} = \overline{x_1^{\delta_1'}}\,\overline{x_2^{\alpha}} + \overline{x_1}\,\overline{x_2^{\delta_1'}} = \overline{x_1^{\delta_1'}} x_2^{\alpha} + x_1 \overline{x_2^{\delta_1'}}.$$

По лемме 4 $\bar{\delta}_1'$ – внутреннее α-дифференцирование. Положим $\tilde{a}_1 := (1 + a_1z)a$, где $a_1 \mod \wp = -d$, если $\bar{\delta}_1'(x) = d(x^{\alpha} - x)$. Тогда, используя те же самые выкладки, что были проведены в лемме о замене, имеем

$$(1+a_1z)axa^{-1}(1+a_1z)^{-1} = x + (x^{\delta_1'} + a_1x^{\alpha} - xa_1)z + \text{чл. из } \wp^2.$$

Так как $x^{\delta_1'} + a_1 x^\alpha - x a_1 = 0 \mod \wp$, получаем, что $\tilde a_1 x \tilde a_1^{-1} = x + x^{\delta_2'} z^2$. Так же, как и выше, проверяется, что $\bar\delta_2'\colon L \to \overline{K}$ – α^2-дифференцирование. Пользуясь индуктивными рассуждениями (аналогичными тем, что в предложении 3), получаем, что существует $\tilde a_i = (1 + a_i z^i)\dots(1 + a_1 z)a$:

$$\tilde a_i x \tilde a_i^{-1} = x + x^{\delta_{i+1}'} z^{i+1},$$

и $\bar\delta_{i+1}'\colon L \to \overline{K}$ – α^{i+1}-дифференцирование. Чтобы завершить индуктивное рассуждение, применим лемму 4. Получаем, что $\bar\delta_{i+1}'$ – внутреннее дифференцирование. Полагая $\tilde a_{i+1} = (1 + a_{i+1} z^{i+1})\tilde a_i$ для подходящего a_{i+1} и пользуясь опять выкладками из леммы о замене, завершаем шаг индукции:

$$\tilde a_{i+1} x \tilde a_{i+1}^{-1} = x + x^{\delta_{i+2}'} z^{i+2} \qquad \forall\, x \in L.$$

Поскольку последовательность $\tilde a_i$ в K, очевидно, сходится, и $\tilde a_i \mod \wp = a$, получаем, что искомый элемент равен ее пределу.

Шаг 3. В ситуации шага 1 предположим, что $\bar a$ – элемент, трансцендентный над $\overline{K}$. Тогда существует его подъем $a \in \mathcal{O}$ такой, что a коммутирует с любым элементом из L. В этом случае $L[a] \cap \wp = 0$ и поле частных $L(a)$ вкладывается в $\mathcal{O}$, т.е. мы нашли поле, содержащее максимальное поле L. Следовательно, мы можем считать, что $\overline{K}$ алгебраично над L.

Пусть теперь $\bar a$ – алгебраический сепарабельный элемент над $\bar L$. Взяв его подъем a, коммутирующий с любым элементом из L, и применив лемму Гензеля (см. ниже), получим, что существует подъем $a' \in \mathcal{O}$ такой, что a' коммутирует с любым элементом из L и a' алгебраичен над L. Следовательно, поле $\bar L(a')$ вкладывается в $\mathcal{O}$.

Наконец, пусть $\bar a$ – чисто несепарабельный элемент над $\bar L$. Рассмотрим его подъем a, коммутирующий с любым элементом из L. Тогда $a^{l^k} \mod \wp = x \in L$, где $l = \operatorname{char} K$. Поэтому элемент $a^{l^k} - x$ коммутирует с любым элементом из L. Если он не равен нулю, то пусть $\nu(a^{l^k} - x) = r$. Тогда так же, как в шаге 0, получаем, что $(a^{l^k} - x)c(a^{l^k} - x)^{-1} \mod \wp = c^{\alpha^r} \neq c$. Из этого противоречия следует, что $a^{l^k} - x = 0$. Следовательно, поле $\bar L(a)$ вкладывается в $\mathcal{O}$. Теорема доказана.

Предложение 4 (лемма Гензеля[1]). *Пусть $\mathcal{O}$ – полное кольцо нормирования в теле K, I – идеал нормирования, $\bigcap_{n=1}^\infty I^n = 0$ и F – подполе, лежащее в $\mathcal{O}$. Предположим, что $A \in \mathcal{O}$ таков, что $\forall\, l \in F \quad Al = lA$. Пусть $f(X) \in F[X]$, $f'(A) \notin I$ и $f(A) \in I$. Тогда найдется такой элемент $\hat A \in \mathcal{O}$, что*:

а) *$\hat A$ коммутирует с A*;

б) $\hat A - A \in I$;

в) $f(\hat A) = 0$;

г) $\hat A l = l\hat A \quad \forall\, l \in F$.

[1] Идея доказательства этой леммы была подсказана Н. И. Дубровиным.

Доказательство. Для элемента $\tilde{A}$, коммутирующего с A, имеем

$$f(A+\tilde{A}) = f(A) + f'(A)\tilde{A} + P\tilde{A}^2$$

для некоторого элемента $P \in F[A,\tilde{A}]$. Здесь мы применили формулу Тейлора. Возьмем $\tilde{A} = -(f'(A))^{-1}f(A)$. Ясно, что $\tilde{A} \in I$ и что $\tilde{A}$ коммутирует с A. Кроме того, $\tilde{A}$ коммутирует с любым элементом из F. Тогда $f(A+\tilde{A}) = P\tilde{A}^2 \in I^2$, а $f'(A+\tilde{A}) = f'(A) + X\tilde{A} \notin I$, где $X \in F[A,\tilde{A}]$. Точно так же находим элемент $\tilde{A}_2 = -(f'(A+\tilde{A}))^{-1}f(A+\tilde{A}) \in I^2$, коммутирующий с A, $\tilde{A}$ и любым элементом из F и такой, что

$$f(A+\tilde{A}+\tilde{A}_2) \in I^4.$$

Продолжая процесс, построим искомый элемент $\hat{A} = A + \tilde{A} + \tilde{A}_2 + \cdots$ как сумму ряда, сходящегося в силу полноты кольца $\mathscr{O}$.

Замечание 2. Если $\alpha^n = \mathrm{Id}$, то утверждение теоремы неверно (см. пример в § 3).

Следствие 5. *Предложение* 3 *справедливо для любого двумерного локального тела.*

Теорема 2. *Пусть K, K' – двумерные локальные тела, для которых $\alpha^n \neq \mathrm{Id}$, $\alpha'^n \neq \mathrm{Id}$ для всех n, и тело вычетов $\overline{K}$ коммутативно. Тогда*:

(i) *тело K изоморфно телу вида $\overline{K}((z))$, $za = a^{\alpha}z$, $a \in \overline{K}$, где $\overline{K}$ – одномерное локальное поле с полем вычетов k*;

(ii) *K изоморфно K' тогда и только тогда, когда $k \cong k'$ и существует такой изоморфизм $f\colon \overline{K} \mapsto \overline{K}'$, что $\alpha = f^{-1}\alpha' f$.*

Доказательство следует из следствия 5, а также из известного факта о классификации одномерных локальных полей с данным полем вычетов (см., например, [2]).

Определение 6. Пусть $\overline{K}$ – одномерное локальное поле с полем вычетов k, $\mathrm{char}\,\overline{K} = \mathrm{char}\,k$, α – автоморфизм поля $\overline{K}$, сохраняющий естественную фильтрацию поля $\overline{K}$. Положим $a_1 = \alpha(u)u^{-1} \bmod \wp \in k$ и определим $i_\alpha \in \mathbb{N}\cup\infty$ так: $i_\alpha = 1$, *если a_1 не является корнем из* 1 *в k, а иначе* $i_\alpha = \overline{\nu}((\alpha^n - \mathrm{Id})(u))$, где $n \geqslant 1$: $a_1^n = 1$, $a_1^m \neq 1$ $\forall\, m < n$.

Лемма 6. *Пусть k – произвольное поле характеристики нуль. Всякий k-автоморфизм α поля $k((u))$ с $\alpha(u) = \xi u + a_2u^2 + \cdots$, где $\xi^n = 1$, $n \geqslant 1$, $\xi^m \neq 1$ при $m < n$, сопряжен с автоморфизмом β: $\beta(u) = \xi u + xu^{i_\alpha} + yu^{2i_\alpha - 1}$, где $x \in k^*$, $y \in k$, x и y зависят от α. Кроме того, $i_\alpha = i_\beta$.*

Доказательство. Покажем сначала, что α сопряжен с автоморфизмом β': $\beta'(u) = \xi u + xu^{in+1} + yu^{2in+1}$, где i – какое-то натуральное число. После этого мы докажем, что $in+1 = i_\alpha$.

Будем искать автоморфизм f: $f(u) = u + x_2u^2 + \cdots$, такой, что $\alpha f = f\beta'$:

$$\begin{aligned}\alpha f(u) &= (\xi u + a_2u^2 + \cdots) + x_2(\xi u + a_2u^2 + \cdots)^2 + \cdots = f\beta'(u)\\ &= \xi(u + x_2u^2 + \cdots) + x(u + x_2u^2 + \cdots)^{in+1} + y(u + x_2u^2 + \cdots)^{2in+1}.\end{aligned}$$

Положим $i = 1$ и выпишем уравнения на коэффициенты x_i при степенях u в этом равенстве.

Первое уравнение (при u^2): $x_2\xi^2 + a_2 = \xi x_2$.

$(n-1)$-е уравнение (при u^n): $x_n\xi^n +$ члены с x_j, $j < n + a_n = \xi x_n$.

Все эти уравнения однозначно разрешимы, поскольку $\xi^j \neq \xi \ \ \forall j < n+1$. Выпишем следующее уравнение.

n-е уравнение: $x_{n+1}\xi^{n+1} +$ члены с x_j, $j < n + 1 + a_{n+1} = \xi x_{n+1} + x$.

В этом уравнении сокращается переменная x_{n+1}, и мы получаем однозначно разрешимое уравнение на x. Если получим, что $x = 0$, полагаем $i := i+1$ и выписываем уравнения дальше. На каком-то шаге мы получим, что $x \neq 0$. При этом у нас будут определены все коэффициенты x_l: $n \nmid l-1$. Нетрудно видеть, что все следующие k-е уравнения при $n \nmid k$ однозначно разрешимы по x_k.

Таким образом, $\alpha = f^{-1}\alpha' f$, где $\alpha'(u) = \xi u + x u^{in+1} + \cdots$, а $f^{-1} = \prod_{k=1,n|k}^{in} f_k$, где $f_k(u) = u + x_{k+1}u^{k+1}$, причем x_k однозначно определены. Следовательно, мы можем заменить α на α' и считать, что $a_q = 0$ при $q < in+1$ (соответственно $x_q = 0$ при $q < in+1,\ n \nmid q$). Используя аналогичные рассуждения и индукцию, можно получить произвольное уравнение на $x_q,\ q < in+1,\ n \mid q$, в виде

$$a_{q+in} + qxx_q = (in+1)xx_q$$

(здесь мы считаем, что $x_k,\ k < q$, уже определены и $a_k = 0,\ k < q + in$). Отсюда получаем единственное решение на x_q.

