Труды Математического института АН СССР
1979, том 150

Е. А. ВОЛКОВ

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И МЕТОДЕ СОСТАВНЫХ СЕТОК НА МНОГОГРАННИКАХ

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные свойства решений даже простейших эллиптических уравнений на трехмерных многогранниках изучены в настоящее время недостаточно. В работе автора [1] исследуется гладкость решений задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона на замкнутом прямоугольном параллелепипеде, т. е. на многограннике частного вида. Существенные результаты получены А. Ф. Филипповым [2] для решений уравнения Пуассона на многогранниках при однородных краевых условиях смешанного типа и с правой частью, удовлетворяющей некоторым условиям типа условий согласования на границе области. Однако работа [2] не охватывает случая произвольной достаточно гладкой правой части и задачу Дирихле для уравнения Лапласа.

В § 1 данной работы исследуется другими методами, чем в [2], гладкость классического решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа на ограниченном трехмерном многограннике в той мере, насколько это нужно для обоснования метода составных сеток, излагаемого в § 3. В частности, установлена ограниченность первой и второй производной решения уравнения Лапласа в направлении ребра вблизи него (теорема 1.3). Это свойство было обнаружено А. Ф. Филипповым [2] при соответствующих условиях у решения рассматриваемого им уравнения Пуассона для производных в направлении ребра и более высоких порядков. В то же время производные даже первого порядка по другим направлениям могут быть, как это следует из результатов [2], неограниченными вблизи ребра как и у решения уравнения Пуассона, так и у решения уравнения Лапласа. В § 1 в предположении, что граничные значения непрерывны на ребрах, а на каждой грани имеют вторые производные, удовлетворяющие условию Гёльдера, получены оценки роста производных решения уравнения Лапласа до четвертого порядка в зависимости от τ, r и ρ, т. е. от расстояния текущей точки до границы, до ближайшего ребра и до ближайшей вершины многогранника (теоремы 1.3—1.7, леммы 1.4, 1.5).

Следующий § 2 носит чисто вспомогательный характер. В нем вводятся разностные уравнения на кубических, цилиндрических и сферических сетках на стандартных областях и изучаются некоторые свойства решений этих уравнений.

В § 3 детально излагается метод составных сеток решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа на многограннике, являющийся развитием для трехмерного случая метода, предложенного и обоснованного автором [3, 4] в двумерном случае, причем в варианте [5], использующем сетки только на стандартных подобластях. Вблизи вершины каждого многогранного угла, не являющегося выпуклым прямым трехгранным углом, на шаровом секторе строится конечный набор сферических сеток, измельчающихся в окрестности вершины и около прилегающих ребер. Вблизи ребер, не являющихся ребрами выпуклых прямых двугранных углов, строятся на цилиндрических секторах, расположенных на положительном расстоянии от вершин, цилиндрические сетки, измельчающиеся в направлениях, ортогональных ребрам. Остальная часть многогранника заполняется перекрывающимися прямоугольными параллелепипедами, на которых задается равномерная кубическая сетка. Общее число узлов сеток равно $O(h^{-3}\ln^2 h)$. На каждой стандартной сетке оператор Лапласа аппроксимируется обычным семиточечным разностным оператором. Стандартные сетки склеиваются между собой с помощью простейшей полилинейной интерполяции. Благодаря тому, что глубина склейки сеток не зависит от h, полученная система разностных уравнений устойчива. Обеспечивается равномерная сходимость на сетке разностного решения к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа на многограннике при наличии особенностей вблизи ребер и вершин даже у первых производных со скоростью $O(h^2 \ln h^{-1})$ (теорема 3.1). Здесь уместно отметить, что обнаруженное свойство ограниченности второй производной гармонической функции в направлении ребра и позволило не производить дополнительного измельчения цилиндрической сетки в направлении ребра, вблизи последнего. Такое измельчение привело бы к дополнительному увеличению числа узлов, т. е. разностных уравнений, по порядку относительно h. Все сетки измельчаются быстрее как раз в тех направлениях, в которых быстрее растут производные решения.

Другое важное свойство рассматриваемой системы разностных уравнений состоит в том, что для нахождения ее решения может быть применен альтернирующий метод Шварца путем последовательного решения разностных уравнений на стандартных областях. Процесс сходится в равномерной метрике на всей сетке по геометрической прогрессии со знаменателем, асимптотически не зависящим от h (замечание 3.1). Итерационные процессы на сетках, обладающие отмеченным свойством, были построены ранее в работах [6—8] и [5].

Наличие множителя $\ln h^{-1}$ в приведенной выше оценке скорости сходимости разностного решения оправдано следующими обстоятельствами. Даже на прямоугольном параллелепипеде при отсутствии на ребрах, кроме требования непрерывности, других условий согласования известная оценка погрешности [1] имеет порядок $h^2 \ln h^{-1}$, а вопрос о возможности улучшения этой оценки по порядку при сколь угодно гладких граничных значениях на гранях является открытым, хотя в двумерном случае он решен положительно (см. [5, § 1]). Обосновать сходимость решения рассматриваемой схемы со скоростью $O(h^2)$ можно было бы при введении дополнительного условия согласования (см., в частности, [1, теорема 5.3]) для граничных значений на ребрах выпуклых прямых двугранных углов, что на практике слишком

обременительно при несущественном выигрыше на $\ln h^{-1}$ в оценке погрешности. Наконец, исследование этой сходимости потребовало бы значительного увеличения и без того большого объема данной работы.

Рассмотренный метод составных сеток распространяется и на задачу Дирихле для уравнения Пуассона, если правая часть (некоторое ее продолжение) является достаточно гладкой функцией на области, содержащей заданный замкнутый многогранник (замечание 3.2).

Разностный метод решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа на конечных и бесконечных трехмерных областях с коническими точками рассматривается в работе [9], а приближенным методом решения двумерной задачи со смешанными граничными условиями на областях с углами посвящены работы [10—19] и [5].

§ 1. ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА НА МНОГОГРАННИКЕ ВБЛИЗИ РЕБЕР И ВЕРШИН

Лемма 1.1. *Пусть последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится поточечно на отрезке* $[a, b]$ *к функции* $f(x)$. *Тогда, если* $f(x) \in C_2[a, b]$ [1], $f_n(x) \in C_2[a, b]$, $n = 1, 2, \ldots$, *причем*

$$\max_{[a, b]} |f_n''(x)| \leqslant c_0, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

то

$$\max_{[a, b]} |f''(x)| \leqslant c_0. \tag{1.1}$$

Доказательство. Пусть $\omega(\delta; f)$ — модуль непрерывности функции f на $[a, b]$, $x \in (a, b)$ — произвольная точка, $0 < h < \min\{x - a, b - x\}$. Имеем

$$\frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} = f''(\xi),$$

где $\xi \in [x - h, x + h]$ (см. [20, гл. II]). Следовательно,

$$|f''(x)| \leqslant |f''(\xi)| + |f''(x) - f''(\xi)| \leqslant \left| \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} \right| + \omega(h; f'') \leqslant$$
$$\leqslant \left| \frac{f_n(x-h) - 2f_n(x) + f_n(x+h)}{h^2} \right| + \omega(h; f'') +$$
$$+ \frac{1}{h^2} \sum_{i=-1}^{1} (2 - |i|) |f(x + ih) - f_n(x + ih)|. \tag{1.2}$$

Так как первое слагаемое в правой части (1.2) равно значению $|f_n''|$ в некоторой точке отрезка $[x - h, x + h]$ и по условию не превышает c_0, а сумма остальных слагаемых при фиксированном x может быть сделана за счет выбора h и n меньше любого $\varepsilon > 0$, то в силу произвольности $x \in (a, b)$ и непрерывности f'' на $[a, b]$ вытекает (1.1).

Лемма 1.2. *Пусть* x, y, z — *прямоугольная система координат,* $S = S(P, l)$ — *открытый трехмерный шар радиуса* l *с центром в точке* P, γ — *граница шара* S, *функция* u *гармонична на* S *и непрерывна на* $\bar{S}$. *Тогда*

$$|u^{(\mu)}(P)| \leqslant c_\mu l^{-\mu} \max_{\gamma} |u|, \tag{1.3}$$

[1] $f(x \in C_k[a, b]$, если $f^{(k)}(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

где $u^{(\mu)}(P)$ — *любая производная функции* u *по* x, y, z *порядка* μ *в точке* P, c_μ — *постоянная, зависящая только от* μ.

Доказательство. Неравенство (1.3) сразу получается из представления гармонической функции через интеграл Пуассона путем μ-кратного дифференцирования по x, y, z под знаком интеграла (см. [1, § 3]).

Определение. *Функция* $f \in C_{k,\lambda}(E)$, $0 < \lambda \leqslant 1$, *если* f *имеет на* E *производные порядка* k, *удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем* λ, *т. е.*

$$\max_{\{D^k\}} \sup_{\substack{P, Q \in E \\ P \neq Q}} \frac{|D^k f(P) - D^k f(Q)|}{|P - Q|^\lambda} = F_{k,\lambda} < +\infty,$$

где D^k — *оператор дифференцирования* k-*го порядка*, $|P - Q|$ — *нижняя грань длин кривых, соединяющих точки* P *и* Q *и лежащих внутри* E, *за исключением, быть может, концов.*

Введем для $f \in C_{k,\lambda}(E)$ норму $\|f\|_{C_{k,\lambda}(E)}$ следующим образом:

$$\|f\|_{C_{k,\lambda}(E)} = \sum_{\nu=0}^{k} \max_{\{D^\nu\}} \sup_{P \in E} |D^\nu f| + F_{k,\lambda}.$$

Лемма 1.3. *Пусть* $S^+ = S^+(P, l)$ — *открытый полушар, т. е.*

$$S^+ = \{(x, y, z) : (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2 < l^2, \quad x > x_P\},$$

где x_P, y_P, z_P — *координаты точки* P, γ — *граница* S^+,

$$\gamma_0 = \{(x, y, z) : x = x_P, \ (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2 \leqslant l^2\},$$

функция u *гармонична на* $S^+(P, l)$ *и непрерывна на* $\bar{S}^+$, *причем* $u \in C_{k,\lambda}(\gamma_0)$[1], $k \geqslant 0$, $0 < \lambda < 1$. *Тогда* $u \in C_{k,\lambda}(S^+(P, \xi l))$, *где* $\xi \in (0, 1)$, *причем*

$$\|u\|_{C_{k,\lambda}(S^+(P,\xi l))} \leqslant c_\xi (\|u\|_{C_{k,\lambda}(\gamma_0)} + \max_{\gamma} |u|),$$

где c_ξ — *постоянная, не зависящая от* u.

Лемма 1.3 следует из результатов Келлога [21] (см. также оценку (34.5 из [22]).

Пусть x, y, z — прямоугольная система координат, φ — угол, отсчитываемый в плоскости xy от положительной полуоси x против часовой стрелки, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, H и α — некоторые числа, $H > 0$, $0 < \alpha < 2$,

$$T = \left\{(x, y, z) : 0 < r < 1, \quad |\varphi| < \frac{\alpha\pi}{2}, \quad 0 < z < H\right\}$$

— сектор цилиндра, γ — граница сектора T,

$$\gamma_k = \left\{(x, y, z) : 0 \leqslant r \leqslant 1, \quad \varphi = (-1)^k \frac{\alpha\pi}{2}, \quad 0 \leqslant z \leqslant H\right\},$$

$k = 0, 1,$ — плоские прямоугольные грани сектора T, $\gamma_2 = \gamma \setminus (\gamma_0 \cup \gamma_1)$

Рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta u = 0 \text{ на } T, \ u = \eta \text{ на } \gamma, \tag{1.4}$$

где Δ — оператор Лапласа, η — заданная на γ функция, причем

$$\eta = \eta_k(r, z) \text{ на } \gamma_k, \ k = 0, 1, \ \eta = 0 \text{ на } \gamma_2.$$

Т. е. граничные значения u на γ_0 принадлежат $C_{k,\lambda}(\gamma_0)$.

