



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Погорелов, Задача Дирихле для обобщенных решений многомерного уравнения Монжа-Ампера эллиптического типа, *Докл. АН СССР*, 1983, том 270, номер 2, 285–288

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

19 марта 2025 г., 02:40:59



вательных (D, γ) -системах. Пусть требуется проверить две простые гипотезы $H_0: \theta = \theta_0$ против $H_1: \theta = \theta_1$. Предположим, имеются две (D, γ) -системы $D_n^0 = D_n^0(x^n)$, $D_n^1 = D_n^1(x^n)$ с коэффициентами доверия соответственно γ_0, γ_1 .

Введем следующий критерий, который назовем (D^0, D^1) -к р и т е р и е м. Наблюдения продолжаются до тех пор, пока одновременно выполняются условия: а) $\theta_0 \in D_n^0$, б) $\theta_1 \in D_n^1$, и останавливаются при первом нарушении хотя бы одного из них. Соответствующий момент остановки обозначим ν . Предположим, что $P_\theta(\nu < \infty) = 1$, $\theta \in \Theta$. В момент остановки возможны три ситуации:

- 1) нарушается условие а); в этом случае принимается гипотеза H_1 ;
- 2) нарушается условие б); в этом случае принимается H_0 ;
- 3) одновременно нарушаются оба условия а), б); в этом случае решение принимается произвольным образом (например, всегда принимается H_0).

Из (1) следует, что сформулированный критерий имеет риски первого и второго рода $\alpha \leq 1 - \gamma_0$, $\beta \leq 1 - \gamma_1$. Критерий Вальда является частным случаем (D^0, D^1) -критерия, если первая (D, γ) -система строится на основе (4), (5), (7), где отображение $\varphi(\theta)$ выбирается так, чтобы $\varphi(\theta_0) = \theta_1$, а вторая (D, γ) -система также строится на основе (4), (5), (7), где отображение $\varphi(\theta)$ выбирается так, чтобы $\varphi(\theta_1) = \theta_0$ (подробнее см. [5]). Указанный факт характеризует общность и эффективность подхода, основанного на последовательных доверительных множествах.

В общем случае вопрос об эффективности и оптимальных свойствах предлагаемой последовательной процедуры остается в значительной степени неясным. Тем не менее данный подход является довольно общим и позволяет решать большое число задач на построение доверительных множеств и проверку гипотез для характеристик систем массового обслуживания, многократно цензурированных выборок, характеристик сложных систем по результатам испытаний и др.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
4 X 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Neyman J. — Ann. Math. Statist., 1935, vol. 6, p. 111–116.
2. Большев Л.Н. — Теор. вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, № 1, с. 187–191.
3. Беллев Ю.К. — ДАН, 1966, т. 169, № 4, с. 755–758.
4. Вальд А. Последовательный анализ. М.: Физматгиз, 1960.
5. Павлов И.В. — Изв. АН СССР. Технич. кибернет., 1982, № 3, с. 80–87.

УДК 517.957

МАТЕМАТИКА

Академик А.В. ПОГОРЕЛОВ

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ МОНЖА–АМПЕРА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Целью настоящей статьи является изучение задачи Дирихле для уравнения

$$(1) \quad \theta(z_1, z_2, \dots, z_n, z, x_1, x_2, \dots, x_n) \det(z_{ij}) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где θ и φ — непрерывные положительные функции.

Выпуклая функция $z(x)$, заданная в области G , называется о б о б щ е н н ы м р е ш е н и е м у р а в н е н и я (1), если для любой области $g \subset G$ имеет место

равенство

$$(2) \int_{g^*} \theta(p_1, p_2, \dots, p_n, z(p), x_1(p), x_2(p), \dots, x_n(p)) dp_1, dp_2, \dots, dp_n = \\ = \int_g \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1, dx_2, \dots, dx_n,$$

где $x_1(p), x_2(p), \dots, z(p)$ — координаты той точки поверхности $z = z(x)$, в которой уравнение опорной плоскости имеет угловые коэффициенты p_1, p_2, \dots, p_n , а областью интегрирования g^* является так называемое нормальное изображение области g . Нормальное отображение с помощью выпуклой поверхности $z = z(x)$ состоит в сопоставлении точке x точки p , координатами которой являются угловые коэффициенты опорной плоскости поверхности в точке $(x, z(x))$.

Нормальное отображение так же, как и ему обратное, в общем случае неоднозначно. Однако эта неоднозначность может иметь место только на множестве меры нуль. Поэтому возможная неоднозначность в определении функций $x_1(p), x_2(p), \dots, z(p)$ не влияет на результат интегрирования в условии (2).