Уравнение при u^{2in+1} будет иметь вид

$$a_{2in+1} + (in+1)xx_{in+1} = (in+1)xx_{in+1} + y,$$

откуда получаем значение y. Из единственности значений x_q следует инвариантность x и y в классе сопряженности $f^{-1}\alpha f$, где $f(u) = u + \cdots$. Все остальные уравнения при степенях u, кратных n, будут иметь вид

$$a_{q+in} + qxx_q = (in+1)xx_q + \text{члены с } x_k, \qquad k < q.$$

Поскольку $q > in+1$, все они являются разрешимыми относительно x_q, откуда следует искомое рассуждение.

Покажем теперь, что $in+1 = i_\alpha$. Несложным рассуждением по индукции можно вывести, что

$$\beta'^n(u) = u + x\xi^{-in-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1}(\xi^{in})^j\right)u^{in+1} + \cdots = u + x\xi^{-in-1}nu^{in+1} + \cdots.$$

Таким образом, $i_{\beta'} = in+1$. Мы знаем, что $f^{-1}\alpha f = \beta'$. Следовательно, $f^{-1}(\alpha^n - \mathrm{Id})f = \beta'^n - \mathrm{Id}$, поэтому $\overline{\nu}(f^{-1}(\alpha^n - \mathrm{Id})f(u)) = \overline{\nu}((\beta'^n - \mathrm{Id})(u)) = i_{\beta'}$.

Пусть $f(u) = u' = f_1u + f_2u^2 + \cdots,\ \ f_1 \neq 0$. Покажем, что $\overline{\nu}f^{-1}(\alpha^n - \mathrm{Id})(u') = i_\alpha$. Для этого достаточно показать, что $\overline{\nu}(\alpha^n - \mathrm{Id})(u') = i_\alpha$. Имеем

$$\begin{aligned}(\alpha^n - \mathrm{Id})(u') &= [f_1(u + \bar{a}_{i_\alpha}u^{i_\alpha} + \cdots) + f_2(u + \bar{a}_{i_\alpha}u^{i_\alpha} + \cdots)^2 + \cdots] \\ &\quad - [f_1u + f_2u^2 + \cdots] = [(f_1u + f_1\bar{a}_{i_\alpha}u^{i_\alpha} + \text{чл. с } u^{>i_\alpha}) + (f_2u^2 + \text{чл. с } u^{>i_\alpha}) \\ &\quad + (f_3u^3 + \text{чл. с } u^{>i_\alpha}) + \cdots] - [f_1u + f_2u^2 + \cdots] = f_1\bar{a}_{i_\alpha}u^{i_\alpha} + \text{чл. с } u^{>i_\alpha}.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Предложение 5. *Пусть $\overline{K}$ – одномерное локальное поле с полем вычетов k и $\operatorname{char}\overline{K} = \operatorname{char} k$, k алгебраически замкнуто, $\operatorname{char} k = 0$, и пусть α, β – два автоморфизма поля $\overline{K}$. Тогда $\overline{K} = k((u))$ и $\alpha = f^{-1}\beta f$ (где f – некоторый автоморфизм поля $\overline{K}$) тогда и только тогда, когда $(a_1, i_\alpha, y(\alpha)) = (b_1, i_\beta, y(\beta))$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докажем второе.

Легко видеть, что если $\alpha = f^{-1}\beta f$, то $a_1 = b_1$.

Пусть в условии леммы 6 ξ не является корнем из 1. Тогда из доказательства легко следует, что α сопряжен с β: $\beta(u) = \xi u$, поскольку все выписывавшиеся уравнения в этом случае однозначно разрешимы в том случае, когда $x = y = 0$. Отсюда мы получаем доказательство предложения для случая, когда $i_\alpha = i_\beta = 1$.

Пусть теперь $i_\alpha = i_\beta \neq 1$, $a_1 = b_1$ – корни из 1.

Лемма 7. *В обозначениях леммы 6 пусть β, β' – k-автоморфизмы поля $k((u))$: $\beta(u) = \xi u + xu^{in+1} + yu^{2in+1}$, $\beta'(u) = \xi u + \bar{x}u^{in+1} + \bar{y}u^{2in+1}$, где $\bar{x}/x \in (k^*)^{in}$, $\bar{y} = (\bar{x}/x)^2 y$. Тогда β и β' сопряжены.*

Доказательство. Положим $x_0 = (\bar{x}/x)^{(in)^{-1}}$. Пусть f – автоморфизм: $f(u) = x_0 u$. Тогда

$$f\beta(u) = \xi x_0 u + x(x_0 u)^{in+1} + y(x_0 u)^{2in+1} = x_0\xi u + x_0\bar{x}u^{in+1} + x_0\bar{y}u^{2in+1} = \beta' f(u).$$

Из этой и предыдущей леммы непосредственно вытекает, что если k – алгебраически замкнуто, то любые два автоморфизма α, β с равными тройками данных $(a_1, i_\alpha, y(\alpha)), (b_1, i_\beta, y(\beta))$ сопряжены. Предложение доказано.

Следствие 6. *Пусть выполняются все условия предложения, кроме условия, что поле k алгебраически замкнуто. Пусть $\alpha^n = \mathrm{Id}$. Тогда в $k((u))$ существует такой параметр u', что $\alpha(u') = a_1 u'$.*

Доказательство следует из леммы 6.

Из предложения вытекает также следующий результат.

Теорема 3. *Пусть K, K' – двумерные локальные тела с последними полями вычетов k, k' и каноническими автоморфизмами α, α'. Предположим, что $\operatorname{char} K = \operatorname{char} k$, $\operatorname{char} K' = \operatorname{char} k'$, для всех $n \in \mathbb{N}$ $\alpha^n \neq \mathrm{Id}$, $\alpha'^n \neq \mathrm{Id}$ и поля k, k' алгебраически замкнуты характеристики нуль. Тело K изоморфно K' тогда и только тогда, когда $k \cong k'$ и $(a_1, i_\alpha, y(\alpha)) = (a_1', i_{\alpha'}, y(\alpha'))$.*

Перейдем теперь к изучению тел с $\alpha^n = 1$.

§ 3. Классификация расщепимых тел характеристики нуль

Начиная с этого места, будем предполагать, что $k \subset K$, $k \subset \overline{K}$ и эти вложения согласованы с локальной структурой. Будем предполагать также, что k принадлежит центру K: $k \subset Z(K)$, отображения δ_i, $i \geqslant 1$, непрерывны (см. следствие 3) и что тело K расщепимо.

При этих уловиях $\operatorname{char} k = \operatorname{char} \overline{K} = \operatorname{char} K$ и $\overline{K} \simeq k((u))$. Это следует из теоремы Коэна для одномерных локальных полей, так как у нас есть вложение поля вычетов в $\overline{K}$. Как следует из леммы о замене и из доказательства следствия 3, свойство непрерывности отображений δ_i, $i \geqslant 1$, не зависит от их определения, т.е. от выбора параметра z (и u).

Разберем сначала случай, когда $\alpha = \mathrm{Id}$.

Определение 7. Положим

$$i = \nu((\phi_z - 1)(u)) \in \mathbb{N} \cup \infty,$$
$$r = \overline{\nu}[((\phi_z - 1)(u))z^{-i} \bmod \wp] \bmod i \in \mathbb{Z}/i\mathbb{Z},$$

где u, z – произвольные локальные параметры тела K, $\phi_z\colon K \to K$, $\phi_z(a) = ad(z)(a)$.

Предложение 6. *i и r не зависят от выбора параметров u и z.*

Доказательство. Поскольку тело K расщепимо, фиксируем какое-нибудь представление его в виде $K \cong k((u))((z))$. Пусть u', z' – другие параметры. Тогда

$$u' = (x_0 u + x_1 u^2 + \cdots) + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots, \quad x_i \in k, \quad c_i \in k((u)), \quad x_0 \neq 0,$$
$$z' = a_0 z + a_1 z^2 + \cdots, \quad a_i \in k((u)), \quad a_0 \neq 0.$$

Положим $z'' = a_0^{-1} z'$. Ясно, что $\nu((\phi_{z''} - 1)(u)) = \nu((\phi_{z'} - 1)(u))$. С другой стороны, по следствию 4 $\nu((\phi_{z'} - 1)(u)) = \nu((\phi_z - 1)(u))$. Таким образом, от выбора параметра z число i не зависит.

Покажем теперь, что $\nu((\phi_z - 1)(u')) = \nu((\phi_z - 1)(u))$. Это сразу вытекает из следующей леммы.

Лемма 8 (вторая лемма о замене). *Пусть в K выполняется соотношение вида*

$$zuz^{-1} = u^\alpha + u^{\delta_j} z^j + \cdots,$$

где j такое, что $\delta_1 = \cdots = \delta_{j-1} = 0$, $\delta_j \neq 0$, $\alpha^n = 1$. Тогда:

(i) *при замене $u \mapsto u' = u + bz^q$, $n \mid q$, имеет место соотношение*

$$zu'z^{-1} = u'^\alpha + u'^{\delta_1} z + \cdots + u'^{\delta_{q-1}} z^{q-1} + u'^{\delta_q} z^q + \cdots,$$

где $u'^{\delta_q} = u^{\delta_q} + b^\alpha - \partial/\partial u(u^\alpha)b$, $u'^{\delta_k} = u^{\delta_k}$, если $k < q$;

(ii) *если $\alpha(u) = \xi u$, $\xi \in k$, $\xi^n = 1$ для некоторого n, то при замене $u \mapsto u' = u + bz^q$, $n \mid q$, имеет место соотношение*

$$zu'z^{-1} = \xi u' + \cdots + (u^{\delta_q} + b^\alpha - \xi b)z^q + \cdots + u'^{\delta_{q+j-1}} z^{q+j-1} + u'^{\delta_{q+j}} z^{q+j} + \cdots,$$

где $u'^{\delta_{q+j}} = u^{\delta_{q+j}} + b^{\delta_j} - \partial/\partial u(u^{\delta_j})b$;

(iii) *если $\alpha = 1$, то при замене $u \mapsto u' = x_0 u + x_1 u^2 + \cdots$, где $x_q \in k$, $x_0 \neq 0$, имеет место соотношение*

$$zu'z^{-1} = u' + \left(u^{\delta_j} \frac{\partial}{\partial u} u'\right) z^j + \cdots.$$

Доказательство. (i) Имеем

$$\begin{aligned}zu'z^{-1} &= z(u+bz^q)z^{-1} = u^{\alpha} + u^{\delta_1}z + \dots + (b^{\alpha} + b^{\delta_1}z + \dots)z^q\\ &= u^{\alpha} + u^{\delta_1}z + \dots + (u^{\delta_q} + b^{\alpha})z^q + \dots\\ &= u'^{\alpha} + u'^{\delta_1} + \dots + (u^{\delta_q} + b^{\alpha} - \partial/\partial u(u^{\alpha})b)z^q + \dots ,\end{aligned}$$

так как

$$u'^{\delta_1} = (u+bz^q)^{\delta_1} = x_0(u+bz^q) + x_1(u+bz^q)^2 + \dots = u^{\delta_1} + \frac{\partial}{\partial u}(u^{\delta_1})bz^q + \dots ,$$

если $u^{\delta_1} = x_0u + x_1u^2 + \dots$.