Теорема 1.1. *Пусть* δ — *число*, $0 < \delta < \min\{1, H\}/2$, $\eta_k \in C_{2,\lambda}(\gamma_k)$, $k = 0, 1$, $0 < \lambda < 1$, $\eta_0(0, z) = \eta_1'(0, z)$, $z \in [0, H]$, *причем, если выполнено хотя бы одно из трех неравенств* $r \geqslant 1 - \delta$, $z \leqslant \delta$, $z \geqslant H - \delta$, то $\eta_m(r, z) = 0$, $m = 0, 1$. *Тогда на* T *справедливы неравенства*

$$\left| \frac{\partial^p u}{\partial x^{p-\mu-\nu} \partial y^\mu \partial z^\nu} \right| \leqslant a_1 r^{\lambda_p - p} \sum_{j=0}^{1} \| \eta_j \|_{C_{2,\lambda}(\gamma_j)}, \tag{1.5}$$

$$\left| \frac{\partial^p u}{\partial z^p} \right| \leqslant a_2 \sum_{j=0}^{1} \| \eta_j \|_{C_{2,\lambda}(\gamma_j)}, \tag{1.6}$$

где $1 \leqslant p \leqslant 2$, $0 \leqslant \mu + \nu \leqslant p$,

$$\lambda_p = \min\{p, 1/\alpha - \varepsilon\}, \tag{1.7}$$

$\varepsilon \in (0, 1/\alpha)$ — *любое фиксированное*, a_1, a_2 *не зависят от* r *и функции* u.

Доказательство. Задача (1.4), очевидно, имеет единственное классическое решение u, которое может быть продолжено из T нечетно (гармонически) через плоскости $z = 0$ и $z = H$ на сектор

$$T^* = \left\{(x, y, z) : 0 < r < 1, \ |\varphi| < \frac{\alpha\pi}{2}, \ -H < z < 2H\right\}.$$

Для продолженной функции сохраним на $\overline{T}^*$ обозначение u. Пусть γ^* — граница T^*, γ_k^* — плоский кусок границы γ^*, являющийся продолжением γ_k, $k = 0, 1$. Очевидно, так как $\eta_k(r, z) = 0$ при $z \leqslant \delta$ и $z \geqslant H - \delta$, то $u \in C_{2,\lambda}(\gamma_k^*)$, причем $\| u \|_{C_{2,\lambda}(\gamma_k^*)} \leqslant c' \| \eta_k \|_{C_{2,\lambda}(\gamma_k)}$, $k = 0, 1$, где c' не зависит от u.

Зафиксируем $z_0 \in (0, H)$. Рассмотрим непрерывную на $\overline{T}^*$ и гармоническую на T^* функцию

$$v = u - \eta_0(0, z_0) - (z - z_0)\, \eta_{0z}'(0, z_0) - \omega(x, y), \tag{1.8}$$

где

$$\omega(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\eta_{0r}'(0, z_0) + \eta_{1r}'(0, z_0)}{2\cos(\alpha\pi/2)} x + \dfrac{\eta_{0r}'(0, z_0) - \eta_{1r}'(0, z_0)}{2\sin(\alpha\pi/2)} y, & \alpha < 1; \\ 0, & \alpha \geqslant 1. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\| v \|_{C_{2,\lambda}(\gamma_k^*)} \leqslant c_0 \sum_{j=0}^{1} \| \eta_j \|_{C_{2,\lambda}(\gamma_j)}, \tag{1.9}$$

$$|v| \leqslant c_0((z - z_0)^2 + r^\nu) \sum_{j=0}^{1} \| \eta_j \|_{C_{2,\lambda}(\gamma_j)} \text{ на } \gamma^*,$$

$$\left| \frac{\partial v}{\partial r} \right| + \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right| \leqslant c_0(2 - \nu + r + |z - z_0|) \sum_{j=0}^{1} \| \eta_j \|_{C_{2,\lambda}(\gamma_j)} \text{ на } \gamma_k^*, \tag{1.10}$$

где $k = 0, 1$, c_0 не зависит от $z_0 \in (0, H)$, z, r и функции u, а

$$\nu = \begin{cases} 1, & \alpha \geqslant 1; \\ 2, & \alpha < 1. \end{cases}$$

Зададим функцию

$$w = (c_0((z - z_0)^2 - r^2/2) + c_1 r^{\lambda_2} \cos \lambda_2 \varphi) \sum_{j=0}^{1} \| \eta_j \|_{C_{2,\lambda}(\gamma_j)},$$

где λ_2 — величина (1.7), $c_1 = 3\, c_0/2 \cos(\lambda_2 \alpha\pi/2)$. Очевидно, w непрерывна на $\overline{T}^*$ и гармонична на T^*, причем на γ^* $|v| \leqslant w$. Отсюда по принципу максимума имеем на $\overline{T}^*$

$$|v| \leqslant (c_0 (z - z_0)^2 + c_1 r^{\lambda_2}) \sum_{j=0}^{1} \| \eta_j \|_{C_{2,\lambda}(\gamma_j)}. \tag{1.11}$$

Пусть $0 < r_0 \leqslant 1 - \delta/2$, $l_0 = r_0 \min\{\delta/2, \sin(\alpha\pi/2), H\}$, $S_k^0(r_0, z_0, l_0)$ — открытый полушар с «центром» на γ_k в точке (r_0, z_0), целиком расположенный в T^*, $\gamma_k^0 = \gamma_k^* \cap \overline{S}_k^0$ — плоская часть границы полушара S_k^0. Из (1.10), (1.11) следует, что

$$\max_{\overline{S}_k^0} |v| \leqslant c_2 r_0^{\lambda_2} \sum_{j=0}^{1} \| \eta_j \|_{C_{2,\lambda}(\gamma_j)}, \tag{1.12}$$

$$\max_{\gamma_k^0} \left(\left| \frac{\partial v}{\partial r} \right| + \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right| \right) \leqslant c_2 (2 - \nu + r_0) \sum_{j=0}^{1} \| \eta_j \|_{C_{2,\lambda}(\gamma_j)}, \tag{1.13}$$

где $k = 0, 1$, c_2 не зависит от $z_0 \in (0, H)$, $r_0 \in (0, 1 - \delta/2]$ и функции u.

Осуществим равномерное растяжение полушара S_k^0 с коэффициентом растяжения l_0^{-1}. Тогда гармоническая в S_k^0 функция v перейдет в гармоническую в полушаре $\tilde{S}_k^0$ единичного радиуса функцию $\tilde{v}$, граничные значения которой на плоской части $\tilde{\gamma}_k^0$ границы полушара $\tilde{S}_k^0$ будут принадлежать классу $C_{2,\lambda}(\tilde{\gamma}_k^0)$, причем в силу (1.9), (1.12), (1.13)

$$\| \tilde{v} \|_{C_{2,\lambda}(\tilde{\gamma}_k^0)} \leqslant c_3 r_0^{\lambda_2} \sum_{j=0}^{1} \| \eta_j \|_{C_{2,\lambda}(\gamma_j)},$$

где $0 \leqslant k \leqslant 1$, c_3 не зависит от $z_0 \in (0, H)$, $r_0 \in (0, 1 - \delta/2]$ и функции u.

Применив к функции $\tilde{v}$ лемму 1.3 при $l = 1$, $\xi = 1/2$ с учетом (1.12) и приведенной выше оценки $\| \tilde{v} \|_{C_{2,\lambda}(\tilde{\gamma}_k^0)}$ и осуществив обратное преобразование равномерного растяжения с коэффициентом l_0 единичного полушара $\tilde{S}_k^0$ на $S_k^0(r_0, z_0, l_0)$, придем к неравенству

$$\max_{\{D^p\}} \max_{\overline{S}_k^0(r, z_0, l_0/2)} |D^p v| \leqslant c_4 r_0^{\lambda_2 - p} \sum_{j=0}^{1} \| \eta_j \|_{C_{2,\lambda}(\gamma_j)}, \tag{1.14}$$

где D^p — оператор дифференцирования по x, y, z порядка p, $p = 0, 1, 2$, c_4 не зависит от $z_0 \in (0, H)$, $r_0 \in (0, 1 - \delta/2]$ и функции u. Отсюда, из (1.11) и леммы 1.2 следует неравенство

$$\max_{\{D^p\}} \max_{|\varphi| \leqslant \frac{\alpha\pi}{2}} |D^p v| \leqslant c_5 r^{\lambda_2 - p} \sum_{j=0}^{1} \| \eta_j \|_{C_{2,\lambda}(\gamma_j)}, \tag{1.15}$$

$$(z = z_0,\ 0 < r \leqslant 1 - \delta/2),$$

где $p = 1, 2$, c_5 не зависит от $z_0 \in (0, H)$ и функции u.

Из (1.15) в силу (1.8) вытекает неравенство (1.5) при $z \in (0, H)$, $|\varphi| < \alpha\pi/2$, $0 < r \leqslant 1 - \delta/2$. Неравенство (1.5) справедливо в силу оценки (34.5) из [22] и леммы 1.2 также при $r \in (1 - \delta/2, 1)$ для $z \in (0, H)$, $|\varphi| < \alpha\pi/2$ (возможно, только потребуется увеличить постоянную a_1), поскольку на плоских кусках

$$\left\{(x, y, z) : 1 - \delta \leqslant r \leqslant 1,\quad \varphi = (-1)^k \frac{\alpha\pi}{2},\quad -H \leqslant z \leqslant 2H\right\}, \qquad k = 0, 1,$$

границы γ^* области T^* функция u равна нулю и может быть гармонически продолжена через них. На цилиндрической же поверхности

$$\left\{(x, y, z): r = 1, \quad |\varphi| \leqslant \frac{\alpha\pi}{2} + \delta_0, \quad -H \leqslant z \leqslant 2H\right\},$$

где $\delta_0 > 0$ — некоторая величина, продолженная гармоническая функция тоже равна нулю, т. е. сколь угодно гладкая. Неравенство (1.5) доказано.

Докажем неравенство (1.6). Пусть G_n — область в плоскости xy, граница которой является объединением четырех кривых:

$$\sigma_j^n = \{(x, y) : 1/2\, n \leqslant r \leqslant 1, \quad \varphi = (-1)^j\, \alpha\pi/2\}, \quad j = 0, 1,$$
$$\sigma_2^n = \{(x, y) : r = 1, \quad |\varphi| \leqslant \alpha\pi/2\},$$
$$\sigma_3^n = \{(x, y) : r = r_n(\varphi), \quad \alpha\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \alpha\pi/2\},$$

где

$$r_n(\varphi) = \frac{2\pi^{1/4} - (\varphi - \alpha\pi/2)^{1/4} - (2\pi - \alpha\pi/2 - \varphi)^{1/4}}{2n\,(2 - (2 - \alpha)^{1/4}\pi^{1/4}}.$$

Нетрудно убедиться, что кривая σ_3^n расположена вне сектора $\{(x, y) : 0 < r < 1, \ |\varphi| < \alpha\pi/2\}$ и гладко сопрягается с отрезками σ_j^n, $j = 0, 1$, так что кривая, являющаяся объединением σ_0^n, σ_1^n и σ_3^n, имеет непрерывно дифференцируемую кривизну. Пусть

$$T_n = \{(x, y, z) : (x, y) \in G_n, \ 0 < z < H\},$$

γ^n — граница области T_n,

$$\gamma_j^n = \{(x, y, z) : (x, y) \in \sigma_j^n, \ 0 \leqslant z \leqslant H\}, \ j = 0, 1,$$

$\psi(\tau)$ — бесконечно дифференцируемая функция:

$$\psi(\tau) = \begin{cases} 0, & -\infty \leqslant \tau < 1, \\ \dfrac{\int\limits_0^{\tau-1} \exp\{-(t(1-t))^{-2}\}\, dt}{\int\limits_0^1 \exp\{-(t(1-t))^{-2}\}\, dt}, & 1 < \tau < 2, \\ 1, & 2 \leqslant \tau < +\infty, \end{cases} \tag{1.16}$$

$\psi_n(r) = \psi(2nr)$, η_j^n — функция, заданная на γ_j^n, причем

$$\eta_j^n = \psi_n(r)\, \eta_j(r, z), \ j = 0, 1, \ 0 \leqslant \psi_n(r) \leqslant 1, \ 1/2n \leqslant r \leqslant 1. \tag{1.17}$$

Рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta u_n = 0 \text{ на } T_n, \ u_n = \eta^n \text{ на } \gamma^n, \tag{1.18}$$

где

$$\begin{aligned} &\eta^n = \eta_j^n \text{ на } \gamma_j^n, \ j = 0, 1, \\ &\eta^n = 0 \text{ на } \gamma^n \setminus (\gamma_0^n \cup \gamma_1^n). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Решение u_n задачи (1.18) дважды непрерывно дифференцируемо на $\overline{T}_n$. Это следует из (1.17), (1.19), заданных требований на функции $\eta_j(r, z)$, $j = 0, 1$, и возможности гармонического продолжения из T_n функции u_n через части γ_2^n и γ_3^n границы γ^n, расположенные в плоскостях $z = 0$, $z = H$, и плоские куски

$$\{(x, y, z) : 1 - \delta \leqslant r \leqslant 1, \ \varphi = (-1)^j\, \alpha\pi/2, \ 0 \leqslant z \leqslant H\}, \ j = 0, 1,$$