Пусть G — строго выпуклая область, x' — точка на границе области и $H(n)$ — расстояние точки x' от опорной плоскости области G с внешней нормалью n . Векторное уравнение $p = n/H(n)$ задает бесконечную выпуклую поверхность; обозначим через $G(x')$ ограничиваемую ею область. Сдвинем опорную плоскость в точке x' на расстояние λ и обозначим через $\sigma(x', \lambda)$ отсекаемый ею сегмент от области G .

Т е о р е м а 1. *Задача Дирихле для уравнения (1) в строго выпуклой области G разрешима при любых непрерывных граничных значениях $h(x)$, если существует такая функция $\psi(p)$, для которой выполняются следующие условия:*

- 1) $\psi(p) \leq \theta(p, z, x)$ для $x \in G, z \leq \max h$ и любых p ;
- 2) $\int_{(p)} \psi(p) dp > \int_G \varphi(x) dx$, где интегрирование в левой части неравенства рас-

пространяется на все пространство переменных p ;

- 3) для любой точки $x' \in \partial G$ и любых постоянных $c, c_1 > 0$ при $\lambda \rightarrow 0$

$$\int_{G(x')} \psi \left(c_1 p - \frac{cn(x')}{\lambda} \right) dp / \int_{\sigma(x', \lambda)} \varphi(x) dx \rightarrow \infty.$$

Из теоремы 1 получается

Т е о р е м а 2. *Задача Дирихле для уравнения (1) в выпуклой области G разрешима при любых непрерывных граничных значениях, если нормальная кривизна границы области строго положительна и, кроме того,*

$$\int_G \varphi(x) dx < \infty, \quad \theta(p, z, x) > \frac{c}{|p|^{(n+1)/2}} \text{ при } |p| \rightarrow \infty,$$

или

$$\varphi(x) < c < \infty, \quad \theta(p, z, x) > \frac{c}{|p|^{n+1-\epsilon}} \text{ при } |p| \rightarrow \infty.$$

Докажем теорему 1. В работе [1] А.Д. Александров доказал существование обобщенного решения уравнения (1) в строго выпуклой области G . В ходе этого доказательства строится последовательность выпуклых многогранников, однозначно проектирующихся в замкнутую область \bar{G} , сходящихся к выпуклой поверхности F с краем $z = h(x), x \in \partial G$, удовлетворяющей условию:

$$(3) \int_{g^*} \theta(p, z(p), x(p)) dp = \int_{g'} \varphi(x) dx,$$

где g' — проекция любой области, взятой на поверхности F . В частности, это имеет

место для любой области $g' \subset G$. Таким образом функция $z(x)$, задающая ту часть поверхности F , которая проектируется на G , есть обобщенное решение уравнения (1). Если поверхность F однозначно проектируется на замкнутую область \bar{G} , то $z(x)$ является решением задачи Дирихле для уравнения (1) с граничным условием $z = h(x)$ на ∂G .

Покажем, что при условиях теоремы 1, а они гарантируют выполнение условий теоремы А.Д. Александрова, проектирование поверхности F на замкнутую область \bar{G} однозначно. Допустим, проектирование поверхности F на замкнутую область \bar{G} не однозначно. Тогда найдется такая точка P на поверхности и точка R на ее границе, которые имеют одну и ту же проекцию $x' \in \partial G$. Возьмем какую-нибудь точку Q на соединяющем их прямолинейном отрезке. Она тоже принадлежит F .

Не ограничивая общности, будем считать, что поверхность F расположена в полупространстве $z > 0$. Рассечем цилиндр Z , проектирующий область \bar{G} , двумя плоскостями, перпендикулярными оси z и проходящими через точки R и Q . Пересечение их с цилиндром Z обозначим через G_R и G_Q соответственно. Повернем теперь опорную плоскость цилиндра Z около опорной плоскости области G_Q на малый угол так, чтобы она разделяла точку P и край поверхности F . Эта плоскость, будем обозначать ее α , отсекает от области \bar{G} малый сегмент $\sigma(x', \lambda)$.

Плоскость α отсекает от поверхности F малую шапочку F' . Ее нормальное изображение содержит нормальное изображение конуса, который проектирует из точки P край шапочки. Нормальное изображение этого конуса содержит нормальное изображение конуса V , проектирующего сечение цилиндра Z плоскостью α из той же точки. А оно отличается от нормального изображения конуса, проектирующего область G_R из точки P , только сдвигом в направлении нормали к опорной плоскости цилиндра Z в точке P на расстояние c/λ (c — постоянная, не зависящая от λ). Нормальное изображение конуса, проектирующего область G_R из точки P , получается преобразованием подобия области $G(x')$ относительно точки x' с коэффициентом подобия, не зависящим от λ .