(ii) Имеем

$$\begin{aligned}zu'z^{-1} &= z(u+bz^q)z^{-1} = \xi u + u^{\delta_j}z^j + \dots + (b^{\alpha} + b^{\delta_j}z^j + \dots)z^q\\ &= \xi u + u^{\delta_j}z^j + \dots + (u^{\delta_q} + b^{\alpha})z^q + u^{\delta_{q+1}}z^{q+1} + \dots + u^{\delta_{q+j-1}}z^{q+j-1}\\ &\quad + (u^{\delta_{q+j}} + b^{\delta_j})z^{q+j} + \dots = \xi u' + \dots + (u^{\delta_q} + b^{\alpha} - \xi b)z^q\\ &\quad + u'^{\delta_{q+1}}z^{q+1} + \dots + u'^{\delta_{q+j-1}}z^{q+j-1} + \left(u^{\delta_{q+j}} + b^{\delta_j} - \frac{\partial}{\partial u}(u^{\delta_j})b\right)z^{q+j}.\end{aligned}$$

(iii) Имеем

$$zu'z^{-1} = x_0(u+u^{\delta_j}z^j+\dots)+x_1(u+u^{\delta_j}z^j+\dots)^2+\dots = u' + \left(u^{\delta_j}\frac{\partial}{\partial u}u'\right)z^j + \dots .$$

Таким образом, от выбора параметров u и z число i не зависит.

Докажем то же для r. По лемме 8 при замене u на u' имеем

$$zu'z^{-1} = u' + \left(u^{\delta_i}\frac{\partial}{\partial u}u'\right)z^i + \dots .$$

Поэтому $\overline{\nu}[((\phi_z-1)(u'))z^{-i}] = \overline{\nu}(u^{\delta_i}) = \overline{\nu}[((\phi_z-1)(u'))z^{-i}]$.

При замене z на z' имеем

$$z'uz'^{-1} = zuz^{-1} \bmod \wp^i.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}&\overline{\nu}[((\phi_{z'}-1)(u))z'^{-i} \bmod \wp] = \overline{\nu}[((\phi_z-1)(u))z'^{-i} \bmod \wp] =\\ &\quad = \overline{\nu}[((\phi_z-1)(u))z^{-i} \bmod \wp] + \overline{\nu}(a_0^{-i}) = \overline{\nu}[((\phi_z-1)(u))z^{-i} \bmod \wp] \bmod i.\end{aligned}$$

Определение 8. Положим

$$a = \operatorname{res}_u\left\{\frac{u^{\delta_{2i}-\frac{i+1}{2}\delta_i^2}}{(u^{\delta_i})^2}\,du\right\} \in k.$$

Предложение 7. *$a = a(u^{\delta_{i+1}}, \dots, u^{\delta_{2i-1}})$, т.е. a зависит только от $u^{\delta_{i+1}}, \dots, u^{\delta_{2i-1}}$.*

Доказательство. Для доказательства предложения достаточно показать, что a не зависит от замен переменных, сохраняющих $\delta_{i+1}, \dots, \delta_{2i-1}$. При этом можно считать, что $\delta_{i+1} = 0, \dots, \delta_{2i-1} = 0$, так как всегда существует замена, переводящая $\delta_{i+1}, \dots, \delta_{2i-1}$ в нуль. Для этого нужно делать последовательные замены типа $z \mapsto z' = z + bz^{j+1}$. По следствию 4 для каждого из указанных j существует элемент b такой, что $\delta'_j(u) = 0$.

Покажем сначала, что любая замена $u \mapsto u' = u + c_1 z + \dots + c_i z^i$ эквивалентна замене $z \mapsto z' = z + a_1 z^2 + \cdots$, $u \mapsto u' = u + c'_i z^i + \cdots$, т.е. отображения δ_j будут при обеих заменах одинаковыми. Доказывать это будем по индукции.

Указанную замену можно разбить на последовательность замен $u \mapsto u_1 = u + c_i z^i$, $u_1 \mapsto u_2 = u_1 + c_{i-1} z^{i-1}, \dots, u_{i-1} \mapsto u_i = u_{i-1} + c_1 z$. Поэтому нам достаточно доказать, что для произвольного j замена $u_j \mapsto u_{j+1} = u_j + c_{i-j} z^{i-j}$ представляется в нужном виде.

Для первой замены утверждение тривиально. Рассмотрим произвольную j-ю замену. Из леммы 8 мы знаем, что первое изменяющееся отображение при такой замене – это δ_{2i-j}. По лемме 3, (ii) существует замена, которая изменяет δ_{2i-j} таким же образом. Для того чтобы воспользоваться индуктивным предположением и закончить доказательство, нужно проверить, что при композиции замены $u_j \mapsto u_{j+1}$ с обратной ей заменой $z \mapsto z' = z + a_{i-j} z^{i-j+1}$ отображение δ_{2i} изменяется на замену $u \mapsto u' = u + bz^i$, т.е. при такой замене новое отображение δ'_{2i} совпадает с новым отображением δ''_{2i}, получающимся при композиции указанных замен. Из леммы 8 мы знаем, что это так, если и только если

$$\operatorname{res}_{u_{j+1}} \frac{(\delta''_{2i} - \delta_{2i})(u_{j+1})}{(u_{j+1}^{\delta_i})^2}\, du_{j+1} = 0.$$

Замена $u_j \mapsto u_{j+1}$ – это замена $u \mapsto u_{j+1} = u + c_{i-j} z^{i-j} + \dots + c_i z^i$. Последняя замена разбивается на две: $u \mapsto u' = u + c_{i-j} z^{i-j}$ и $u' \mapsto u'' = u' + c_{i-j+1} z^{i-j+1} + \dots + c_i z^i$. Вторая замена не влияет на δ_{2i-j}, поэтому в силу индуктивного предположения достаточно доказать равенство нулю вычета для композиции замен $u \mapsto u' = u + c_{i-j} z^{i-j}$ и $z \mapsto z' = z + a_{i-j} z^{i-j+1}$.

Пользуясь леммой 8, мы можем вычислить a_{i-j}:

$$a_{i-j} = \frac{\partial}{\partial u}((ju^{\delta_i})^{-1} c_{i-j}) u^{\delta_i}.$$

Заметим теперь, что если $\overline{\nu}(c_{i-j})$ имеет достаточно большое положительное значение, то вычет равен нулю. Это легко вытекает из выкладок, проведенных при доказательстве лемм 3 и 8, – из них видно, что отображение δ_{2i} изменяется на полиномиальное выражение от c_{i-j}, a_{i-j} и u^{δ_i}.

Пусть r – такое значение. Пусть $c_{i-j} = \sum_{h=N}^{r} x_h u^h + \sum_{h=r+1}^{\infty} x_h u^h$. Тогда замену $u \mapsto u' = u + c_{i-j} z^{i-j}$ можно разбить на конечную последовательность замен $u \mapsto u'_1 = u + x_N u^N z^{i-j}, \dots, u'_{r-N-1} \mapsto u'_{r-N} = u'_{r-N-1} + \sum_{h=r+1}^{\infty} x_h u^h z^{i-j}$.

Очевидно теперь, что если мы докажем наше исходное утверждение для каждой замены в отдельности, то мы докажем все. Поскольку для последней замены это уже было показано, нам остается это доказать для произвольной замены $u \mapsto u + xu^h z^j$, $x \in k$.

Для такой замены мы должны взять ее композицию с заменой $z \mapsto z-(j-i)^{-1} \times (h-r)xu^{h-1}z^{j+1}$ и проверить, что вычет равен нулю. Для удобства обозначим $-(j-i)^{-1}(h-r)xu^{h-1} = b,\ xu^h = b'$.

Покажем, что при композиции этих замен меняются только отображения δ_{i+qj}, $q \in \mathbb{N}$. При этом $\delta_{i+qj}(u)$ имеют вид $\mathrm{const}\cdot u^{r+q(h-1)}$. Действительно, при замене $u \mapsto u' = u + b'z^j$ имеем

$$\begin{aligned} zu'z^{-1} &= u + u^{\delta_i}z^i + u^{\delta_{2i}}z^{2i} + \dots + (b' + b'^{\delta_i} + b'^{\delta_{2i}}z^{2i} + \dots)z^j \\ &= u' + u^{\delta_i}z^i + b'^{\delta_i}z^{i+j} + u^{\delta_{2i}}z^{2i} + \dots \\ &= u' + u'^{\delta_i}z^i + \left(\frac{\partial}{\partial u}(b')u^{\delta_i} - \frac{\partial}{\partial u}(u^{\delta_i})b'\right)z^{i+j} \\ &\quad - \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial u^2}(u^{\delta_i})b'^2 z^{i+2j} - \dots - \frac{1}{(e-1)!}\,\frac{\partial^{e-1}}{\partial u^{e-1}}(u^{\delta_i})b'^{e-1}z^{i+(e-1)j} \\ &\quad + \left(u^{\delta_{2i}} - \frac{1}{e!}\frac{\partial^e}{\partial u^e}(u^{\delta_i})b'^e\right)z^{2i} + \dots , \end{aligned}$$

где $ej = i$, если $j \mid i$. Если $j \nmid i$, то $u^{\delta_{2i}}$ не меняется.

Следовательно,

$$u'^{\delta_{i+j}} = \frac{\partial}{\partial u}(b')u^{\delta_i} - \frac{\partial}{\partial u}(u^{\delta_i})b'$$

и $\overline{\nu}(u'^{\delta_{i+j}}) = r + (h-1)$.

Продолжая далее выкладку, имеем

$$u'^{\delta_{i+2j}} = -\frac{\partial}{\partial u}(u'^{\delta_{i+j}})b' - \frac{1}{2!}\,\frac{\partial^2}{\partial u^2}(u^{\delta_i})b'^2$$

и $\overline{\nu}(u'^{\delta_{i+2j}}) = r + 2(h-1)$,

$$u'^{\delta_{i+qj}} = -\frac{\partial}{\partial u}(u'^{\delta_{i+(q-1)j}})b' - \frac{1}{2!}\,\frac{\partial^2}{\partial u^2}(u'^{\delta_{i+(q-2)j}})b'^2 - \dots - \frac{1}{q!}\,\frac{\partial^q}{\partial u^q}(u'^{\delta_i})b'^q$$

и $\overline{\nu}(u'^{\delta_{i+qj}}) = r + q(h-1)$.