на которых $u_n = 0$, в силу известных свойств гладкости решения уравнения Лапласа внутри области и вблизи гладких кусков границы при гладких граничных значениях (см. [21, 22]). Следовательно,

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} = -\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}\right) = 0 \text{ на } \gamma_2^n \cup \gamma_3^n, \tag{1.20}$$

и в соответствии с (1.17), (1.19)

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}\right| \leqslant \max_{j=0,1} \max_{\gamma_j} \left|\frac{\partial^2 \eta_j}{\partial z^2}\right| \text{ на } \gamma^n \setminus (\gamma_2^n \cup \gamma_3^n). \tag{1.21}$$

Так как $\partial^2 u_n/\partial z^2$ гармонична на T_n, то по принципу максимума из (1.20), (1.21) имеем

$$\max_{\overline{T}_n} \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}\right| \leqslant \max_{j=0,1} \max_{\gamma_j} \left|\frac{\partial^2 \eta_j}{\partial z^2}\right|. \tag{1.22}$$

Обозначим

$$v_n = u_n - u, \tag{1.23}$$

где u — решение задачи (1.4). Имеем

$$\Delta v_n = 0 \text{ на } T, \ v_n = \tau^n \text{ на } \gamma, \tag{1.24}$$

где

$$\tau^n = \tau_j^n = u_n - \eta_j \text{ на } \gamma_j, \ j = 0, 1, \ \tau^n = 0 \text{ на } \gamma_2, \tag{1.25}$$

причем в силу (1.4), (1.17) — (1.19)

$$|\tau_j^n(r, z)| \leqslant 2(1 - \psi_n(r)) \max_{\overline{T}} |u| \text{ на } \gamma_j. \tag{1.26}$$

Рассмотрим функцию w двух переменных, гармоническую в бесконечном угле $|\varphi| < \alpha\pi/2$, непрерывную на замыкании этого угла, удовлетворяющую на его сторонах граничным условиям

$$w(r, (-1)^j \alpha\pi/2) = 2(1 - \psi(r)) \max_{\overline{T}} |u|, \qquad j = 0,1, \tag{1.27}$$

и следующему требованию на бесконечности:

$$\max_{|\varphi| \leqslant \alpha\pi/2} |w(r, \varphi)| \to 0 \quad \text{при } r \to +\infty. \tag{1.28}$$

Такая функция существует, в чем легко убедиться с помощью конформного отображения рассматриваемого угла на полуплоскость и представления гармонической функции через интеграл Пуассона для полуплоскости (см. [23]). В силу (1.27), (1.28) и гармоничности w

$$\inf_{\substack{|\varphi| \leqslant \alpha\pi/2 \\ 0 < r < +\infty}} w(r, \varphi) = 0. \tag{1.29}$$

Пусть

$$w_n(r, \varphi, z) = w(2nr, \varphi). \tag{1.30}$$

Функция w_n, очевидно, является гармонической в T (как функция трех переменных), причем на основании (1.24)—(1.27), (1.29)

$$|v_n| \leqslant w_n \text{ на } \gamma.$$

Отсюда с учетом (1.30) по принципу максимума

$$|v_n(r, \varphi, z)| \leqslant w(2nr, \varphi) \text{ на } \overline{T},$$

т. е. согласно (1.28)

$$v_n(r, \varphi, z) \to 0 \text{ при } n \to +\infty \tag{1.31}$$

для любых $r \in (0, 1]$, $\varphi \in [-\alpha\pi/2, \alpha\pi/2]$ и $z \in (0, H)$.

Так как при любых фиксированных $r \in (0, 1)$ и $\varphi \in (-\alpha\pi/2, \alpha\pi/2)$ производная $\partial^2 u/\partial z^2$ непрерывна по z на отрезке $[0, H]$ (будучи непрерывной в T^*), то из (1.22), (1.23), (1.31) и леммы 1.1 следует неравенство (1.6) при $p = 2$ с постоянной $a_2 = 1$.

При $p = 1$ неравенство (1.6) вытекает из доказанного неравенства (1.6) для $p = 2$ и оценок [24], возможно только с большей постоянной a_2, чем указанной выше. Теорема 1.1 доказана.

Теорема 1.2. *Пусть* δ — *число*, $0 < \delta < \min\{1, H\}/2$, u — *решение задачи* (1.4), *где функция* η *непрерывна на* γ, *причем* $\eta = 0$ *на* γ_k, $k = 0, 1$,

$$T_\delta = \left\{(x, y, z) : 0 < r < 1 - \delta,\ |\varphi| < \frac{\alpha\pi}{2},\ \delta < z < H - \delta\right\}.$$

Тогда на T_δ *справедливы неравенства*

$$\left|\frac{\partial^p u}{\partial x^{p-\mu-\nu}\,\partial y^\mu\,\partial z^\nu}\right| \leqslant b_1 r^{\lambda_2 - p} \max_\gamma |\eta|, \tag{1.32}$$

$$\left|\frac{\partial^p u}{\partial z^p}\right| \leqslant b_2 \max_\gamma |\eta|, \tag{1.33}$$

где $1 \leqslant p \leqslant 2$, $0 \leqslant \mu + \nu \leqslant p$, λ_2 — *величина* (1.7), b_1, b_2 *не зависят от* r *и функции* u.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$w = (2(2(z - z_0)^2 - r^2)/\delta^2 + cr^{\lambda_2}\cos\lambda_2\varphi)\max_\gamma |\eta|, \tag{1.34}$$

где $c = (1 + 2/\delta^2)/\cos(\lambda_2\alpha\pi/2)$. Очевидно, w непрерывна на $\overline{T}$ и гармонична на T, причем при любом фиксированном $z_0 \in [\delta/2, H - \delta/2]$ на γ выполняется неравенство $|\eta| \leqslant w$. Отсюда по принципу максимума при $z_0 \in [\delta/2, H - \delta/2]$ на $\overline{T}$

$$|u| \leqslant w. \tag{1.35}$$

Из (1.34) и (1.35), где $z = z_0 \in [\delta/2, H - \delta/2]$, следует на $\overline{T}_{\delta/2}$ неравенство

$$|u| \leqslant cr^{\lambda_2} \max_\gamma |\eta|. \tag{1.36}$$

Поскольку $u = 0$ на $\gamma_0 \cup \gamma_1$, то функция u может быть продолжена гармонически (нечетно) через плоские грани γ_k, $k = 0, 1$, на область

$$T^{\delta_0}_{\delta/2} = \{(x, y, z) : 0 < r < 1 - \delta/2,\ |\varphi| < \alpha\pi/2 + \delta_0,\ \delta/2 < z < H - \delta/2\},$$

где $\delta_0 > 0$ — некоторое число, с сохранением неравенства (1.36) на $T^{\delta_0}_{\delta/2}$. Отсюда и из леммы 1.2 легко следует неравенство (1.32) на T_δ при $p = 1, 2$.

Неравенство (1.33) на T_δ вытекает из результатов А. Ф. Филиппова [2]. в частности из неравенства (3.32) работы [2] при $l = m = 0$, которое остается в силе и для рассматриваемой гармонической функции, если в нем заменить $\|f\|_p$ на $\max_\gamma |\eta|$ и положить формально $p = 3$. Неравенство (1.33) можно установить и непосредственно, аналогично неравенству (1.6). Теорема 1.2 доказана.

Пусть M — произвольный ограниченный, вообще говоря, многосвязный многогранник, граница которого Γ состоит из конечного числа плоских

граней и во всех точках удовлетворяет условию касания извне некоторым неориентированным круговым конусом конечной высоты, т. е. является регулярной [25]. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta u = 0 \text{ на } M, \ u = \eta \text{ на } \Gamma, \tag{1.37}$$

где η — заданная непрерывная на Γ функция, принадлежащая на каждой грани классу $C_{2,\lambda}$, $0 < \lambda < 1$. В силу регулярности границы Γ задача (1.37) имеет единственное классическое решение [25].

Введем обозначения:

$$T^{\mu} = T(r_0, \alpha, H_0, \mu) = \left\{(x, y, z) : 0 < r < r_0 + \mu, \ |\varphi| \leqslant \frac{\alpha\pi}{2}, \ -\mu < z < H_0 + \mu\right\},$$

$$\gamma_k^{\mu} = \left\{(x, y, z) : 0 \leqslant r \leqslant r_0 + \mu, \ \varphi = (-1)^k \frac{\alpha\pi}{2}, \ -\mu \leqslant z \leqslant H_0 + \mu\right\},$$

γ^{μ} — граница цилиндрического сектора $T(r_0, \alpha, H_0, \mu)$.

Теорема 1.3. *Допустим, что* $r_0 > 0$, $H_0 > 0$, $\mu_0 > 0$, $0 < \alpha < 2$, *причем* $T^{\mu_0} \subset M$, $\gamma_k^{\mu_0} \subset \Gamma$, $k = 0, 1$. *Тогда решение* u *задачи* (1.37) *удовлетворяет на цилиндрическом секторе* $T^0 = T(r_0, \alpha, H_0, 0)$ *неравенствам*

$$\left|\frac{\partial^p u}{\partial x^{p-\mu-\nu}\,\partial y^{\mu}\,\partial z^{\nu}}\right| \leqslant c_1 r^{\lambda_p - p}\left(\max_{\overline{T}^{\mu_0}} |u| + \sum_{j=0}^{1} \|\eta\|_{C_{2,\lambda}(\gamma_j^{\mu_0})}\right), \tag{1.38}$$

$$\left|\frac{\partial^p u}{\partial z^p}\right| \leqslant c_2\left(\max_{\overline{T}^{\mu_0}} |u| + \sum_{j=0}^{1} \|\eta\|_{C_{2,\lambda}(\gamma_j^{\mu_0})}\right), \tag{1.39}$$

$$\left|\frac{\partial^q u}{\partial x^{q-m-n}\,\partial y^{m}\,\partial z^{n}}\right| \leqslant c_3\left(\max_{\overline{T}^{\mu_0}} |u| + \sum_{j=0}^{1} \|\eta\|_{C_{2,\lambda}(\gamma_j^{\mu_0})}\right) \tau^{2-q} \begin{cases} 1, & 2 \leqslant n \leqslant q, \\ r^{\lambda_2 - 2}, & 0 \leqslant n \leqslant 1, \end{cases} \tag{1.40}$$

где η — *граничные значения решения* u, $1 \leqslant p \leqslant 2$, $3 \leqslant q \leqslant 4$, $0 \leqslant \mu + \nu \leqslant p$, $0 \leqslant m + n \leqslant q$, λ_p — *величина* (1.7), τ — *расстояние от текущей точки области* T^0 *до* $\gamma_0^0 \cup \gamma_1^0$, c_1, c_2, c_3 — *постоянные, не зависящие от* r, τ *и функции* u.

Доказательство. Пусть $\mu_1 = 2\mu_0/3$, $\mu_2 = \mu_0/3$. Рассмотрим две задачи Дирихле:

$$\Delta v = 0 \text{ на } T^{\mu_0}, \quad v = \eta^{\mu_0} \text{ на } \gamma^{\mu_0}, \tag{1.41}$$

$$\Delta w = 0 \text{ на } T^{\mu_1}, \quad w = \eta^{\mu_1} \text{ на } \gamma^{\mu_1}, \tag{1.42}$$

где

$$\eta^{\mu_0} = 0 \text{ на } \gamma^{\mu_0} \setminus (\gamma_0^{\mu_0} \cup \gamma_1^{\mu_0}), \tag{1.43}$$

$$\eta^{\mu_0} = \psi_1(r)\,\psi_2(z)\,\psi_3(z)\,\eta \text{ на } \gamma_k^{\mu_0}, \quad k = 0, 1, \tag{1.44}$$

η — граничные значения решения u задачи (1.37),

$$\psi_1(r) = \psi(6(r_0 + \mu_0 - r)/\mu_0),$$

$$\psi_2(z) = \psi(6(z + \mu_0)/\mu_0),$$

$$\psi_3(z) = \psi(6(H_0 + \mu_0 - z)/\mu_0),$$

ψ — функция (1.16),

$$\eta^{\mu_1} = 0 \text{ на } \gamma_0^{\mu_1} \cup \gamma_1^{\mu_1}, \tag{1.45}$$

$$\eta^{\mu_1} = u - v \text{ на } \gamma^{\mu_1} \setminus (\gamma_0^{\mu_1} \cup \gamma_1^{\mu_1}). \tag{1.46}$$

Очевидно, $T^{\mu_1} \subset T^{\mu_0}$,

$$\| \eta^{\mu_0} \|_{C_{2,\lambda}(\gamma_k^{\mu_0})} \leqslant c_4 \| \eta \|_{C_{2,\lambda}(\gamma_k^{\mu_0})}, \qquad k = 0, 1, \tag{1.47}$$

$$\max_{\overline{T}^{\mu_0}} |v| = \max_{\gamma^{\mu_0}} |\eta^{\mu_0}| \leqslant \max_{\overline{T}^{\mu_0}} |u|,$$

$$\max_{\overline{T}^{\mu_1}} |w| = \max_{\gamma^{\mu_1}} |\eta^{\mu_1}| \leqslant \max_{\overline{T}^{\mu_0}} |u| + \max_{\overline{T}^{\mu_0}} |v| \leqslant 2 \max_{\overline{T}^{\mu_0}} |u|, \tag{1.48}$$

$$u = v + w \text{ на } T^{\mu_1}, \tag{1.49}$$

где постоянная c_4 не зависит от u.