Возьмем в качестве g' в равенстве (3) проекцию шапочки F' на область \bar{G} . Имеем

$$\int_{F'^*} \theta(p, z(p), x(p)) dp = \int_{F'} \varphi(x) dx.$$

Заменим в этом равенстве θ на ψ , F' — на $\sigma(x', \lambda)$, F'^* — на нормальное изображение V^* конуса V . Получим неравенство

$$\int_{V^*} \psi(p) dp < \int_{\sigma(x', \lambda)} \varphi(x) dx.$$

Область V^* получается преобразованием подобия и сдвигом области $G(x')$. Если перейти в левой части неравенства к интегрированию по области $G(x')$ заменой переменных, то неравенство примет вид

$$c_2 \int_{G(x')} \psi \left(c_1 p - \frac{cn(x')}{\lambda} \right) dp < \int_{\sigma(x', \lambda)} \varphi(x) dx.$$

А это при достаточно малых λ противоречит условию 2) теоремы 1 Теорема доказана.

Докажем теорему 2. Так как в точке $x' \in \partial G$ нормальная кривизна положительна, то существует сфера S , проходящая через точку x' , содержащая область G . Построим для шара, ограниченного сферой S , сегмент $\sigma_s(x', \lambda)$ и область $S(x')$ подобно тому, как строилась область $G(x')$. Так как $\sigma(x', \lambda) \subset \sigma_s(x', \lambda)$, а $S(x') \subset G(x')$, то

нам достаточно показать, что при выполнении условий теоремы 2

$$\int_{S(x')} \psi(p) dp / \int_{\sigma_S(x', \lambda)} \varphi(x) dx \rightarrow \infty \text{ при } \lambda \rightarrow 0.$$

Вычисления, которые нетрудно провести, показывают, что это действительно так. Теорема 2 доказана.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР, Харьков

Поступило
25 I 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.Д. – Вестн. ЛГУ, 1958, № 1.

УДК 517.944+517.949.8

МАТЕМАТИКА

В.С. РЯБЕНЬКИЙ

ОБОБЩЕНИЕ ПРОЕКТОВ И ГРАНИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ КАЛЬДЕРОНА НА ОСНОВЕ ПОНЯТИЯ ЧЕТКОГО СЛЕДА

(Представлено академиком С.Л. Соболевым 14 X 1982)

Пусть $Lu = 0$ – линейное эллиптическое уравнение, определенное в некоторой области D , и пусть $D^+ \subset D$ – некоторая подобласть. Кальдерон [1] предложил для эллиптических уравнений $Lu = 0$, рассматриваемых в D^+ , способ равносильной замены этих уравнений псевдодифференциальными уравнениями, связывающими значения "данных Коши", т.е. искомой функции и ее последовательных нормальных производных до порядка $p - 1$, где p – порядок оператора L , на границе ∂D^+ области D^+ . Подход Кальдерона развит Сили [2] и Хёрмандером [3].

В основе псевдодифференциальных соотношений на границе лежит построенный Кальдероном проектор P_{Γ}^+ , действующий в пространстве "данных Коши", определенных на ∂D^+ , и оставляющий неподвижными те и только те данные Коши, которые можно доопределить внутри D^+ до некоторого решения уравнения $Lu = 0$.

Обобщение конструкции Кальдерона опирается на вводимое нами понятие четкого следа функции на границе. В случае эллиптических по Петровскому систем таким следом являются, в частности, данные Коши. Формальная схема нашей конструкции не связана с типом уравнения.

Предлагаемая конструкция может быть использована для развития и обоснования того варианта [4] метода разностных проекторов [5–13] численного решения краевых задач, который не требует построения разностной аппроксимации граничных условий исходной краевой задачи. В случае общего эллиптического уравнения подход, намеченный в [4], развит и обоснован А.А. Резником [11, 12] на основе классических проектов Кальдерона и разностных проекторов [8].

Отметим, что конструкция разностных проекторов для разностных схем на нерегулярных сетках [9] оказала влияние на конструкцию обобщенных проектов Кальдерона, вводимых ниже.

1. Основные конструкции. Пусть в d -мерном евклидовом пространстве E^d задана область D с замыканием \bar{D} . Будем считать, что заданы линейные