При замене $z \mapsto z' = z + bz^{j+1}$ имеем

$$\begin{aligned} z'u = (z + bz^{j+1})u &= uz + u^{\delta_i}z^{i+1} + u^{\delta_{i+j}}z^{i+j+1} + \dots \\ &\quad \dots + u^{\delta_{2i}}z^{2i+1} + \dots + buz^{j+1} + (j+1)bu^{\delta_i}z^{i+j+1} + \dots \\ &\quad \dots + (j+1)bu^{\delta_{2i-j+1}} + \text{чл. с } z^{>2i+1} \\ &= uz' + u^{\delta_i}z'^{i+1} + u^{\delta'_{i+j}}z'^{i+j+1} + \dots + u^{\delta'_{2i}}z'^{2i+1} + \dots \\ &= u(z + bz^{j+1}) + u^{\delta_i}(z + bz^{j+1})^{i+1} + u^{\delta'_{i+j}}(z + bz^{j+1})^{i+j+1} + \dots \\ &\quad \dots + u^{\delta'_{2i}}(z + bz^{j+1})^{2i+1} + \dots . \end{aligned}$$

Отсюда получаем
$$u^{\delta'_{i+j}} = u^{\delta_{i+j}} + b(j-i)u^{\delta_i}$$
и $\overline{\nu}(u^{\delta'_{i+j}}) = r + (h-1)$,
$$u^{\delta'_{i+2j}} = u^{\delta_{i+2j}} - C^2_{i+1}b^2u^{\delta_i} - C^1_{i+j+1}bu^{\delta'_{i+j}} + (j+1)bu^{\delta_{i+j}}$$
и $\overline{\nu}(u^{\delta'_{i+2j}}) = r + 2(h-1)$,
$$\begin{aligned} u^{\delta'_{i+qj}} = u^{\delta_{i+qj}} - C^q_{i+1}b^qu^{\delta_i} - C^{q-1}_{i+j+1}b^{q-1}u^{\delta'_{i+j}} - \dots - C^1_{i+(q-1)j+1}bu^{\delta'_{i+(q-1)j}} \\ + (j+1)bu^{\delta_{i+(q-1)j}} \end{aligned}$$
и $\overline{\nu}(u^{\delta'_{i+qj}}) = r + q(h-1)$.

Поэтому если $j \nmid i$, то $u^{\delta_{2i}}$ не меняется и утверждение доказано. Если $j \mid i$, но $e(h-1) - r \neq -1$, то вычет равен нулю, и опять утверждение доказано (заметим, что $e(h-1) - r \neq -1$, если $(r-1, i) = 1$). Наконец, если $e(h-1) - r = -1$, утверждение проверяется прямыми вычислениями, которые мы здесь приводить не будем.

Итак, мы показали, что замена $u \mapsto u' = u + c_1z + \dots + c_iz^i$ эквивалентна замене $z \mapsto z' = z + a_1z^2 + \cdots,\ u \mapsto u' = u + c'_iz^i + \cdots$ По лемме 8 замена $u \mapsto u' = u + c'_iz^i + \cdots$ не изменяет значения a. По лемме 3 замена $z \mapsto z' = z + a_1z^2 + \cdots$ не изменяет значений $\delta_{i+1}, \dots, \delta_{2i-1}$ только тогда, когда $a_1 = a_2 = \dots = a_{i-1} = 0$. Но в этом случае такая замена не изменяет также значения a. Отсюда следует, что любая замена $z \mapsto z' = z + a_1z^2 + \cdots,\ u \mapsto u' = u + c_1z + \cdots$, не изменяющая значений $\delta_{i+1}, \dots, \delta_{2i-1}$, не изменяет также значения a.

Для завершения доказательства предложения осталось теперь только показать, что замены $u \mapsto u' = x_0u + x_1u^2 + \cdots,\ x_j \in k$, и $z \mapsto z' = a_0z,\ a_0 \neq 0 \in k((u))$, не изменяют значения a. Для первой замены это очевидно. В случае второй замены имеем
$$\begin{aligned} u^{\delta'_{2i}} &= a_0^{-2i}[u^{\delta_{2i}} + ia_0(a_0^{-1})^{\delta_i}u^{\delta_i} - a_0^{-i}(a_0^{i-1}a_0^{\delta_i} + \dots + a_0(a_0^{i-1})^{\delta_i})] \\ &= a_0^{-2i}[u^{\delta_{2i}} + i(i+1)/2a_0^{-1}a_0^{\delta_i}u^{\delta_i}], \\ u^{(\delta'_i)^2} &= a_0^{-2i}u^{\delta_i^2} - ia_0^{-2i-1}a_0^{\delta_i}u^{\delta_i}. \end{aligned}$$
Отсюда
$$\frac{u^{\delta'_{2i}} - (i+1)/2u^{(\delta'_i)^2}}{(u^{\delta'_i})^2} = \frac{u^{\delta_{2i}} - (i+1)/2u^{\delta_i^2}}{(u^{\delta_i})^2} = a.$$
Предложение доказано.

Замечание 3. Если двумерное локальное тело не расщепимо, то числа i, r, a не являются инвариантами, как показывает следующий пример (см. также замечание 2).

Пример[2]. Рассмотрим свободную ассоциативную алгебру $\mathbb{Q}((u))\langle x_1, x_2\rangle$ и в ней идеал I, порожденный элементами $[[x_1, x_2], x_1]$, $[[x_1, x_2], x_2]$. Легко проверяется, что факторкольцо $S = \mathbb{Q}((u))\langle x_1, x_2\rangle / I$ – $\mathbb{Q}$-алгебра без делителей нуля, в которой $z = [x_1, x_2] + I$ – центральный и алгебраически независимый с $u_i = x_i + I$ $(i = 1, 2)$ элемент. В этом кольце любой элемент имеет вид

$$f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \cdots + f_m z^m,$$

где $f_0, \ldots, f_m$ – многочлены от u_1, u_2, записанные в каноническом виде

$$a + bu_1 + cu_2 + d_1 u_1^2 + d_2 u_1 u_2 + d_3 u_2^2 + \cdots ,$$

S – область Оре (см. [7]) и тело частных K обладает дискретным нормированием таким, что $\nu(u_i) = 0,\ \nu(\mathbb{Q}) = 0,\ \nu(z) = 1$. Если пополнить его по этому нормированию, получится двумерное локальное тело (в качестве второго нормирования мы можем взять нормирование по u). Оказывается, оно не расщепимо.

Лемма 9. *Пусть в кольце нормирования двумерного локального тела K существуют элементы u_1, u_2 такие, что $z = u_1 u_2 - u_2 u_1$ – униформизующая нормирования ν, и для любого $m \in z\mathcal{O} \setminus z^2\mathcal{O}$ коммутаторы $[u_i, m] = u_i m - m u_i$ $(i = 1, 2)$ принадлежат $z^2\mathcal{O}$. Тогда поле вычетов не вкладывается в тело K.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\pi\colon \overline{K} \mapsto K$ – вложение. Рассмотрим элементы $f \in \pi(u_1)$, $g \in \pi(u_2)$. Тогда $m_1 = f - u_1$, $m_2 = g - u_2 \in z\mathcal{O}$ и

$$\begin{aligned} 0 &= [u_1 + m_1, u_2 + m_2] = [u_1, u_2] + [m_1, u_2] + [u_1, m_2] + [m_1, m_2] \\ &= z + [m_1, u_2] + [u_1, m_2] + [m_1, m_2]. \end{aligned}$$

Второе и третье слагаемые последней суммы принадлежат $z^2\mathcal{O}$, а $[m_1, m_2] \in z^2\mathcal{O}$, так как $m_1 m_2, m_2 m_1 \in z^2\mathcal{O}$. Но тогда

$$\infty = \nu(0) = \nu(z + [m_1, u_2] + [u_1, m_2] + [m_1, m_2]) = \nu(z) = 1.$$

Противоречие.

В этом теле z – центральный элемент, поэтому $i = \infty$, и r, a не определены. Однако если мы рассмотрим замену $z \mapsto u_1 z$, то получим $i = 1,\ r = 0,\ a = 0$.

Таким образом, эти числа зависят от выбора параметров в этом нерасщепимом теле.

Предложение 8. *Пусть K – двумерное локальное тело, удовлетворяющее условиям, сформулированным в начале этого параграфа. Пусть* $\operatorname{char} k = 0$, $\alpha = 1$ *и инвариант i больше* 1. *Тогда тело K изоморфно телу вида $k((u))((z))$, $zuz^{-1} = u + u^{\delta_i'} z^i + u^{\delta_{2i}'} z^{2i}$, где $\delta_i'(u) = cu^r$, r – второй инвариант, $c \in k^*/(k^*)^e$, если $(r-1, i) = e > 1$, и $c = 1$ в остальных случаях; $\delta_{2i}'(u) = (a(0, \ldots, 0) + r(i+1)/2)u^{-1}(\delta_i'(u))^2$, а все остальные $\delta_j'(u)$ равны нулю.*

---

[2] Этот пример был любезно предоставлен мне Н. И. Дубровиным.

Доказательство. Сделаем замену $z \mapsto z' = a_0 z$. По лемме 3, (iii) будем иметь $u^{\delta'_i} = a_0^{-i} u^{\delta_i}$. Таким образом, $u^{\delta'_i}$ можно привести к виду

$$u^{\delta'_i} = c_0 u^{\overline{\nu}(u^{\delta_i}) \bmod i},$$

где $c_0 \in k^*/(k^*)^i$. Из лемм 8 и 3 мы знаем, что на c_0 влияет только замена $z \mapsto z' = a_0 z$, $u \mapsto u' = x_0 u$, где $a_0, x_0 \in k$. При такой замене c_0 переходит в $c = c_0 a_0^{-i} x_0^{-r+1}$. Отсюда видно, что если $(r-1, i) = e > 1$, то $c \in k^*/(k^*)^e$. Если же $(r-1, i) = 1$, то, очевидно, можно подобрать a_0 и x_0 так, чтобы c стало равным 1.

Покажем, что существует замена $z \mapsto z' = z + a_1 z^2 + \cdots$ такая, что все δ_j, $2i > j > i$, перейдут в δ'_j: $\delta'_j(u) = 0$. Для этого будем делать последовательные замены типа $z \mapsto z' = z + bz^{j+1}$. По следствию 4 для каждого из указанных j существует элемент b такой, что $\delta'_j(u) = 0$.

Теперь можно сделать замену таким образом, что δ_{2i} перейдет в δ'_{2i}: $\delta'_{2i}(u') = (a + r(i+1)/2) u'^{-1} (u'^{\delta_i})^2$. Для этого воспользуемся леммой 8, (ii). В силу этой леммы нужно показать, что существует элемент b такой, что

$$u^{\delta_{2i}} - (a + r(i+1)/2) u^{-1} (u^{\delta_i})^2 + b^{\delta_i} - (u^{\delta_i})' b = 0,$$

где штрих обозначает дифференцирование по u. Поскольку по следствию 2 δ_i – дифференцирование, последнее уравнение переписывается в виде

$$u^{\delta_{2i}} - \left(a + \frac{r(i+1)}{2} \right) u^{-1} (u^{\delta_i})^2 + b' u^{\delta_i} - (u^{\delta_i})' b = 0.$$

Решение этого обыкновенного дифференциального уравнения ищется в виде $b = u^{\delta_j} \tilde{b}$, и оно имеет решение, если $\tilde{b}' + u^{\delta_{2i}} (u^{\delta_i})^{-2} - (a + r(i+1)/2) u^{-1} = 0$. Из определения a мы видим, что это так, поскольку $\operatorname{res}_u \frac{\delta_i^2(u)}{(\delta_i(u))^2}\, du = r$.