Осуществив равномерное растяжение областей T^{μ_0} и T^{μ_1} соответственно с коэффициентами растяжения $(r_0 + \mu_0)^{-1}$ и $(r_0 + 2\mu_0/3)^{-1}$ и применив для гармонических функций $\tilde{v}$ и $\tilde{w}$, полученных из v и w при указанном растяжении областей T^{μ_0} и T^{μ_1}, теорему 1.1 (с учетом (1.41), (1.43), (1.44), (1.47)), при $H = (H_0 + 2\mu_0)/(r_0 + \mu_0)$, $\delta = \mu_0/6(r_0 + \mu_0)$ и теорему 1.2 (с учетом (1.42), (1.45), (1.46), (1.48)) при $H = (H_0 + 4\mu_0/3)/(r_0 + 2\mu_0/3)$, $\delta = \mu_0/3(r_0 + 2\mu_0/3)$ соответственно, а затем, вернувшись к первоначальным независимым переменным, приходим к следующим неравенствам на T^{μ_2} ($T^{\mu_2} \subset T^{\mu_1} \subset T^{\mu_0}$):

$$\left| \frac{\partial^p v}{\partial x^{p-\mu-\nu} \partial y^\mu \partial z^\nu} \right| \leqslant c_4 r^{\lambda_p - p} \sum_{j=0}^{1} \| \eta \|_{C_{2,\lambda}(\gamma_j^{\mu_0})}, \tag{1.50}$$

$$\left| \frac{\partial^p v}{\partial z^p} \right| \leqslant c_5 \sum_{j=0}^{1} \| \eta \|_{C_{2,\lambda}(\gamma_j^{\mu_0})}, \tag{1.51}$$

$$\left| \frac{\partial^p w}{\partial x^{p-\mu-\nu} \partial y^\mu \partial z^\nu} \right| \leqslant c_6 r^{\lambda_2 - p} \max_{\overline{T}^{\mu_0}} |u|, \tag{1.52}$$

$$\left| \frac{\partial^p w}{\partial z^p} \right| \leqslant c_7 \max_{\overline{T}^{\mu_0}} |u|, \tag{1.53}$$

где $1 \leqslant p \leqslant 2$, $0 \leqslant \mu + \nu \leqslant p$, λ_p — величина (1.7), c_4, c_5, c_6, c_7 не зависят от r и функции u.

Из (1.49)—(1.53) следуют неравенства (1.38), (1.39) на $T^{\mu_2} \supset T^0$. Из неравенств (1.38), (1.39), установленных на T^{μ_2}, и из леммы 1.2 вытекает неравенство (1.40) на T^0. Теорема 1.3 доказана.

Пусть ρ, φ, θ — сферические координаты, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, θ — угол, отсчитываемый от положительной полуоси z, φ — как и прежде, угол, отсчитываемый в плоскости xy от положительной полуоси x,

$$K^\mu = K(\rho_0, \alpha, \theta_0, \mu) = \left\{(x, y, z) : 0 < \rho < \rho_0 + \mu,\ |\varphi| < \frac{\alpha\pi}{2},\ 0 < \theta < \theta_0 + \mu\right\}$$

— шаровой сектор,

$$\sigma_j^\mu = \left\{(x, y, z) : 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0 + \mu,\ \varphi = (-1)^j \frac{\alpha\pi}{2},\ 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + \mu\right\},$$

σ^μ — граница шарового сектора K^μ.

Теорема 1.4. *Допустим, что* $\rho_0 > 0$, $\theta_0 > 0$, $\mu_0 > 0$, $0 < \alpha < 2$, $\theta_0 + \mu_0 < \pi$, *причем* $K^{\mu_0} \subset M$, $\sigma_j^{\mu_0} \subset \Gamma$, $j = 0, 1$, u, *кроме того, решение и задачи* (1.37) *удовлетворяет на* $\overline{K}^{\mu_0}$ *неравенству*

$$|u - u_0| \leqslant A\rho^{\lambda_0}, \tag{1.54}$$

где u_0 — значение u в точке (0, 0, 0), $0 < \lambda_0 \leqslant 1$, A *— некоторая постоянная, не зависящая от* ρ. *Тогда для решения задачи* (1.37) *справедливы на шаровом секторе* $K^0 = K(\rho_0, \alpha, \theta_0, 0)$ *неравенства*

$$\left|\frac{\partial^p u}{\partial x^{p-\mu-\nu}\partial y^\mu \partial z^\nu}\right| \leqslant c_1 \rho^{\lambda_0-\lambda_p} r^{\lambda_p-p}\left(A + \sum_{j=0}^{1} \|\eta\|_{C_{2,\lambda}(\sigma_j^{\mu_0})}\right), \tag{1.55}$$

$$\left|\frac{\partial^p u}{\partial z^p}\right| \leqslant c_2 \rho^{\lambda_0-p}\left(A + \sum_{j=0}^{1} \|\eta\|_{C_{2,\lambda}(\sigma_j^{\mu_0})}\right), \tag{1.56}$$

$$\left|\frac{\partial^q u}{\partial x^{q-m-n}\partial y^m \partial z^n}\right| \leqslant c_3\left(A + \sum_{j=0}^{1} \|\eta\|_{C_{2,\lambda}(\sigma_j^{\mu_0})}\right) \tau^{2-q} \begin{cases} \rho^{\lambda_0-2}, & 2 \leqslant n \leqslant q, \\ \rho^{\lambda_0-\lambda_2} r^{\lambda_2-2}, & 0 \leqslant n \leqslant 1, \end{cases} \tag{1.57}$$

где η *— граничные значения решения* u, $1 \leqslant p \leqslant 2$, $3 \leqslant q \leqslant 4$, $0 \leqslant \mu + \nu \leqslant p$, $0 \leqslant m + n \leqslant q$, λ_p *при* $p = 1, 2$ *имеет выражение* (1.7), $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, τ *— расстояние от текущей точки области* K^0 *до* $\sigma_0^0 \cup \sigma_1^0$, c_1, c_2, c_3 *— постоянные, не зависящие от* ρ, r, τ *и функции* u.

Доказательство. Пусть $t \in (0, 1]$,

$$G^t = \left\{(x, y, z): \frac{t\rho_0}{5} < \rho < t(\rho_0 + \mu_0),\ |\varphi| < \frac{\alpha\pi}{2},\ 0 < \theta < \theta_0 + \mu_0\right\},$$

$$g_k^t = \left\{(x, y, z): \frac{t\rho_0}{5} \leqslant \rho \leqslant t(\rho_0 + \mu_0),\ \varphi = (-1)^k \frac{\alpha\pi}{2},\ 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + \mu_0\right\},$$

$k = 0, 1$, g^t — граница G^t,

$$G_0^t = \left\{(x, y, z): \frac{t\rho_0}{3} < \rho < t\rho_0,\ |\varphi| < \frac{\alpha\pi}{2},\ 0 < \theta < \theta_0 + \mu_0\right\}.$$

Очевидно, $G^t \subset K^{\mu_0}$, $g_k^t \subset \sigma_k^{\mu_0}$, $k = 0, 1$, $t \in (0, 1]$, причем

$$K^0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_0^{1/n}. \tag{1.58}$$

Пусть также

$$T_*^\xi = \left\{(x, y, z): 0 < r < r_0 + \xi,\ |\varphi| < \frac{\alpha\pi}{2},\ z_0 - \xi < z < \rho_0 + \xi\right\},$$

$$\gamma_{*k}^\xi = \left\{(x, y, z): 0 \leqslant r \leqslant r_0 + \xi,\ \varphi = (-1)^k \frac{\alpha\pi}{2},\ z_0 - \xi \leqslant z \leqslant \rho_0 + \xi\right\},$$

$k = 0, 1$, γ_*^ξ — граница T_*^ξ,

$$r_0 = \min\{a_0/2,\ a_1, a_2\},\quad z_0 = \sqrt{\rho_0^2/9 - r_0^2},$$

$$\xi_0 = \min\left\{\frac{\rho_0}{20},\ \frac{\rho_0 \sin\mu_0}{3\sqrt{2}},\ \frac{\rho_0 + \mu_0 - \sqrt{\rho_0^2 + r_0^2}}{\sqrt{2}}\right\},$$

где $a_0 = \sqrt{2\rho_0\mu_0 + \mu_0^2}$, $a_1 = (\rho_0 \sin\theta_0)/3$, $a_2 = \rho_0\sqrt{7}/12$.

Элементарные подсчеты показывают, что

$$0 < z_0 - \xi_0 < z_0 < \rho_0 < \rho_0 + \xi_0 < \rho_0 + \mu_0,$$
$$r_0 > 0,\quad T_*^{\xi_0} \subset G^1,\quad \gamma_{*k}^{\xi_0} \subset g_k^1,\quad k = 0, 1,$$

причем множество $G_0^1 \setminus T_*^0$ удалено от оси z на расстояние, равное r_0.

Не ограничивая общности, будем считать, что $u_0 = 0$. Тогда согласно (1.54)

$$\max_{\bar{G}^t} |u| \leqslant A(\rho_0 + \mu_0)^{\lambda_0} t^{\lambda_0}. \tag{1.59}$$

С помощью равномерного растяжения с коэффициентом растяжения t^{-1} отобразим G^t, $t \in (0, 1]$, на G^1. При этом гармоническая на $G^t \subset K^{\mu_0}$ функция u перейдет в гармоническую на G^1 функцию u^t, причем, в частности, в силу (1.59) будут выполняться неравенства

$$\max_{\bar{T}_*^{\xi_0}} |u^t| \leqslant \max_{\bar{G}^1} |u^t| \leqslant A(\rho_0 + \mu_0)^{\lambda_0} t^{\lambda_0}, \tag{1.60}$$

$$\|\eta^t\|_{C_{2,\lambda}(\gamma_{*k}^{\xi_0})} \leqslant \|\eta^t\|_{C_{2,\lambda}(g_k^1)} \leqslant c_4 t^{\lambda_0} \|\eta\|_{C_{2,\lambda}(g_k^t)} \leqslant c_4 t^{\lambda_0} \|\eta\|_{C_{2,\lambda}(\sigma_k^{\mu_0})}, \quad k = 0,1, \tag{1.61}$$

где η^t — граничные значения функции u^t, $g_k^t \subset \sigma_k^{\mu_0}$, c_4 не зависит от $t \in (0, 1]$ и функции u.

Применение теоремы 1.3 к функции u^t на $T_*^{\xi_0}$ приводит с учетом (1.60), (1.61) к следующим неравенствам на T_*^0:

$$\left| \frac{\partial^p u^t}{\partial x^{p-\mu-\nu} \partial y^\mu \partial z^\nu} \right| \leqslant c_5 r^{\lambda_p - p} t^{\lambda_0} \left(A + \sum_{j=0}^{1} \|\eta\|_{C_{2,\lambda}(\sigma_j^{\mu_0})} \right), \tag{1.62}$$

$$\left| \frac{\partial^p u^t}{\partial z^p} \right| \leqslant c_6 t^{\lambda_0} \left(A + \sum_{j=0}^{1} \|\eta\|_{C_{2,\lambda}(\sigma_j^{\mu_0})} \right), \tag{1.63}$$

где $1 \leqslant p \leqslant 2$, $0 \leqslant \mu + \nu \leqslant p$, λ_p при $p = 1, 2$ имеет выражение (1.7), c_5, c_6 не зависят от $t \in (0, 1]$, r и функции u.

Так как множество $G_0^1 \setminus T_*^0$ удалено от оси z на расстояние $r_0 > 0$, то из (1.60), (1.61) и лемм 1.3 и 1.2 вытекает справедливость неравенств (1.62), (1.63) и на $G_0^1 \setminus T_*^0$, т. е. в конечном счете на G_0^1 (при этом, возможно, только потребуется увеличить постоянные c_5 и c_6).