Применяя теперь такие же рассуждения, как в предыдущем абзаце, получаем искомый результат.

Вернемся к случаю, когда $\alpha^n = \mathrm{Id}$ для некоторого n.

Лемма 10. *Пусть канонический автоморфизм α тела $K \cong k((u))((z))$ обладает свойством $\alpha^n = 1$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Тогда в K можно сделать такую замену $z \mapsto z' = z + a_1 z^2 + \cdots$, что*

$$z' u z'^{-1} = u^{\alpha} + u^{\delta'_n} z'^n + u^{\delta'_{2n}} z'^{2n} + \cdots .$$

При этом $\delta'_j = 0$, если $n \nmid j$.

Доказательство. Пусть

$$zuz^{-1} = u^{\alpha} + u^{\delta_1}z + u^{\delta_2}z^2 + \cdots .$$

По следствию 2 δ_1 – (α^2, α)-дифференцирование. Поскольку $n > 1$, то $\alpha^2 \neq \alpha$. Поэтому δ_1 по лемме 4 – внутреннее дифференцирование и $\delta_1(u) = du^{\alpha^2} - u^{\alpha}d$. По лемме 3, (i) замена $z \mapsto z' = z - dz^2$ дает нам

$$z'uz'^{-1} = u^{\alpha} + u^{\delta'_2}z'^2 + \cdots .$$

По следствию 2 δ'_2 – (α^3, α)-дифференцирование. Если $n \neq 2$, оно внутреннее, и мы можем применить лемму 3. Рассуждая по индукции, получаем, что существует такая замена, что

$$z'uz'^{-1} = u^{\alpha} + u^{\delta'_n}z'^n + u^{\delta'_{n+1}}z'^{n+1} + \cdots ,$$

где δ'_n – (α^{n+1}, α)-дифференцирование, т.е. $\delta'_n\alpha^{-1}$ – простое дифференцирование.

Теперь заметим, что δ'_{n+1} в последней формуле является (α^2, α)-дифференцированием. Действительно, из предложения 2 мы знаем, что

$$\delta'_{n+1}(ab) = \sum_{k=0}^{n+1} \delta'_{n+1-k}(a)\sigma(S^k_{n+1}\alpha)(b), \qquad a, b \in \overline{K}.$$

Но все $\delta'_j = 0$, если $j < n$. Поэтому

$$\begin{aligned}\delta'_{n+1}(ab) &= \delta'_{n+1}(a)\alpha^{n+2}(b) + \delta'_n(a)\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha^k\delta'_1\alpha^{n-k}\right)(b) + \alpha(a)\delta'_{n+1}(b)\\ &= \delta'_{n+1}(a)\alpha^2(b) + \alpha(a)\delta'_{n+1}(b).\end{aligned}$$

Но тогда по лемме 4 δ'_{n+1} – внутреннее дифференцирование. Применяя лемму 3 с заменой $z' \mapsto z'' = z' + bz'^{n+2}$ при подходящем b, имеем

$$z''uz''^{-1} = u^{\alpha} + u^{\delta'_n}z''^n + u^{\delta'_{n+2}}z''^{n+2} + \cdots ,$$

причем $\delta'_{n+1} = 0$. Рассуждая по индукции, считаем, что мы сделали замену $z \mapsto z'$ такую, что

$$z'uz'^{-1} = u^{\alpha} + u^{\delta'_n}z'^n + u^{\delta'_{2n}}z'^{2n} + \cdots + u^{\delta'_{k+1}}z'^{k+1} + \cdots .$$

Тогда если $n \nmid (k+1)$, то δ'_{k+1} – (α^{k+2}, α)-дифференцирование. Действительно,

$$\begin{aligned}\delta'_{k+1}(ab) &= \sum_{l=0}^{k+1} \sigma(\delta'_{k+1-l}\alpha)(a)\sigma(S^l_{k+1}\alpha)(b)\\ &= \delta'_{k+1}(a)\alpha^{k+2}(b) + \sum_{m=1}^{x} \delta'_{mn}(a)\sigma(S^{k+1-mn}_{k+1}\alpha)(b) + \alpha(a)\delta'_{k+1}(b),\end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{N}$: $xn \leqslant k+1$, $(x+1)n > k+1$, поскольку все $\delta'_j = 0$, если $j < k+1$ и $n \nmid j$.

В каждом мономе из $\sigma(S^{k+1-mn}_{k+1}\alpha)$ существует элемент δ'_j с $j < k+1$ и $n \nmid j$. Это следует из определения S^l_{k+1} и того, что $n \nmid (k+1-mn)$. Следовательно, $\sigma(S^{k+1-mn}_{k+1}\alpha)(b) = 0$ $\forall m$ и δ'_{k+1} – (α^{k+2},α)-дифференцирование.

Если же $n \mid (k+1)$, то точно таким же рассуждением получаем, что δ'_{k+2} – (α^{k+2},α)-дифференцирование. Следовательно, по лемме 3 существует замена $z' \mapsto z'' = z' + bz'^{k+2}$ (или $z'' = z' + bz'^{k+3}$, если $n \mid (k+1)$) такая, что

$$
\begin{gathered}
z''uz''^{-1} = u^{\alpha} + u^{\delta'_n}z''^n + u^{\delta'_{2n}}z''^{2n} + \dots + u^{\delta'_{k+2}}z''^{k+2} + \cdots \\
(\text{или}\ \ u^{\delta'_{k+1}}z''^{k+1} + u^{\delta'_{k+3}}z''^{k+3} + \cdots, \quad \text{если}\ \ n \mid (k+1)).
\end{gathered}
$$

Поскольку на l-м шаге индукции мы делаем замену $z_l \mapsto z_{l+1} = (1+z^l_l)z_l$, последовательность $\{z_l\}^{\infty}_{l=1}$ сходится в K. Отсюда получаем результат леммы.

Лемма 11. *В K существует такой параметр u, что $\alpha(u) = \xi u$, где $\xi^n = 1$, и для всех j $\delta'_{jn}(u) = u\bigl(\sum_k y_{jk}u^{nk}\bigr) \in uk((u^n))$, где $y_{jk} \in k$, а остальные δ'_k равны нулю.*

Доказательство. В силу леммы 10 считаем, что у нас уже выполняется соотношение из формулировки этой леммы. Будем делать последовательно замены типа $u \mapsto u' = u + b_{jn}z^{jn}$. При таких заменах, как легко видно из доказательства леммы 8, отображения δ_k, $n \nmid k$, не меняются. По лемме 8, (i) в результате такой замены $u'^{\delta'_{jn}} = u^{\delta'_{jn}} + b^{\alpha} - \partial/\partial u(u^{\alpha})b$. В силу следствия 6 можно считать, что $\alpha(u) = \xi u$, где $\xi^n = 1$. Поэтому $u'^{\delta'_{jn}} = u^{\delta'_{jn}} + b^{\alpha} - \xi b$. Отсюда видно, что можно выбрать такой элемент b, чтобы выполнялось условие леммы.

Аналогично со случаем $\alpha = \mathrm{Id}$, можно определить числа i_n, r_n и a_n. Определение a_n совпадает с прежним, а числа i_n и r_n определяются следующим образом.

Определение 9. Положим

$$
\begin{gathered}
i_n = \nu((\phi_{z^n} - 1)(u)) \in \mathbb{N} \cup \infty, \\
r_n = \overline{\nu}[((\phi_{z^n} - 1)(u))z^{-i_n} \bmod \wp] \bmod i_n \in \mathbb{Z}/i_n\mathbb{Z}, \\
a_n = \operatorname{res}_u\left\{\frac{u^{\delta_{2i_n} - \frac{i_n+1}{2}\delta^2_{i_n}}}{(u^{\delta_{i_n}})^2}\,du\right\} \in k,
\end{gathered}
$$

где u, z – произвольные локальные параметры тела K, $\phi_z\colon K \to K$, $\phi_z(a) = \mathrm{ad}(z)(a)$.

Из двух предыдущих лемм следует, что если z – параметр из леммы 10, то $i_n \in n\mathbb{N}$, а $r_n = 1 \bmod n$. Число i_n, как нетрудно заметить, первое ненулевое отображение δ_{i_n} в утверждении леммы 11. Так же, как предложение 7, доказывается следующий результат.

Предложение 9. $i_n = i_n(u^{\delta_j}, j \notin n\mathbb{N})$, $r_n = r_n(i_n)$, $a_n = a_n(u^{\delta_{i_n+1}}, \dots, u^{\delta_{2i_n-1}})$.

Предложение 10. *Пусть K – двумерное локальное тело, удовлетворяющее условиям, сформулированным в начале этого параграфа. Пусть* $\operatorname{char} k = 0$ *и* $\alpha^n = \mathrm{Id}$ *для некоторого* n. *Тогда тело K изоморфно телу вида $k((u))((z))$ с соотношением $zuz^{-1} = \xi u + u^{\delta'_{i_n}} z^{i_n} + u^{\delta'_{2i_n}} z^{2i_n}$, где $\xi^n = 1$, $i_n = i_n(0, \dots, 0)$, $\delta'_{i_n}(u) = cu^{r_n}$, $c \in k^*/(k^*)^e$, если $(r_n - 1, i) = e > 1$, и $c = 1$ иначе, $\delta'_{2i_n}(u) = (a_n(0, \dots, 0) + r_n(i_n + 1)/2)u^{-1}(\delta'_{i_n}(u))^2$.*

Доказательство. Мы можем считать, что выполняются условия леммы 11. Но тогда для доказательства нашего предложения в силу специального вида элементов $u^{\delta'_{jn}}$ достаточно повторить дословно доказательство предложения 8.

Из всех этих результатов очевидным образом вытекает следующая теорема.

Теорема 4. *Любые два локальных тела K и K' нулевой характеристики, удовлетворяющие условиям, сформулированным в начале этого параграфа, изоморфны тогда и только тогда, когда $k \cong k'$ и наборы $(n, \xi, i_n, r_n, c, a_n)$ и $(n', \xi', i'_n, r'_n, c', a'_n)$ совпадают.*

Замечание 4. Если $n = 1$, а $i_n = \infty$, тело K является двумерным локальным полем вида $k((u))((z))$.

Сформулируем теперь в окончательном виде то, что мы получили.

Теорема 5. (I) *Пусть K – двумерное локальное тело, у которого первое тело вычетов коммутативно. Такое тело расщепимо, если его канонический автоморфизм α удовлетворяет условию $\alpha^n \neq \mathrm{Id}$ для всех n. Если это условие не выполняется, существуют примеры нерасщепимых тел.*

(II) *Пусть K, K' – двумерные локальные тела, для которых $\alpha^n \neq \mathrm{Id}$, $\alpha'^n \neq \mathrm{Id}$ для всех n, и тело вычетов $\overline{K}$ коммутативно. Тогда*:

(a) *тело K изоморфно телу вида $\overline{K}((z))$, $za = a^{\alpha}z$, $a \in \overline{K}$, где $\overline{K}$ – одномерное локальное поле с полем вычетов k;*

(b) *K изоморфно K' тогда и только тогда, когда $k \cong k'$ и существует такой изоморфизм $f\colon \overline{K} \mapsto \overline{K}'$, что $\alpha = f^{-1}\alpha' f$;*

(c) *если $\operatorname{char} K = \operatorname{char} k$, $\operatorname{char} K' = \operatorname{char} k'$ и поля k, k' алгебраически замкнуты характеристики нуль, то тело K изоморфно K' тогда и только тогда, когда $k \cong k'$ и $(a_1, i_\alpha, y(\alpha)) = (a'_1, i_{\alpha'}, y(\alpha'))$.*

(III) *Пусть K, K' – расщепимые двумерные локальные тела нулевой характеристики, $k \subset Z(K)$, $k' \subset Z(K')$ и $\alpha^n = \mathrm{Id}$, $\alpha'^{n'} = \mathrm{Id}$ для некоторых $n, n' \geqslant 1$. Тогда*:

(a) *тело K изоморфно телу вида $k((u))((z))$ с соотношением $zuz^{-1} = \xi u + u^{\delta'_{i_n}} z^{i_n} + u^{\delta'_{2i_n}} z^{2i_n}$, где $\xi^n = 1$, $i_n = i_n(0, \dots, 0)$, $\delta'_{i_n}(u) = cu^{r_n}$, $c \in k^*/(k^*)^e$, если $(r_n - 1, i) = e > 1$, и $c = 1$ иначе, $\delta'_{2i_n}(u) = (a_n(0, \dots, 0) + r_n(i_n + 1)/2)u^{-1}(\delta'_{i_n}(u))^2$ (i_n, r_n, a_n определены в предложении 9), при этом если $n = 1$, а $i_n = \infty$, то тело K коммутативно;*

(b) *K изоморфно K' тогда и только тогда, когда $k \cong k'$ и наборы $(n, \xi, i_n, r_n, c, a_n)$ и $(n', \xi', i'_n, r'_n, c', a'_n)$ совпадают.*

§ 4. Классы сопряженных элементов

Пусть K – расщепимое локальное тело характеристики нуль, у которого первое тело вычетов коммутативно и последнее тело вычетов k лежит в центре. Все такие тела были классифицированы в предыдущем параграфе. В этом параграфе мы дадим необходимые и достаточные условия сопряженности двух элементов из K.

Фиксируем некоторое представление K в виде $k((u))((z))$.

Определение 10. Пусть $\alpha = \mathrm{Id}$. *Вычетом* $\mathrm{res}_{i,r}$ *на теле* K будем называть отображение $\mathrm{res}_{i,r}\colon k((u))((z)) \mapsto k$,

$$\mathrm{res}_{i,r}(X) = \mathrm{res}\, \frac{x_i}{u^{\delta_i}}\, du,$$

где $X = \sum_l x_l z^l$.

Предложение 11. *Пусть* $\alpha = \mathrm{Id}$. *Пусть* $L, M \in K$, $\nu(L) = \nu(M) = -1$, $M = b_{-1}z^{-1} + b_0 + b_1 z + \cdots$, $L = a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1 z + \cdots$. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) *существует такой элемент* $S \in K$, $\nu(S) = 0$, *что* $M = S^{-1}LS$;

(ii) $a_{-1} = b_{-1}$, $a_0 = b_0, \dots, a_{i-2} = b_{i-2}$,

$$\mathrm{res}\, \frac{a_{i-1} - b_{i-1}}{u^{\delta_i} a_{-1}}\, du \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad u\frac{a_{i-1} - b_{i-1}}{u^{\delta_i} a_{-1}} \in k[[u]],$$

$\mathrm{res}_{i,r}(M^j) = \mathrm{res}_{i,r}(L_j^j)$ *для всех* $j \geqslant 1$, *где* $L_j = \widetilde{S}_j^{-1} L_{j-1} \widetilde{S}_j$, $L_0 := L$, $\widetilde{S}_j = \widetilde{S}_j(M, L_{j-1})$.

Доказательство. Тело K имеет вид $k((u))((z))$ с соотношением $zuz^{-1} = u + u^{\delta_i} z^i + \cdots$. Имеем

$$\begin{aligned} SM &= s_0 b_{-1} z^{-1} + (s_0 b_0 + s_1 b_{-1}) + \cdots + \left(\sum_{j=-1}^{i-2} b_j s_{i-2-j}\right) z^{i-2} + \\ &\quad + \left(\sum_{j=-1}^{i-1} b_j s_{i-1-j}\right) z^{i-1} + \cdots, \\ LS &= s_0 a_{-1} z^{-1} + (s_0 a_0 + s_1 a_{-1}) + \cdots + \left(\sum_{j=-1}^{i-2} a_j s_{i-2-j}\right) z^{i-2} + \\ &\quad + \left(-a_{-1} s_0^{\delta_i} + \sum_{j=-1}^{i-1} a_j s_{i-1-j}\right) z^{i-1} + \cdots. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что условие $a_{-1} = b_{-1}$, $a_0 = b_0, \dots, a_{i-2} = b_{i-2}$ является необходимым условием сопряженности M и L. Еще одно необходимое условие – уравнение на s_0:

$$\frac{s_0^{\delta_i}}{s_0} = \frac{a_{i-1} - b_{i-1}}{a_{-1}}.$$

Поскольку δ_i – дифференцирование, получаем

$$\frac{\frac{\partial}{\partial u}s_0}{s_0} = \frac{a_{i-1}-b_{i-1}}{u^{\delta_i}a_{-1}}.$$

Отсюда вытекает второе необходимое условие:

$$\operatorname{res}\frac{a_{i-1}-b_{i-1}}{u^{\delta_i}a_{-1}}du \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad u\frac{a_{i-1}-b_{i-1}}{u^{\delta_i}a_{-1}} \in k[[u]].$$

Обратно, если эти два условия выполняются, то существует такой элемент $s_0 \in k((u))$, что у элементов $L_1 = s_0^{-1}Ls_0$ и M первые $i+1$ слагаемых совпадают. Ясно, что L и M сопряжены тогда и только тогда, когда сопряжены L_1 и M, сопрягающий элемент $\tilde{S}$ имеет вид $1+\cdots$; $\widetilde{S}$ представляется в виде $(1+s_1z)(1+s_2z^2)\ldots$ Заметим, что для любого элемента $x_{-1}z^{-1}+x_0+x_1z+\cdots \in K$

$$\begin{aligned}(1+s_jz^j)^{-1}&(x_{-1}z^{-1}+x_0+x_1z+\cdots)(1+s_jz^j)\\ &= x_{-1}z^{-1}+x_0+x_1z+\cdots+x_{i+j-2}z^{i+j-2}\\ &\quad + (x_{i+j-1}+jx_{-1}^{\delta_i}s_j+x_{-1}s_j^{\delta_i})z^{i+j-1}+\cdots,\end{aligned}$$

так как из доказательства леммы 3, (ii) имеем

$$\begin{aligned}(1+s_jz^j)^{-1}&(x_{-1}+x_0z+x_1z^2+\cdots)(1+s_jz^j)\\ &= x_{-1}+x_0z+\cdots+x_{i+j-2}z^{i+j-1}+(x_{i+j-1}+jx_{-1}^{\delta_i}s_j)z^{i+j}+\cdots),\end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned}(1+s_jz^j)^{-1}z^{-1}(1+s_jz^j) &= (1+s_jz^j)^{-1}(z^{-1}+s_jz^{j-1}-s_j^{\delta_i}z^{i+j-1}+\cdots)\\ &= z^{-1}-s_j^{\delta_i}z^{i+j-1}+\cdots.\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что если $M = \widetilde{S}^{-1}L_1\widetilde{S}$, то

$$(s_1a_{-1})^{\delta_i} = b_i - a_i,$$

где a_i – коэффициент элемента L_1. Это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{res}\frac{b_i-a_i}{u^{\delta_i}}\,du = 0,$$

т.е. $\operatorname{res}_{i,r}(M) = \operatorname{res}_{i,r}(L_1)$.

Обратно, если вычеты равны, то существует такой элемент $s_1 \in k((u))$, что у элементов $L_2 = (1+s_1z)^{-1}L_1(1+s_1z)$ и M первые $i+2$ слагаемых совпадают.

Продолжая рассуждение по индукции, на k-м шаге имеем: если $M = \overline{S}^{-1}L_k\overline{S}$, то

$$ks_ka_{-1}^{\delta_i} + a_{-1}s_k^{\delta_i} = b_{i+k-1} - a_{i+k-1}.$$

Решение этого уравнения ищется в виде $s_k = a_{-1}^{-k}s$. Подставляя это выражение в уравнение, получаем

$$s' = a_{-1}^{k-1}\frac{b_{i+k-1} - a_{i+k-1}}{u^{\delta_i}}\,.$$

Это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{res}\frac{a_{-1}^{k-1}a_{i+k-1}}{u^{\delta_i}} = \operatorname{res}\frac{u^{-r}a_{-1}^{k-1}b_{i+k-1}}{u^{\delta_i}}\,.$$

С другой стороны, коэффициент при z^i у M^k имеет вид

$$ka_{-1}^{k-1}b_{i+k-1} + f_M,$$

где f_M – полином от $b_{i+k-2},\dots,b_{-1}$ и значений δ_j от них. Аналогично, у L_k^k соответствующий коэффициент имеет вид

$$ka_{-1}^{k-1}a_{i+k-1} + f_{L_k},$$

причем $f_{L_k} = f_M$, так как $a_j = b_j$ для $j \leqslant i+k-2$. Отсюда получаем, что $\operatorname{res}_{i,r} L_k^k = \operatorname{res}_{i,r} M^k$ тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{res}\frac{a_{-1}^{k-1}a_{i+k-1}}{u^{\delta_i}} = \operatorname{res}\frac{a_{-1}^{k-1}b_{i+k-1}}{u^{\delta_i}}\,.$$

Предложение доказано.

Определение 11. Пусть $\alpha \neq \mathrm{Id}$. Будем говорить, что *вычет* $\operatorname{res}_\alpha$ *элемента* $X = \sum_l x_l z^l$ *равен нулю*, если

$$x_0 \in \operatorname{im}(\alpha - \mathrm{Id}).$$

Будем говорить, что *два элемента имеют одинаковый вычет*, если вычет их разности равен нулю.

Положим $\varphi\colon k((u)) \mapsto k((u)),\ \varphi(x) = x^{\alpha^{-1}}/x$.