Произведя обратное отображение G_0^1 на G_0^t равномерным растяжением (фактически сжатием) с коэффициентом растяжения, равным t, на основании 1.62), (1.63) приходим к следующим неравенствам на G_0^t, $t \in (0, 1]$:

$$\left| \frac{\partial^p u}{\partial x^{p-\mu-\nu} \partial y^\mu \partial z^\nu} \right| \leqslant c_5 t^{\lambda_0 - \lambda_p} r^{\lambda_p - p} \left(A + \sum_{j=0}^{1} \|\eta\|_{C_{2,\lambda}(\sigma_j^{\mu_0})} \right), \tag{1.64}$$

$$\left| \frac{\partial^p u}{\partial z^p} \right| \leqslant c_6 t^{\lambda_0 - p} \left(A + \sum_{j=0}^{1} \|\eta\|_{C_{2,\lambda}(\sigma_j^{\mu_0})} \right), \tag{1.65}$$

где p, μ, ν, λ_q, c_5, c_6 те же, что и в (1.62), (1.63), а значение r в (1.64), отвечающее текущей точке на G_0^t, естественно в t раз ($0 < t \leqslant 1$) отличается от значения r в (1.62) для соответствующей ей точки на G_0^1. Из (1.64), (1.65) в силу (1.58) следуют неравенства (1.55), (1.56) на K^0.

Неравенства (1.55), (1.56) справедливы и на более широкой области $K^{\mu_0/2} \supset K^0$, вообще говоря, с другими постоянными c_1, c_2, что вытекает из проведенного доказательства, если с самого начала величины ρ_0, θ_0, μ_0 заменить соответственно на $\rho_0 + \mu_0/2$, $\theta_0 + \mu_0/2$, $\mu_0/2$. Из неравенств (1.55), (1.56) на $K^{\mu_0/2}$ (при соответствующих постоянных c_1, c_2) и леммы 1.2 непосредственно следует (1.57). Теорема 1.4 доказана.

Теорема 1.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.4, *причем* $\alpha = 1$, $\eta \in C_{2,\lambda}(\sigma_{0,1}^{\mu_0})$, *где* $\sigma_{0,1}^{\mu_0} = \sigma_0^{\mu_0} \cup \sigma_1^{\mu_0}$ — *плоская часть границы шарового сектора* $K^{\mu_0} = K(\rho_0, 1, \theta_0, \mu_0)$, η — *граничные значения решения* u *за-*

дачи (1.37). *Тогда для решения задачи* (1.37) *справедливы на шаровом секторе* $K^0 = K(\rho_0, 1, \theta_0, 0)$ *неравенства*

$$\left|\frac{\partial^p u}{\partial x^{p-\mu-\nu}\partial y^\mu \partial z^\nu}\right| \leqslant c_1 \rho^{\lambda_0 - p}(A + \|\eta\|_{C_{2,\lambda}(\sigma^{\mu_0}_{0,1})}),$$

$$\left|\frac{\partial^q u}{\partial x^{q-m-n}\partial y^m \partial z^n}\right| \leqslant c_2 \tau^{2-q}\rho^{\lambda_0-2}(A + \|\eta\|_{C_{2,\lambda}(\sigma^{\mu_0}_{0,1})}),$$

где $1 \leqslant p \leqslant 2$, $3 \leqslant q \leqslant 4$, $0 \leqslant \mu + \nu \leqslant p$, $0 \leqslant m + n \leqslant q$, τ — *расстояние от текущей точки области* K^0 *до* $\sigma^0_{0,1} = \sigma^0_0 \cup \sigma^0_1$, c_1, c_2 — *постоянные, не зависящие от* ρ, τ *и функции* u.

Доказательство теоремы 1.5, опирающееся на леммы 1.3 и 1.2, аналогично доказательству теоремы 1.4.

Теорема 1.6. *Пусть* $S^{\mu_0} = S(\rho_0, \theta_0, \mu_0) = \{(x, y, z) : 0 < \rho < \rho_0 + \mu_0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ 0 \leqslant \theta < \theta_0 + \mu_0\}$. *Тогда, если* $\rho_0 > 0$, $\theta_0 > 0$, $\mu_0 > 0$, $\theta_0 + \mu_0 < \pi$, *причем* $S^{\mu_0} \subset M$ *и на* S^{μ_0} *решение* u *задачи* (1.37) *удовлетворяет неравенству* (1.54), *то для решения задачи* (1.37) *справедливо на* $S^0 = S(\rho_0, \theta_0, 0)$ *неравенство*

$$\left|\frac{\partial^q u}{\partial x^{q-m-n}\partial y^m \partial z^n}\right| \leqslant cA\rho^{\lambda_0 - q},$$

где $1 \leqslant q \leqslant 4$, $0 \leqslant m + n \leqslant q$, c — *постоянная, не зависящая от* ρ *и функции* u.

Теорема 1.6 следует непосредственно из (1.54) и леммы 1.2.

Замечание 1.1. Требование (1.54), фигурирующее в теоремах 1.4—1.6, при условиях задачи (1.37) заведомо выполнено для некоторого $\lambda_0 \in (0, 1]$, если точка (0, 0, 0) совпадает с вершиной многогранника M. Этот вопрос рассматривается подробнее в § 3 (см. оценку (3.7)).

Пусть $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $\mu \geqslant 0$, ν_j, $j = 1, 2, \ldots, 6$,— параметры, принимающие значения 0 или 1,

$$R^\mu = R(a, b, c, \mu) = \{(x, y, z) : -\mu\nu_1 < x < a + \mu\nu_2,\ -\mu\nu_3 < y < b + \mu\nu_4,\ -\mu\nu_5 < z < c + \mu\nu_6\}$$

— прямоугольный параллелепипед, γ^μ — его граница, $\gamma^\mu_1, \ldots, \gamma^\mu_6$ — замкнутые грани (т. е. включая ребра) параллелепипеда R^μ, расположенные соответственно в плоскостях $x = -\mu\nu_1$, $x = a + \mu\nu_2$, $y = -\mu\nu_3$, $y = b + \mu\nu_4$, $z = -\mu\nu_5$, $z = c + \mu\nu_6$.

Теорема 1.7. *Допустим, что при некотором* $\mu_0 > 0$ *и некоторых* ν_j, $j = 1, \ldots, 6$,

$$\gamma^{\mu_0}_0 = \bigcup_{j:\nu_j=0} \gamma^{\mu_0}_j \subset \Gamma,\ \bar{R}^{\mu_0} \setminus \gamma^{\mu_0}_0 \subset M.$$

Тогда решение u *задачи* (1.37) *удовлетворяет на* $R^0 = R(a, b, c, 0)$ *неравенству*

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right| \leqslant c_1\left(\max_{\bar{R}^{\mu_0}}|u| + \sum_{j:\nu_j=0}\|\eta\|_{C_{2,\lambda}(\gamma^{\mu_0}_j)}\right), \tag{1.66}$$

где η — *граничные значения* u, c_1 — *постоянная, не зависящая от* u.

Доказательство. Если $\nu_j = 1$, $j = 1, \ldots, 6$, то $\bar{R}^0 \subset R^{\mu_0}$ и неравенство (1.66) вытекает непосредственно из леммы 1.2. Если $\nu_j = 0$, $j = 1, \ldots, 6$, то R^0 совпадает с M и неравенство (1.66) является следствием теоремы 3.1 [1].

Пусть $0 < \sum_{j=1}^{6} \nu_j < 6$ и для определенности $\nu_5 = 1$. Пусть также $\gamma_{i5} = \gamma_5^{\mu_0} \cap \gamma_i^{\mu_0}$, $i = 1, 2, 3, 4$,— стороны грани $\gamma_5^{\mu_0}$. Зададим на грани $\gamma_5^{\mu_0}$ функцию η_5 следующим образом. Сначала определим η_5 на сторонах γ_{i5}, $i = 1, 2, 3, 4$, грани $\gamma_5^{\mu_0}$. Априори могут быть три случая: а) γ_{i5} целиком расположена на Γ (Γ — граница многогранника M), б) γ_{i5} не имеет общих точек с Γ, в) у γ_{i5} один или два конца лежат на Γ, а остальные точки γ_{i5} расположены внутри M. В случае а) η_5 совпадает на γ_{i5} с η (η — граничные значения u), в случае б) $\eta_5 = 0$ на γ_{i5}, в случае в) η_5 также непрерывна на γ_{i5}, причем на концах стороны γ_{i5}, расположенных на Γ, η_5 совпадает с η, на конце, лежащем в M, если такой имеется, $\eta_5 = 0$, а внутри γ_{i5} функция η_5 изменяется линейно.

При $-\mu_0\nu_1 < x < a + \mu_0\nu_2$, $-\mu_0\nu_3 < y < b + \mu_0\nu_4$

$$\begin{aligned}\eta_5(x, y) = {} & \eta_5(-\mu_0\nu_1, y)\frac{a+\mu_0\nu_2-x}{a+\mu_0(\nu_1+\nu_2)} + \eta_5(a+\mu_0\nu_2, y)\frac{x+\mu_0\nu_1}{a+\mu_0(\nu_1+\nu_2)} + \\ & + \Big(\eta_5(x, -\mu_0\nu_3) - \eta_5(-\mu_0\nu_1, -\mu_0\nu_3)\frac{a+\mu_0\nu_2-x}{a+\mu_0(\nu_1+\nu_2)} - \\ & - \eta_5(a+\mu_0\nu_2, -\mu_0\nu_3)\frac{x+\mu_0\nu_1}{a+\mu_0(\nu_1+\nu_2)}\Big)\frac{b+\mu_0\nu_4-y}{b+\mu_0(\nu_3+\nu_4)} + \\ & + \Big(\eta_5(x, b+\mu_0\nu_4) - \eta_5(-\mu_0\nu_1, b+\mu_0\nu_4)\frac{a+\mu_0\nu_2-x}{a+\mu_0(\nu_1+\nu_2)} - \\ & - \eta_5(a+\mu_0\nu_2, b+\mu_0\nu_4)\frac{x+\mu_0\nu_1}{a+\mu_0(\nu_1+\nu_2)}\Big)\frac{y+\mu_0\nu_3}{b+\mu_0(\nu_3+\nu_4)}.\end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что $\eta_5 \in C_{2,\lambda}(\gamma_5^{\mu_0})$, причем

$$\|\eta_5\|_{C_{2,\lambda}(\gamma_5^{\mu_0})} \leqslant c_2 \sum_{j:\nu_j=0} \|\eta\|_{C_{2,\lambda}(\gamma_j^{\mu_0})},$$

где c_2 не зависит от функции u.

Аналогично строятся функции η_i на $\gamma_i^{\mu_0}$, $i : \nu_i = 1$, удовлетворяющие неравенству

$$\|\eta_i\|_{C_{2,\lambda}(\gamma_i^{\mu_0})} \leqslant c_3 \sum_{j:\nu_j=0} \|\eta\|_{C_{2,\lambda}(\gamma_j^{\mu_0})}, \tag{1.67}$$

где c_3 не зависит от u. Наконец,

$$\eta_j = \eta \text{ на } \gamma_j^{\mu_0},\ j : \nu_j = 0. \tag{1.68}$$

Рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta v = 0 \text{ на } R^{\mu_0},\ v = \eta_k \text{ на } \gamma_k^{\mu_0},\ k = 1, \ldots, 6. \tag{1.69}$$

По построению граничные значения v непрерывны на γ^{μ_0} и в силу (1.67), (1.68) по теореме 3.1 [1] на $R^{\mu_0} \supset R^0$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right| \leqslant c_4 \sum_{j:\nu_j=0} \|\eta\|_{C_{2,\gamma}(\gamma_j^{\mu_0})}, \tag{1.70}$$

где c_4 не зависит от u. Пусть

$$\Delta w = 0 \text{ на } R^{\mu_0},\ w = \tilde{\eta} \text{ на } \gamma^{\mu_0}, \tag{1.71}$$

причем

$$\tilde{\eta} = 0 \text{ на } \gamma_j^{\mu_0}, \qquad j : \nu_j = 0, \tag{1.72}$$

$$\tilde{\eta} = u - v \text{ на } \gamma_i^{\mu_0}, \qquad i : \nu_i = 1. \tag{1.73}$$

Согласно (1.67)—(1.69), (1.71)—(1.73) и принципа максимума

$$\max_{\overline{R}^{\mu_0}} |w| \leqslant \Big(\max_{\overline{R}^{\mu_0}} |u| + (1 + c_3) \sum_{j:\nu_j=0} \|\eta\|_{C_{2,\lambda}(\gamma_j^{\mu_0})}\Big). \tag{1.74}$$

Очевидно, также

$$u = w + v \text{ на } R^{\mu_0} \supset R^0. \tag{1.75}$$

В силу (1.72) функцию w можно продолжить гармонически (нечетно) через грани $\gamma_j^{\mu_0}$, $j : \nu_j = 0$, и продолжения этих граней так, что замкнутая область $\overline{R}^0$ окажется строго внутри области гармоничности продолженной функции w. Отсюда, из (1.74) и леммы 1.2 вытекает на R^0 неравенство

$$\left|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right| \leqslant c_5 \Big(\max_{\overline{R}^{\mu_0}} |u| + \sum_{j:\nu_j=0} \|\eta\|_{C_{2,\lambda}(\gamma_j^{\mu_0})}\Big), \tag{1.76}$$

где c_5 не зависит от u. На основании (1.70), (1.75), (1.76) на R^0 справедливо (1.66). Теорема 1.7 доказана. Установим еще одну оценку для смешанных вторых производных решения задачи (1.37).