Предложение 12. *Пусть* $\alpha \neq \mathrm{Id}$. *Пусть* $L, M \in K$, $\nu(L) = \nu(M) = -1$, $M = b_{-1}z^{-1} + b_0 + b_1 z + \cdots$, $L = a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1 z + \cdots$. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) *существует такой элемент* $S \in K$, $\nu(S) = 0$, *что* $M = S^{-1}LS$;

(ii) $b_{-1}/a_{-1} \in \operatorname{im}\varphi$, $\operatorname{res}_\alpha(M^j) = \operatorname{res}_\alpha(L_j^j)$ *для всех* $j \geqslant 1$, *где* $L_j = \widetilde{S}_j^{-1}L_{j-1}\widetilde{S}_j$, $L_0 := L$, $\widetilde{S}_j = \widetilde{S}_j(M, L_{j-1})$.

Доказательство проводится так же, как и в предыдущем предложении. Имеем

$$SM = s_0 b_{-1} z^{-1} + (s_0 b_0 + s_1 b_{-1}^{\alpha}) + \cdots ,$$
$$LS = a_{-1} s_0^{\alpha^{-1}} z^{-1} + (a_0 s_0 + a_{-1} s_1^{\alpha^{-1}}) + \cdots .$$

Отсюда $s_0 b_{-1} = a_{-1} s_0^{\alpha^{-1}}$, т.е. $b_{-1}/a_{-1} \in \operatorname{im}\varphi$. Если это условие выполняется, то полагаем $L_1 = s_0^{-1} L s_0$. У L_1 и M первые коэффициенты совпадают.

Теперь заметим, что для любого элемента $x_{-1}z^{-1} + x_0 + x_1 z + \cdots \in K$

$$\begin{aligned}(1+s_j)^{-1}&(x_{-1}z^{-1} + x_0 + x_1 z + \cdots)(1 + s_j z^j)\\ &= x_{-1}z^{-1} + \cdots + x_{j-2}z^{j-2} + (x_{j-1} + s_j x_{-1}^{\alpha^j} - x_{-1} s_j^{\alpha^{-1}})z^{j-1} + \cdots .\end{aligned}$$

Это легко следует из выкладок, проведенных при доказательстве леммы 3, (i).

Проводя те же рассуждения, что были проведены в предыдущем предложении, на первом шаге имеем необходимое условие сопряженности:

$$s_1 a_{-1}^{\alpha} - a_{-1} s_1^{\alpha^{-1}} = \alpha(s_1^{\alpha^{-1}} a_{-1}) - (s_1^{\alpha^{-1}} a_{-1}) = b_0 - a_0.$$

Это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда $(b_0 - a_0) \in \operatorname{im}(\alpha - \mathrm{Id})$. Но это условие равносильно условию $\operatorname{res}_\alpha M = \operatorname{res}_\alpha L_1$.

На j-м шаге имеем условие

$$s_j a_{-1}^{\alpha^j} - a_{-1} s_j^{\alpha^{-1}} = a_{j-1} - b_{j-1}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}(a_{-1}^{\alpha} a_{-1}^{\alpha^2} \ldots a_{-1}^{\alpha^{j-1}})(a_{j-1} - b_{j-1}) &= (a_{-1}^{\alpha} a_{-1}^{\alpha^2} \ldots a_{-1}^{\alpha^j}) s_j - (a_{-1} \ldots a_{-1}^{\alpha^{j-1}}) s_j^{\alpha^{-1}}\\ &= \alpha((a_{-1} \ldots a_{-1}^{\alpha^{j-1}}) s_j^{\alpha^{-1}}) - (a_{-1} \ldots a_{-1}^{\alpha^{j-1}}) s_j^{\alpha^{-1}}.\end{aligned}$$

Это уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $(a_{-1} \ldots a_{-1}^{\alpha^{j-1}}) \times (a_{j-1} - b_{j-1}) \in \operatorname{im}(\alpha - \mathrm{Id})$. Но это равносильно условию, что $\operatorname{res}_\alpha(M^j) = \operatorname{res}_\alpha(L_j^j)$, так как у L_j и M все коэффициенты вплоть до $(j-1)$-х совпадают, а коэффициент при нулевой степени z у M^j равен

$$a_{-1} \ldots a_{-1}^{\alpha^{-j+2}} b_{j-1}^{\alpha^{-j+1}} + b_{j-1} a_{-1}^{\alpha} \ldots a_{-1}^{\alpha^{j-1}} + \text{сумма мономов с индексами} < j-1.$$

Соответственно у L_j^j этот коэффициент равен

$$a_{-1} \ldots a_{-1}^{\alpha^{-j+2}} a_{j-1}^{\alpha^{-j+1}} + a_{j-1} a_{-1}^{\alpha} \ldots a_{-1}^{\alpha^{j-1}} + \text{сумма мономов с индексами} < j-1.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}(a_{-1} \ldots a_{-1}^{\alpha^{-j+2}} b_{j-1}^{\alpha^{-j+1}} &- a_{-1} \ldots a_{-1}^{\alpha^{-j+2}} a_{j-1}^{\alpha^{-j+1}} + b_{j-1} a_{-1}^{\alpha} \ldots a_{-1}^{\alpha^{j-1}}\\ &- a_{j-1} a_{-1}^{\alpha} \ldots a_{-1}^{\alpha^{j-1}}) = ([a_{-1} \ldots a_{-1}^{\alpha^{-j+2}} b_{j-1}^{\alpha^{-j+1}} - a_{-1} + \cdots + a_{-1}^{\alpha^{-j+2}} a_{j-1}^{\alpha^{-j+1}}]\\ &- \alpha[\ldots] + \alpha[\ldots] - \alpha^2[\ldots] + \alpha^2[\ldots] + \cdots + \alpha^{j-1}[\ldots]\\ &+ b_{j-1} a_{-1}^{\alpha} \ldots a_{-1}^{\alpha^{j-1}} - a_{j-1} a_{-1}^{\alpha} \ldots a_{-1}^{\alpha^{j-1}}) = (2[a_{-1}^{\alpha} \ldots a_{-1}^{\alpha^{j-1}} (a_{j-1} - b_{j-1})]).\end{aligned}$$

Замечание 5. В статье [6] было показано, что для вычета $\operatorname{res}_{1,0}$ в теле псевдодифференциальных операторов выполняется свойство $\operatorname{res}_{1,0}[X,Y]=0$, где $[X,Y]$ – коммутатор двух псевдодифференциальных операторов. Это свойство справедливо также для следующих тел.

Лемма 12. *Пусть K – тело с условием $\alpha^n \neq \mathrm{Id}$ или $\alpha^n = \mathrm{Id}$, $i_n = \infty$. Пусть $X, Y \in K$. Тогда* $\operatorname{res}_\alpha[X,Y]=0$.

Доказательство. Утверждение достаточно доказать для $X = u^l z^k$, $Y = u^m z^q$. Если $k+q \neq 0$, то $\operatorname{res}_\alpha(XY) = \operatorname{res}_\alpha(YX) = 0$. В случае $k+q=0$ имеем

$$XY - YX = u^l (u^m)^{\alpha^k} - u^m (u^l)^{\alpha^{-k}} = \alpha^k (u^m (u^l)^{\alpha^{-k}}) - u^m (u^l)^{\alpha^{-k}} \in \operatorname{im}(\alpha - \mathrm{Id}).$$

В этом случае наши предложения могут быть переформулированы следующим образом.

Следствие 7. *Пусть K – тело, у которого $\alpha = \mathrm{Id}$, $i=1$, $r=0$, $a=0$ (в этом случае K – кольцо псевдодифференциальных операторов $k((u))((\partial^{-1}))$). Пусть $L, M \in K$, $\nu(L) = \nu(M) = -1$, $M = b_{-1}z^{-1} + b_0 + b_1 z + \cdots$, $L = a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1 z + \cdots$. Следующие условия эквивалентны*:

(i) *существует такой элемент $S \in K$, $\nu(S)=0$, что $M = S^{-1}LS$*;

(ii) $a_{-1} = b_{-1}$,

$$\operatorname{res} \frac{a_0 - b_0}{a_{-1}}\, du \in \mathbb{Z} \quad \textit{и} \quad \frac{u(a_0 - b_0)}{a_{-1}} \in k[[u]],$$

$\operatorname{res}_{1,0}(M^j) = \operatorname{res}_{1,0}(L^j)$ *для всех* $j \geqslant 1$.

Следствие 8. *Пусть $\alpha^n \neq \mathrm{Id}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $L, M \in K$, $\nu(L) = \nu(M) = -1$, $M = b_{-1}z^{-1} + b_0 + b_1 z + \cdots$, $L = a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1 z + \cdots$. Следующие условия эквивалентны*:

(i) *существует такой элемент $S \in K$, $\nu(S)=0$, что $M = S^{-1}LS$*;

(ii) $b_{-1}/a_{-1} \in \operatorname{im}\varphi$, $\operatorname{res}_\alpha(M^j) = \operatorname{res}_\alpha(L^j)$ *для всех* $j \geqslant 1$.

В остальных случаях свойство $\operatorname{res}_{\dots}([X,Y])=0$ не выполняется, как показывают следующие примеры.

Пример 1. Пусть K – тело с $\alpha = 1$, $a(0,\dots,0) \neq 0$, $r \neq 1$. Будем считать, что K имеет вид из теоремы 5. Пусть $M = z^{-1}$, $L = z^{-1} + z^i \in k((z)) \subset K$. Если бы выполнялось свойство $\operatorname{res}_{i,r}([X,Y])=0$, то M и L были бы сопряжены по предложению 11. Пусть $S = 1 + s_1 z + \cdots$. Имеем

$$\begin{aligned} SM &= z^{-1} + s_1 + s_2 z + \cdots = LS = (z^{-1} + z^i)(1 + s_1 z + \cdots) \\ &= (z^{-1} + s_1 + s_2 z + \cdots) + (z^i - s_1^{\delta_i} z^i) + (s_1 z^{i+1} - s_2^{\delta_i} z^{i+1}) + \cdots \\ &\quad \cdots + (s_i z^{2i} + s_1^{\delta_i^2 - \delta_{2i}} z^{2i} - s_{i+1}^{\delta_i} z^{2i}) + \cdots . \end{aligned}$$

Отсюда имеем $1 - s_1^{\delta_i} = 0$. Так как $r \neq 1$, это уравнение разрешимо и $s_1 = (1-r)^{-1} c^{-1} u^{1-r}$. Решая следующие уравнения, будем получать значения $s_2, s_3, \dots$

При этом все эти элементы будут состоять из одного монома, нормирование которого не равно $r-1$.

Имеем далее $s_i z^{2i} + s_1^{\delta_i^2-\delta_{2i}} z^{2i} - s_{i+1}^{\delta_i} z^{2i} = 0$. По теореме 5, если $a(0,\dots,0)\neq 0$, в $s_1^{\delta_i^2-\delta_{2i}}$ будет присутствовать моном, нормирование которого равно $r-1$. Но тогда уравнение неразрешимо относительно s_{i+1}, т.е. M и L не сопряжены. Противоречие.