Лемма 1.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.4. *Тогда на шаровом секторе* $K^0 = K(\rho_0, \alpha, \theta_0, 0)$ *справедливо неравенство*

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z}\right| + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z}\right| \leqslant c_4 \rho^{\lambda_0 - 1} r^{-1} \Big(A + \sum_{j=0}^{1} \|\eta\|_{C_{2,\lambda}(\sigma_j^{\mu_0})}\Big), \tag{1.77}$$

где η — *граничные значения решения* u *задачи* (1.37), $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, c_4 — *постоянная, не зависящая от* ρ, r *и функции* u.

Доказательство. Неравенство (1.56) было установлено при доказательстве теоремы 1.4 на шаровом секторе $K^{\mu_0/2} \supset K^0$. Во всех точках шарового сектора K^0, для которых выполняется условие

$$\frac{\alpha\pi}{2} - |\varphi| \geqslant \min\{\mu_0, \alpha\pi, \mu_0/\rho_0\}/100, \tag{1.78}$$

неравенство (1.77) вытекает из неравенства (1.56) на $K^{\mu_0/2}$, где $p = 1$, и с учетом гармоничности $\partial u/\partial z$ на $K^{\mu_0/2}$ из леммы 1.2 при $\mu = 1$. В точках шарового сектора K^0, в которых условие (1.78) нарушено, т. е. эти точки расположены к одному из плоских кусков границы сектора K^0 значительно ближе, чем к ребру и вершине, неравенство (1.77) доказывается, как для производных $\partial v/\partial x$ и $\partial v/\partial y$ гармонической функции $v = \partial u/\partial z$, с учетом (1.56) на $K^{\mu_0/2}$ при $p = 1$ и с применением леммы 1.3 при $k = 1$ совершенно аналогично неравенству (1.14).

Лемма 1.5. *При условиях теоремы* 1.4 *выполняется неравенство*

$$\sup_{K^0} \Big(\rho^2 \left|\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right| + \theta^2 \left|\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right|\Big) < +\infty, \tag{1.79}$$

где u — *решение задачи* (1.37).

Доказательство. Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \sin\theta\cos\varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi \frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = -\rho\sin\theta\sin\varphi \frac{\partial}{\partial x} + \rho\sin\theta\cos\varphi \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \rho\cos\theta\cos\varphi \frac{\partial}{\partial x} + \rho\cos\theta\sin\varphi \frac{\partial}{\partial y} - \rho\sin\theta \frac{\partial}{\partial z},$$

и опираясь на оценки (1.55), (1.56), (1.77), легко приходим к неравенству (1.78).

§ 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим на прямоугольном параллелепипеде

$$R = \{(x, y, z) : 0 < x < a_1,\ 0 < y < a_2,\ 0 < z < a_3\}$$

задачу Дирихле

$$\Delta u = 0 \text{ на } R,\ u = \chi \text{ на } \gamma, \tag{2.1}$$

где χ — заданная функция на границе γ параллелепипеда R. Построим кубическую сетку плоскостями $x, y, z = 0, h, 2h, \ldots, h > 0$. Предположим, что a_i/h, $i = 1, 2, 3$,— целые. Пусть R_h (γ_h) — множество узлов сетки, расположенных на R (на γ). Аппроксимируем дифференциальную задачу (2.1) разностной:

$$\Delta_h u_h = 0 \text{ на } R_h,\ u_h = \chi \text{ на } \gamma_h, \tag{2.2}$$

где

$$\Delta_h u(x, y, z) \equiv (u(x+h, y, z) + u(x-h, y, z) + u(x, y+h, z) + u(x, y-h, z) + u(x, y, z+h) + u(x, y, z-h) - 6u(x, y, z))/h^2.$$

Лемма 2.1. *Если решение u задачи* (2.1) *непрерывно на $\bar{R}$, причем*

$$\sup_R \left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|\right) = B_0 < +\infty, \tag{2.3}$$

то

$$\max_{R_h} |u_h - u| \leqslant cB_0 h^2 \ln h^{-1}, \qquad 0 < h \leqslant 1/2,$$

где u_h — решение задачи (2.2), *c — постоянная, не зависящая от B_0 и h.*

Доказательство леммы 2.1 аналогично доказательству теоремы 5.1 [1].

Пусть $0 < r_* < r_0$, $0 < \alpha < 2$, $H > 0$,

$$T^* = \{(r, \varphi, z) : r_* < r < r_0,\ |\varphi| < \alpha\pi/2,\ 0 < z < H\},$$

γ^* — граница области T^*. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta u = 0 \text{ на } T^*,\ u = \chi \text{ на } \gamma^*, \tag{2.4}$$

где χ — заданная на γ^* функция.

Предположим, что $h > 0$, $\beta > 0$, причем $H/h \geqslant 2$, $\alpha\pi/\beta \geqslant 2$, $N_* = (\ln(r_0/r_*))/\beta \geqslant 2$ — целые, $h/2 < \beta r_0 \leqslant h$. Построим на $\bar{T}^*$ сетку в цилиндрической системе координат, образуемую пересечениями плоскостей семейства $z = z_k = kh$, $k = 0, 1, \ldots, H/h$, плоскостей семейства $\varphi = \varphi_m = -\alpha\pi/2 + m\beta$, $m = 0, 1, \ldots, \alpha\pi/\beta$, и цилиндрических поверхностей семейства $r = r_n = r_0 \exp\{-n\beta\}$, $n = 0, 1, \ldots, N_*$. Пусть T_h^* (γ_h^*) — множество узлов построенной сетки на T^* (на γ^*). Дифференциальной задаче (2.4) поставим в соответствие разностную задачу

$$\Delta_h u_h = 0 \text{ на } T_h^*,\ u_h = \chi \text{ на } \gamma_h^*, \tag{2.5}$$

где

$$\Delta_h u(r, \varphi, z) \equiv \frac{u(re^{-\beta}, \varphi, z) - 2u(r, \varphi, z) + u(re^{\beta}, \varphi, z)}{r^2\beta^2} + \frac{u(r, \varphi-\beta, z) - 2u(r, \varphi, z) + u(r, \varphi+\beta, z)}{r^2\beta^2} + \frac{u(r, \varphi, z-h) - 2u(r, \varphi, z) + u(r, \varphi, z+h)}{h^2}. \tag{2.6}$$

Лемма 2.2. *Если решение u задачи* (2.4) *непрерывно на* $\overline{T}^*$, *причем*

$$\sup_{T^*}\left(\left(r^2\left|\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}\right|+\left|\frac{\partial^4 u}{\partial\varphi^4}\right|\right)\left(\frac{\alpha\pi}{2}-|\varphi|\right)^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right|+\right.$$

$$\left.+\,r\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|+\sum_{p=2}^{4} r^p\left|\frac{\partial^p u}{\partial r^p}\right|\left(\frac{\alpha\pi}{2}-|\varphi|\right)^{p-2}\right)=B<+\infty, \qquad (2.7)$$

то

$$\max_{T_h^*}|u_h-u|\leqslant cBh^2\ln h^{-1}, \qquad 0<h\leqslant 1/2,$$

где u_h — решение задачи (2.5), *c — постоянная, не зависящая от B, h и r_*.*

Доказательство. С учетом того, что функция u непрерывна на $\overline{T}^*$ и удовлетворяет условию (2.7), а оператор Лапласа в цилиндрической системе координат имеет выражение $\Delta=\partial^2/\partial r^2+\partial/r\partial r+\partial^2/r^2\partial\varphi^2+\partial^2/\partial z^2$, из формулы Тейлора следует неравенство

$$|\Delta_h u|\leqslant c_1 B\frac{\beta^2}{r^2(\alpha\pi/2-|\varphi|)^2} \text{ на } T_h^*, \qquad (2.8)$$

где c_1 не зависит от B, β, h и r_* $(h/2<\beta r_0\leqslant h)$.

Рассмотрим на $\overline{T}_h^*=T_h^*\cup\gamma_h^*$ функцию

$$v_\nu(r,\varphi,z)=\begin{cases}\beta\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}-|\varphi|\right), & \dfrac{\alpha\pi}{2}-|\varphi|<\nu\beta,\\ \beta^2\nu, & \dfrac{\alpha\pi}{2}-|\varphi|\geqslant\nu\beta.\end{cases} \qquad (2.9)$$

Очевидно,

$$v_\nu\geqslant 0 \text{ на } \overline{T}_h^*, \qquad (2.10)$$

$$\Delta_h v_\nu\leqslant-\delta^\nu/r^2 \text{ на } T_h^*, \qquad (2.11)$$

где $\delta^\nu=0$ при $\alpha\pi/2-|\varphi|\neq\nu\beta$, $\delta^\nu=1$ при $\alpha\pi/2-|\varphi|=\nu\beta$.

Из (2.5), (2.8)—(2.11) по теореме сравнения (см. [26, гл. III, § 3]) имеем на $\overline{T}_h^*$

$$|u_h-u|\leqslant c_1 B\sum_{\nu=1}^{[\alpha\pi/2\beta]}\frac{v_\nu}{\nu^2},$$

т. е.

$$\max_{T_h^*}|u_h-u|\leqslant c_1B\beta^2\sum_{\nu=1}^{[\alpha\pi/2\beta]}\frac{1}{\nu}\leqslant ch^2\ln h^{-1}, \qquad 0<h\leqslant 1/2,$$

где c не зависит от B, h и r_*. Лемма 2.2 доказана.

Пусть $0<\rho_*<\rho_0$, $0<\alpha<2$, $0<\theta_*<\theta_0\leqslant\pi/2$,

$$K^*=\{(r,\varphi,\theta):\rho_*<\rho<\rho_0,\ |\varphi|<\alpha\pi/2,\ \theta_*<\theta<\theta_0\},$$

σ^* — граница области K^*. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta u=0 \text{ на } K^*,\ u=\chi \text{ на } \sigma^*, \qquad (2.12)$$

где χ — заданная на σ^* функция.

Предположим, что $\beta>0$, причем $\alpha\pi/\beta\geqslant 2$, $N_1=(\ln(\rho_0/\rho_*))/\beta\geqslant 2$, $N_2=(\ln(\theta_0/\theta_*))/\beta\geqslant 2$ целые. Построим на $\overline{K}^*$ сетку в сферической системе координат, образуемую пересечениями сфер семейства $\rho=\rho_k=\rho_0\exp\{-k\beta\}$, $k=0,1,\ldots,N_1$, плоскостей семейства $\varphi=\varphi_m=-\alpha\pi/2+m\beta$, $m=$

$=0, 1, \ldots, \alpha\pi/\beta$, и конических поверхностей[1] семейства $\theta = \theta_n = \theta_0 \exp\{-n\beta\}$, $n = 0, 1, \ldots, N_2$. Пусть K_h^* (σ_h^*) — множество узлов построенной сетки на K^* (на σ^*). Дифференциальную задачу (2.12) аппроксимируем разностной:

$$\Delta_h u_h = 0 \text{ на } K_h^*, \quad u_h = \chi \text{ на } \sigma_h^*, \tag{2.13}$$

где[1]

$$\Delta_h u(\rho, \varphi, \theta) \equiv \frac{\left(1 - \frac{\beta}{2}\right) u(\rho e^{-\beta}, \varphi, \theta) - 2u(\rho, \varphi, \theta) + \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) v(\rho e^{\beta}, \varphi, \theta)}{\rho^2\beta^2} +$$
$$+ \frac{(1-\varkappa) u(\rho, \varphi, \theta e^{-\beta}) - 2u(\rho, \varphi, \theta) + (1+\varkappa) u(\rho, \varphi, \theta e^{\beta})}{\rho^2\beta^2\theta^2} +$$
$$+ \frac{u(\rho, \varphi - \beta, \theta) - 2u(\rho, \varphi, \theta) + u(\rho, \varphi + \beta, \theta)}{\rho^2\beta^2 \sin^2\theta}, \tag{2.14}$$
$$\varkappa = \beta(\theta \operatorname{ctg}\theta - 1)/2.$$

Лемма 2.3. *Если решение u задачи* (2.13) *непрерывно на $\overline{K}^*$, причем*

$$\sup_{K^*}\left(\theta^2\left(\rho\left|\frac{\partial u}{\partial\rho}\right| + \sum_{p=2}^{4}\rho^p\left(\frac{\alpha\pi}{2} - |\varphi|\right)^{p-2}\left|\frac{\partial^p u}{\partial\rho^p}\right|\right) +\right.$$
$$+ \left|\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right| + \left(\frac{\alpha\pi}{2} - |\varphi|\right)^2\left|\frac{\partial^4 u}{\partial\varphi^4}\right| + \theta\left|\frac{\partial u}{\partial\theta}\right| +$$
$$\left. + \sum_{q=2}^{4}\theta^q\left(\frac{\alpha\pi}{2} - |\varphi|\right)^{q-2}\left|\frac{\partial^q u}{\partial\theta^q}\right|\right) = B^* < +\infty, \tag{2.15}$$

то

$$\max_{K_h^*}|u_h - u| \leqslant cB^*\beta^2 \ln\beta^{-1}, \quad 0 < \beta \leqslant 1/2,$$

где u_h — решение задачи (2.13), *c — постоянная, не зависящая от B^*, β, ρ_* и θ_*.*

Доказательство. С учетом того, что функция u непрерывна на $\overline{K}^*$ и удовлетворяет условию (2.15), а оператор Лапласа в сферической системе координат имеет выражение

$$\Delta = \partial^2/\partial\rho^2 + 2\partial/\rho\partial\rho + (\partial^2/\partial\theta^2 + \operatorname{ctg}\theta\partial/\partial\theta + \partial^2/\sin^2\theta\partial\varphi^2)/\rho^2,$$

из формулы Тейлора следует неравенство

$$|\Delta_h u| \leqslant c^* B^* \frac{\beta^2}{\theta^2\rho^2(\alpha\pi/2 - |\varphi|)^2} \quad \text{на } K_h^*,$$

где c^* не зависит от B^*, β, ρ_* и θ_*. Введя в рассмотрение функцию, аналогичную (2.9), зависящую только от φ, совершенно так же, как и в предыдущем случае, завершаем доказательство леммы 2.3.

Замечание 2.1. Существование и единственность решений разностных задач (2.2), (2.5) и (2.13) вытекает из принципа максимума (см. [26]).

Для обоснования разностного метода решения задачи (1.37), который рассматривается в § 3, кроме установленных выше лемм 2.1—2.3, потребуется еще несколько вспомогательных лемм.

[1] Хотя при построении сферической сетки основную роль играет параметр β — шаг по φ, но мы сохраним всюду, как и в случае цилиндрической сетки, у разностного оператора Δ_h, разностных функций, сеток и т. д. индекс h, так как ниже в § 3 параметр β зависит от универсального параметра h.

Пусть $\rho_0 > 0$, $0 < \alpha < 2$, $0 < \theta_* \leqslant \theta_0 \leqslant \pi/2$, $a_0 > 0$ — фиксированные числа, $\beta > 0$ — переменный параметр, причем $N_1 = \alpha\pi/\beta \geqslant 2$, $N_2 = (\ln(\theta_0/\theta_*))/\beta \geqslant 2$ целые,

$$N = \left[\max\left\{2, \frac{a_0}{\beta}\ln\beta^{-1}\right\}\right], \tag{2.16}$$

[ ] — знак целой части, $\rho_k = \rho_0 \exp\{-k\beta\}$, $\varphi_m = -\alpha\pi/2 + m\beta$, $\theta_n = \theta_0 \exp\{-n\beta\}$,

$$K_h = \{(\rho_k, \varphi_m, \theta_n) : 0 < k < N,\ 0 < m < N_1,\ 0 < n < N_2\},$$
$$\sigma_{1h} = \{(\rho_0, \varphi_m, \theta_n) : 0 < m < N_1,\ 0 < n < N_2\},$$
$$\sigma_{2h} = \{(\rho_N, \varphi_m, \theta_n) : 0 < m < N_1,\ 0 < n < N_2\},$$
$$\sigma_{3h} = \{(\rho_k, -\alpha\pi/2, \theta_n) : 0 < k < N,\ 0 < n < N_2\},$$
$$\sigma_{4h} = \{(\rho_k, \alpha\pi/2, \theta_n) : 0 < k < N,\ 0 < n < N_2\},$$
$$\sigma_{5h} = \{(\rho_k, \varphi_m, \theta_n) : 0 < k < N,\ 0 < m < N_1\},$$
$$\sigma_{6h} = \{(\rho_k, \varphi_m, \theta_*) : 0 < k < N,\ 0 < m < N_1\},$$
$$\sigma_h = \bigcup_{j=1}^{6} \sigma_{jh}, \qquad \overline{K}_h = K_h \cup \sigma_h.$$

Пусть также $\delta_i > 0$, $i = 0, 1, \ldots, 4$, $\delta_0 < \rho_0/2$, $\delta_1 + \delta_2 < \theta_0 - \theta_*$, $\delta_3 + \delta_4 < \alpha\pi$, ν_q^p, $p = 1, 2$, $q = 3, 4, 5, 6$ принимают значения 0 или 1, причем

$$\nu_q^2 \geqslant \nu_q^1,\ \nu_5^2 = \nu_6^2 = 1,\ \min_{3 \leqslant q \leqslant 6} \nu_q^1 = 0, \tag{2.17}$$

$$\sigma_{jh}^1 = \{(\rho, \varphi, \theta) \in \sigma_{jh} : \rho < \rho_0 - \delta_0,\ \theta_* + \delta_1 < \theta < \theta_0 - \delta_2\},$$
$$\sigma_{kh}^1 = \left\{(\rho, \varphi, \theta) \in \sigma_{kh} : \rho < \rho_0 - \delta_0,\ \delta_3 - \frac{\alpha\pi}{2} < \varphi < \frac{\alpha\pi}{2} - \delta_4\right\},$$
$$\sigma_{mh}^2 = \sigma_{mh} \setminus \sigma_{mh}^1,$$

$j = 3, 4$, $k = 5, 6$, $m = 3, 4, 5, 6$,

$$K_h^\delta = \left\{(\rho, \varphi, \theta) \in K_h : \rho < \rho_0 - \delta,\ \nu_3^2\delta - \frac{\alpha\pi}{2} < \varphi < \right.$$
$$\left. < \frac{\alpha\pi}{2} - \nu_4^2\delta, \theta_* + \delta < \theta < \theta_0 - \delta\right\}.$$

Рассмотрим разностную краевую задачу

$$\Delta_h w_h = 0 \text{ на } K_h,\ w_h = \chi_{jh} \text{ на } \sigma_{jh},\ j = 1, \ldots, 6, \tag{2.18}$$

где $\chi_{1h} = 1$ на σ_{1h}, $\chi_{2h} = 0$ на σ_{2h}, $\chi_{qh} = \nu_q^p$ на σ_{qh}^p, $q = 3, 4, 5, 6$, $p = 1, 2$, Δ_h имеет выражение (2.14).

Лемма 2.4. *Для любого положительного*

$$\delta < \min\{\delta_0, \rho_0(1 - e^{-\alpha\pi}), \theta_0 - \theta_*, \alpha\pi\}/2 \tag{2.19}$$

найдутся такие числа $\beta_0 > 0$ *и* μ_0, $0 < \mu_0 < 1$, *что при любом допустимом*[1] $\beta \leqslant \beta_0$ *выполняется неравенство*

$$\max_{K_h^\delta} w_h \leqslant \mu_0, \tag{2.20}$$

где w_h — *решение системы* (2.18).

[1] Т. е. когда введенные выше $N_1 \geqslant 2$, $N_2 \geqslant 2$ целые.

Доказательство. Пусть $\rho_* = \rho_0 \exp\{-\tau\alpha\pi\}$, τ — минимальное натуральное число, при котором $\rho_0 - \rho_* > 2\delta_0$,

$$K^* = \{(\rho, \varphi, \theta) : \rho_* < \rho < \rho_0,\ |\varphi| < \alpha\pi/2,\ \theta_* < \theta < \theta_0\},$$

σ^* — граница области K^*, $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_6^*$ — части границы σ^*, расположенные соответственно на координатных поверхностях $\rho = \rho_0$, $\rho = \rho_*$, $\varphi = -\alpha\pi/2$, $\varphi = \alpha\pi/2$, $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_*$.

Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta v = 0 \text{ на } K^*,\ v = \chi_j^* \text{ на } \sigma_j^*,\ j = 1, \ldots, 6, \tag{2.21}$$

где $\chi_1^* \equiv 1$, $\chi_2^* \equiv 1$;

$$\chi_i^*(\rho, \theta) = 1 - (1 - \nu_i^1)\,\psi_*(\rho)\,\psi_{i0}(\rho)\,\psi_{i1}(\theta)\,\psi_{i2}(\theta),$$
$$\chi_k^*(\rho, \varphi) = 1 - (1 - \nu_k^1)\,\psi_*(\rho)\,\psi_{k3}(\rho)\,\psi_{k4}(\varphi)\,\psi_{k5}(\varphi),$$
$$\psi_*(\rho) = \psi((\rho - \rho_*)/\delta^*),$$
$$\psi_{i0}(\rho) = \psi((\rho_0 - \nu_i^2\delta_0 - \rho)/\delta^*),$$
$$\psi_{i1}(\theta) = \psi((\theta - \theta_* - \nu_i^2\delta_1)/\delta^*),$$
$$\psi_{i2}(\theta) = \psi((\theta_0 - \nu_i^2\delta_2 - \theta)/\delta^*),$$
$$\psi_{k3}(\rho) = \psi((\rho_0 - \delta_0 - \rho)/\delta^*),$$
$$\psi_{k4}(\varphi) = \psi((\varphi + \alpha\pi/2 - \delta_3)/\delta^*),$$
$$\psi_{k5}(\varphi) = \psi((\alpha\pi/2 - \delta_4 - \varphi)/\delta^*),$$

где $i = 3, 4$, $k = 5, 6$, ψ — функция (1.16),

$$\delta^* = \min\{\delta,\ \alpha\pi - \delta_3 - \delta_4,\ \theta_0 - \theta_* - \delta_1 - \delta_2,\ \rho_0 - \rho_* - \delta_0\}/4.$$

При заданных функциях χ_j^*, $j = 1, \ldots, 6$, решение v задачи (2.21) бесконечно дифференцируемо на замкнутой области $\overline{K}^*$. Действительно, функция $\tilde{v} = 1 - v$ непрерывна на $\overline{K}^*$, гармонична на K^*, равна нулю на σ_1^* и σ_2^*, граничные значения функции $\tilde{v}$ на σ_q^*, $q = 3, 4, 5, 6$, бесконечно дифференцируемы, а их носители расположены строго внутри каждого из кусков σ_q^*. Поэтому функция $\tilde{v}$ может быть гармонически продолжена из K^* через σ_1^* и σ_2^* по известным формулам

$$\tilde{v}(\rho, \varphi, \theta) = -\frac{\rho_0}{\rho}\,\tilde{v}\left(\frac{\rho_0^2}{\rho}, \varphi, \theta\right), \qquad \rho_0 \leqslant \rho < \frac{\rho_0^2}{\rho_*},$$
$$\tilde{v}(\rho, \varphi, \theta) = -\frac{\rho_*}{\rho}\,\tilde{v}\left(\frac{\rho_*^2}{\rho}, \varphi, \theta\right), \qquad \frac{\rho_*^2}{\rho_0} < \rho \leqslant \rho_*,$$

а затем нечетно (с сохранением гармоничности) через плоскости $\varphi = \pm\alpha\pi/2$ вблизи линий пересечения этих плоскостей с коническими поверхностями $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_*$, что с учетом бесконечной дифференцируемости и финитности граничных значений функции $\tilde{v}$ на σ_q^*, $q = 3, 4, 5, 6$, гарантирует бесконечную дифференцируемость v на $\overline{K}^*$ (см. [21, 22]), а следовательно, и функции v.