Пример 2. Пусть K – тело с $\alpha = 1$, $a(0,\dots,0) = 0$. В этом случае $i > 1$, так как $r=0$ при $i=1$, и мы получаем кольцо псевдодифференциальных операторов. Будем считать, что K имеет вид из теоремы 5. Тогда $zuz^{-1} = u + cu^r z^i + r(i+1)/2c^2u^{2r-1}z^{2i}$. Отсюда получаем, что $\delta_{2i} = \delta_i^2$. Тогда для любого $x\in k((u))$ имеем

$$z^{-1}xz = x - x^{\delta_i} z^i + \text{чл. с } z^{>2i}.$$

Положим $X = u^{-r-1}z^{-i}$, $Y = u^2$. Тогда

$$XY = u^{1-r}z^{-i} + \dots + Cu^{r-1}z^i + \cdots, \qquad C\in\mathbb{Q},\quad C\neq 0.$$

Отсюда $\mathrm{res}_{i,r}([X,Y])\neq 0$.

Пример с $a(0,\dots,0)\neq 0$, $r=1$ строится аналогично.

Пример 3. Пусть K – тело с $\alpha^n = 1$, $i_n\neq\infty$. Положим $X = u^{-r_n}z^{-i_n}$, $Y = u$. Тогда

$$XY = \xi^{-i_n}u^{1-r_n}z^{-i_n} + C + \cdots,$$

где $C = -i_n\xi^{-i_n+1}c\neq 0$. Отсюда $\mathrm{res}_\alpha([X,Y])\neq 0$.

Пусть K – кольцо псевдодифференциальных операторов $k((u))((\partial_u^{-1}))$. Как было показано, это тело является единственным, для которого выполняется свойство $\mathrm{res}_{1,0}([X,Y]) = 0$. Выведем теперь для этого тела критерий сопряженности произвольных двух элементов.

Пусть $n\in\mathbb{N}$ – некоторое число. Рассмотрим тело $K' = k((t))((\partial_t^{-1}))$, где $t^n = u$. Тогда $\partial_t = nt^{n-1}\partial_u$ и $K\subset K'$.

Лемма 13. *Пусть $L = l_{-m}\partial_t^m + \dots + l_0 + l_1\partial_t^{-1} + \dots \in K'$ – произвольный элемент из K'; L принадлежит K тогда и только тогда, когда $l_i\in t^ik((t^n))$.*

Доказательство. Пусть $L\in K$. Тогда $L = b_{-m}\partial_u^m + \cdots$; $b_i\in k((u)) = k((t^n))$. Пусть $j\in\mathbb{N}$. Имеем $\partial_u^j = (n^{-1}t^{1-n}\partial_t)^j$, $\partial_u^{-j} = (\partial_t^{-1}nt^{n-1})^j$.

Сначала докажем, что лемма выполняется для коэффициентов l_{-i} $(i>0)$. Проведем рассуждение по индукции. Для $i=1$ имеем $\partial_u^i = n^{-1}t^{1-n}\partial_t$ и $b_{-1}\partial_u = l_{-1}n^{-1}t^{1-n}\partial_t$. Утверждение леммы выполнено, поскольку $t^{1-n}\in tk((t^n))$.

Для произвольного i имеем

$$\begin{aligned}\partial_u^i &= \frac{\partial_t}{\partial_t t}(n^{-1}t^{1-n})(n^{-1}t^{1-n}\partial_t)^{i-1} + (n^{-1}t^{1-n})^2\partial_t^2(n^{-1}t^{1-n}\partial_t)^{i-2}\\ &= (1-n)(n^{-1}t^{-n})(n^{-1}t^{1-n}\partial_t)^{i-1} + (n^{-1}t^{1-n})^2\partial_t^2(n^{-1}t^{1-n}\partial_t)^{i-2}.\end{aligned}$$

Поскольку все коэффициенты в записи L в K принадлежат $k((t^n))$, достаточно показать, что лемма выполняется для ∂_u^i.

По индукции в $(n^{-1}t^{1-n}\partial_t)^{i-1}$ все коэффициенты удовлетворяют условию леммы. То же самое имеем для $(n^{-1}t^{1-n}\partial_t)^{i-2}$. Пусть $(n^{-1}t^{1-n}\partial_t)^{i-2} = \sum_{k=0}^{i-2} \tilde{l}_k \partial_t^k$ (заметим, что в разложении ∂_u^i, $i > 0$, нет отрицательных степеней ∂_t и минимальная степень вхождения ∂_t равна 1). Тогда имеем

$$(n^{-1}t^{1-n})^2\partial_t^2\biggl(\sum_{k=0}^{i-2}\tilde{l}_k\partial_t^k\biggr) = (n^{-1}t^{1-n})^2\biggl(\sum_{k=0}^{i-2}\tilde{l}_k\partial_t^{k+2} + \sum_{k=0}^{i-2}\tilde{l}'_k\partial_t^{k+1} + \sum_{k=0}^{i-2}\tilde{l}''_k\partial_t^{k}\biggr).$$

Отсюда $(n^{-1}t^{1-n})^2\tilde{l}_k \in t^{k+2}k((t^n))$, $(n^{-1}t^{1-n})^2\tilde{l}'_k \in t^{k+1}k((t^n))$, $(n^{-1}t^{1-n})^2\tilde{l}''_k \in t^k k((t^n))$.

Для $i = 0$ имеем $l_0 = b_0 \in k((t^n))$.

Покажем теперь, что утверждение леммы справедливо для ∂^{-i}, $i > 0$. Для $i = 1$ имеем

$$\partial_u^{-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}(t^{n-1})^{(k)}\partial_t^{-1-k}C_k^{-1}.$$

Пусть доказано, что $\partial_u^{-k} = \sum_{j=0}^{\infty}\tilde{l}_j\partial_t^{-k-j}$, $\tilde{l}_j \in t^{-k-j}k((t^n))$ для $k < i$:

$$\partial_u^{-i} = (\partial_t^{-1}nt^{n-1})^i = \biggl(n\sum_{k=0}^{n-1}C_k^{-1}(t^{n-1})^{(k)}\partial_t^{-1-k}\biggr)(\partial_t^{-1}nt^{n-1})^{i-1} =$$
$$= \biggl(n\sum_{k=0}^{n-1}C_k^{-1}(t^{n-1})^{(k)}\partial_t^{-1-k}\biggr)\biggl(\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{l}_j\partial_t^{-i+1-j}\biggr).$$

Для любого $k \in \{0, \ldots, n-1\}$

$$\partial_t^{-1-k}\tilde{l}_j = \sum_{p=0}^{\infty}C_p^{-1-k}\tilde{l}_j^{(p)}\partial_t^{-1-k-p}.$$

Отсюда получаем для фиксированных k и j такие условия на коэффициенты: при $\partial_t^{-1-k-p-i+1-j}$, $p \geqslant 0$, коэффициент принадлежит $t^{-1-k-i+1-j-p}k((t^n))$.

Обратно, пусть выполняются условия леммы на коэффициенты. Из предыдущих рассуждений мы получили, что $\partial_u^i = \sum_{j\geqslant 0} c_j\partial_t^{i-j}$ и $c_j \in t^{i-j}k((t^n))$ для любого $i \in \mathbb{Z}$.

Теперь рассмотрим старший моном в записи L:

$$l_{-m}\partial_t^m = l_{-m}c_0^{-1}\partial_u^m - l_{-m}\biggl(\sum_{j\geqslant 1}c_jc_0^{-1}\partial_t^{m-j}\biggr).$$

Имеем $l_{-m}c_0^{-1} \in k((t^n))$, $l_{-m}c_jc_0^{-1} \in t^{m-j}k((t^n))$. Отсюда $L = l_{-m}c_0^{-1}\partial_u^m + L_1$, где $\nu(L_1) > \nu(L)$ и коэффициенты L_1 удовлетворяют условию леммы. По индукции получаем искомый результат.

Лемма 14. *Пусть* $L, M \in K \subset K'$ *и* $\nu(L) = \nu(M) = -n$. *Пусть* $M = SLS^{-1}$, *где* $S \in K'$. *Тогда* $S \in K$ *в том и только том случае, когда*

$$\operatorname{res} \frac{l_{\nu(L)+1} - m_{\nu(M)+1}}{l_{\nu(L)}} = 0 \quad \text{и} \quad t\frac{l_{\nu(L)+1} - m_{\nu(M)+1}}{l_{\nu(L)}} \in k[[t]].$$

Доказательство получается теми же рассуждениями, которые были проведены в предложении 11.

Теорема 6. *Пусть* $L, M \in K = k((u))((\partial_u^{-1}))$, $\nu(L) = \nu(M) < 0$, $M = m_{\nu(M)}\partial_t^{-\nu(M)} + \cdots$, $L = l_{\nu(L)}\partial_t^{-\nu(L)} + \cdots$. *Следующие условия эквивалентны*:
(i) *существует такой элемент* $S \in K$, $\nu(S) = 0$, *что* $M = S^{-1}LS$;
(ii) $\nu(L) = \nu(M)$, $m_{\nu(M)} = l_{\nu(L)}$,

$$\operatorname{res} \frac{l_{\nu(L)+1} - m_{\nu(M)+1}}{l_{\nu(L)}} = 0 \quad \text{и} \quad t\frac{l_{\nu(L)+1} - m_{\nu(M)+1}}{l_{\nu(L)}} \in k[[t]],$$

$\operatorname{res}(M^{j/(-\nu(M))}) = \operatorname{res}(L^{j/(-\nu(L))})$ *для всех* $j \geqslant 1$ *в* K'.

Доказательство сразу следует из следствия 7, леммы 13, леммы 14 и того факта, что в K' корень n-й степени из L и M извлекается единственным образом.

Теорема 7. *Пусть* $L, M \in K = k((u))((\partial_u^{-1}))$ *и* $\nu(L) = \nu(M) = 0$. *Тогда*:
(i) *если* $l_0 = m_0 \neq \mathrm{const}$ *и* $l_1 = m_1$, *то* $M = SLS^{-1}$;
(ii) *если* $l_0 = m_0 = \mathrm{const}$, *то* $M = SLS^{-1}$ *тогда и только тогда, когда* $(M - m_0)^{-1} = S(L - l_0)^{-1}S^{-1}$ (*см. теорему* 6).

Доказательство очевидно.

Список литературы

1. *Shilling O. F. G.* The theory of Valuations. Providence: AMS, 1956.
2. *Serre J. P.* Corps locaux. Paris: Hermann, 1962.
3. *Fimmel T., Parshin A. N.* Introduction to the Higher Adelic Theory. Preprint, 1996.
4. *Паршин А. Н.* К арифметике двумерных схем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. №4. С. 736–773.
5. *Паршин А. Н.* Когомологии Галуа и группы Брауэра локальных полей // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1990. Т. 183. С. 159–168.
6. *Паршин А. Н.* О кольце формальных псевдодифференциальных операторов // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1999. Т. 224. С. 291–305.
7. *Cohn P. M.* Skew-fields. Cambridge University Press, 1997.
8. *Yekutieli A.* An explicit construction of the Grothendieck residue complex // Asterisque. 1992. V. 208.

Поступило в редакцию
28.VI.1999