Предположим, что $\rho_0 \exp\{-N\beta\} \leqslant \rho_*$, где N имеет выражение (2.16), и рассмотрим вспомогательную разностную задачу

$$\Delta_h v_h = 0 \text{ на } K_h^*,\ v_h = \chi_j^* \text{ на } \sigma_{jh}^*,\ j = 1, \ldots, 6, \tag{2.22}$$

где $K_h^* = K^* \cap K_h$, $\sigma_{jh}^* = \sigma_j^* \cap \overline{K}_h$. Обозначим

$$K^{*\delta} = \{(\rho,\varphi,\theta) : \rho_* + \delta < \rho < \rho_0 - \delta,\ \ \nu_3^2\delta - \alpha\pi/2 < \varphi < \alpha\pi/2 - \nu_4^2\delta,$$
$$\theta_* + \delta < \theta < \theta_0 - \delta\},$$

$$K_h^{*\delta} = K^{*\delta} \cap K_h, \qquad \sigma_h^* = \bigcup_{j=1}^{6} \sigma_{jh}^*, \qquad \overline{K}_h^* = \overline{K}_h \cap \overline{K}^*.$$

В силу (2.17), (2.19), (2.21)

$$\sup_{K^{*\delta}} v = \mu_0' < 1, \tag{2.23}$$

где v — решение задачи (2.21). Так как это решение бесконечно дифференцируемо на $\overline{K}^*$, то из (2.19), (2.23) и леммы 2.3 следует существование такого $\beta_0 > 0$, что при любом допустимом $\beta \leqslant \beta_0$ имеем $K_h^{*\delta} \neq \phi$, причем

$$\max_{K_h^{*\delta}} v_h \leqslant \mu_0 = \frac{1+\mu_0'}{2} < 1. \tag{2.24}$$

Пусть ν — целочисленный параметр, $0 \leqslant \nu \leqslant \overline{N} = N - [N^*/2]$, где N имеет выражение (2.16), $N^* = (\ln(\rho_0/\rho_*))/\beta = \tau\alpha\pi/\beta$, [ ] — знак целой части, причем $N \geqslant N^*$,

$$\begin{gathered}
\overline{K}_h^\nu = \{(\rho, \varphi, \theta) \in \overline{K}_h\colon (\rho e^{\nu\beta}, \varphi, \theta) \in \overline{K}_h^*\}, \\
K_h^{\nu\delta} = \{(\rho, \varphi, \theta) \in K_h\colon (\rho e^{\nu\beta}, \varphi, \theta) \in K_h^{*\delta}\}, \\
\sigma_h^\nu = \{(\rho, \varphi, \theta) \in \overline{K}_h^\nu : (\rho e^{\nu\beta}, \varphi, \theta) \in \sigma_h^*\} \cup (\overline{K}_h^\nu \cap \sigma_{2h}), \\
v_h^\nu(\rho, \varphi, \theta) = v_h(\rho e^{\nu\beta}, \varphi, \theta) \text{ на } \overline{K}_h^\nu.
\end{gathered} \tag{2.25}$$

чевидно, при $\beta \leqslant \beta_0$, где β_0 указано при доказательстве неравенства (2.24),

$$K_h^\delta \subset \bigcup_{\nu=0}^{\overline{N}} K_h^{\nu\delta}. \tag{2.26}$$

Кроме того, по построению

$$w_h \leqslant v_h^\nu \text{ на } \sigma_h^\nu, \qquad 0 \leqslant \nu \leqslant \overline{N}. \tag{2.27}$$

В частности, например, при $\nu < N - N^*$ на $\sigma_h^\nu \cap K_h$ согласно (2.21), (2.22), (2.25) $v_h^\nu = 1$, а в силу (2.18) $w_h \leqslant 1$, и при $\nu \geqslant N - N^*$ на $\sigma_{2h} \subset \sigma_h^\nu$ согласно (2.18) $w_h = \chi_{2h} = 0$, а в силу (2.21), (2.22), (2.25) $v_h^\nu \geqslant 0$.

Из (2.27) по принципу максимума получаем

$$w_h \leqslant v_h^\nu \text{ на } \overline{K}_h^\nu, \qquad 0 \leqslant \nu \leqslant \overline{N}.$$

Отсюда и из (2.24), (2.25) имеем при $\beta \leqslant \beta_0$

$$\max_{K_h^{\nu\delta}} w_h \leqslant \max_{K_h^{\nu\delta}} v_h^\nu \leqslant \max_{K_h^{*\delta}} v_h \leqslant \mu_0 < 1,$$

где $0 \leqslant \nu \leqslant \overline{N}$, что с учетом (2.26) приводит к утверждению леммы 2.4, в частности, к неравенству (2.20).

З а м е ч а н и е 2.2. Лемма 2.4 устанавливает для разностного решения задачи (2.18) при достаточно малом β аналог известного свойства гармонической функции, состоящего в том, что если граничные значения гармонической функции на некоторой части границы равны нулю, а на остальной части границы равны единице, то на любой подобласти, расположенной на положительном расстоянии от участка границы, где граничные значения равны единице, гармоническая функция ограничена сверху постоянной,

которая строго меньше единицы и, вообще говоря, зависит от выбора подобласти (β_0 тоже зависит от подобласти). Следующие леммы 2.5—2.7 устанавливают аналогичное свойство разностного решения еще для трех стандартных задач.

Рассмотрим разностную краевую задачу (2.18) при следующих дополнительных условиях:

$$N_2 = \left[\max\left\{2,\ \frac{b_0}{\beta}\ln\beta^{-1}\right\}\right], \tag{2.28}$$

где $b_0 > 0$ фиксировано, $N_2 + 1$ — число слоев сетки по θ, т. е. $\theta_* = \theta_0 \exp\{-N_2\beta\}$,

$$\begin{aligned} &\chi_{jh} = 1 \text{ на } \sigma_{jh}, \quad j = 1,\ 5, \\ &\chi_{kh} = 0 \text{ на } \sigma_{kh}, \quad k = 2,\ 3,\ 4,\ 6. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Пусть $\tilde{K}_h^\delta = \{(\rho, \varphi, \theta) \in K_h\colon \rho < \rho_0 - \delta,\ \theta < \theta_0 - \delta\}$.

Лемма 2.5. *Для любого положительного* $\delta < \min\{\rho_0, \theta_0\}/2$ *при дополнительных условиях* (2.28), (2.29) *найдутся такие числа* $\beta_0 > 0$ *и* μ_0, $0 < \mu_0 < 1$, *что при любом допустимом* $\beta \leqslant \beta_0$ *выполняется неравенство*

$$\max_{\tilde{K}_h^\delta} w_h \leqslant \mu_0,$$

где w_h — *решение системы* (2.18).

Вернемся теперь к задаче (2.5) на цилиндрической сетке, сделав дополнительное предположение о том, что

$$N_* = \left[\max\left\{2, \frac{c_0}{\beta}\ln\beta^{-1}\right\}\right], \tag{2.30}$$

где $c_0 > 0$ фиксировано, $N_* + 1$ — число слоев сетки по r, т. е. $r_* = r_0 \exp\{-N_*\beta\}$. Пусть

$$\begin{aligned} &\gamma_{0h}^* = \{(r,\varphi,z) \in \gamma_h^*\colon\ |\varphi| = \alpha\pi/2\} \cup \{(r,\varphi,z) \in \gamma_h^*\colon\ r = r_*\}, \\ &\gamma_{1h}^* = \gamma_h^* \setminus \gamma_{0h}^*, \\ &T_h^{*\delta} = \{(r,\varphi,z) \in T_h^*\colon\ r < r_0 - \delta,\quad \delta < z < H - \delta\}, \\ &\chi = 0 \text{ на } \gamma_{0h}^*, \quad \chi = 1 \text{ на } \gamma_{1h}^*. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Лемма 2.6. *Для любого положительного* $\delta < \min\{r_0, H\}/2$ *при условиях* (2.30), (2.31) *найдутся такие числа* $h_0 > 0$ *и* μ_0, $0 < \mu_0 < 1$, *что при любых допустимых* $h \leqslant h_0$ *и* β *выполняется неравенство*

$$\max_{T_h^{*\delta}} u_h \leqslant \mu_0,$$

где u_h — *решение задачи* (2.5).

Наконец, еще раз рассмотрим разностную задачу (2.2) на кубической сетке. Пусть $\tilde{\gamma}_j$, $j = 1, \ldots, 6$,— грани параллелепипеда R, введенного в начале § 2, без границы (без ребер), пронумерованные в произвольном порядке, $\tilde{\gamma}_{jh} = \tilde{\gamma}_j \cap \gamma_h$. Пусть также γ_j^1 — некоторые замкнутые прямоугольники с произвольной ориентацией, расположенные соответственно внутри граней $\tilde{\gamma}_j$, $\gamma_{jh}^1 = \gamma_j^1 \cap \tilde{\gamma}_{jh}$, $\gamma_{jh}^2 = \tilde{\gamma}_{jh} \setminus \gamma_{jh}^1$, $j = 1, \ldots, 6$, ν_q^p принимают значения 0 или 1, $p = 1, 2$, $q = 1, 2, \ldots, 6$, $\nu_q^2 \geqslant \nu_q^1$,

$$\min_{1 \leqslant q \leqslant 6} \nu_q^1 = 0, \tag{2.32}$$

$$\chi = \nu_q^p \text{ на } \gamma_{qh}^p, \quad p = 1,\ 2, \quad q = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6, \tag{2.33}$$

$\gamma^* = \bigcup\limits_{j:\nu_j^2=1} \tilde{\gamma}_j$, $\Omega \subset R$ — некоторая подобласть, расположенная на положительном расстоянии от γ^*, $\overline{\Omega}_h = R_h \cap \overline{\Omega}$.

Лемма 2.7. *При условиях* (2.32), (2.33) *существуют такие числа* $h_0 > 0$ *и* μ_0, $0 < \mu_0 < 1$, *что при любом допустимом* $h \leqslant h_0$ *решение задачи* (2.2) *удовлетворяет неравенству*

$$\max_{\overline{\Omega}_h} u_h \leqslant \mu_0.$$

Доказательства лемм 2.5, 2.6, проводящиеся по той же схеме, что и доказательство леммы 2.4, с дополнительным привлечением теорем 1.4, 1.3 и лемм 2.3, 2.2, достаточно громоздкие, которые для краткости опустим. Доказательство леммы 2.7, опирающееся на теорему 3.1 [1] и лемму 2.1, аналогично доказательствам теоремы 1.2 [5] и леммы 2.4.

§ 3. МЕТОД СОСТАВНЫХ СЕТОК НА МНОГОГРАННИКЕ

Пусть M — открытый многогранник с границей Γ, удовлетворяющий сформулированным выше требованиям в связи с задачей (1.37), P_k, $k = 1, 2, \ldots, \tilde{N}_1$,— его вершины, L_m, $m = 1, 2, \ldots, \tilde{N}_2$, — его ребра, пронумерованные в произвольном порядке. Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех вершин многогранника M, за исключением тех, которые являются вершинами выпуклых трехгранных прямых углов. Через $\mathcal{L}$ обозначим множество всех ребер многогранника M, не являющихся ребрами выпуклых двугранных прямых углов.

Зададим конечное покрытие многогранника M шаровыми секторами, цилиндрическими секторами и прямоугольными параллелепипедами следующим образом.

В окрестности каждой вершины $P_k \in \mathcal{P}$ строим шаровой сектор $S_k = S(P_k, \rho_{0k})$ — односвязное открытое множество точек, удаленных от вершины P_k на расстояние, меньшее, чем $\rho_{0k} > 0$, в предположении, что боковая поверхность шарового сектора $S(P_k, \rho_{0k} + \delta_0)$, где $\delta_0 > 0$ — некоторое число, и соответственно сектора S_k является конической поверхностью, целиком расположенной на Γ, причем $S_k \subset S(P_k, \rho_{0k} + \delta_0) \subset M$.

Вблизи каждого ребра $L_m \in \mathcal{L}$ строим цилиндрический сектор $T_m = T(r_{0m}, H_m)$ — односвязное открытое множество точек многогранника M, удаленных от L_m на расстояние, меньшее, чем $r_{m0} > 0$, ограниченное некоторыми двумя плоскостями, ортогональными ребру L_m, расстояние между которыми равно H_m, и двумя гранями многогранника M, пересекающимися по ребру L_m. Граница цилиндрического сектора T_m имеет общие точки только с двумя гранями многогранника M и удалена от всех вершин многогранника на положительное расстояние. Предполагается, что построенный по этому же правилу некоторый цилиндрический сектор T'_m при замене r_{0m} и H_m соответственно на $r_{0m} + \delta_0$ и $H_m + \delta_0$, где $\delta_0 > 0$, содержит в себе $\overline{T}_m \cap M$.

Построим, кроме того, конечное множество $\mathcal{R}$ открытых прямоугольных параллелепипедов R_n, $n = 1, 2, \ldots, \tilde{N}$, обладающих тремя свойствами:

а) $R_n \subset M$, ориентация прямоугольного параллелепипеда R_n, вообще говоря, произвольная, соотношение его сторон (длин ребер) рациональное;

б) множество внутренних точек каждой грани параллелепипеда (т. е. без ее границы) либо целиком лежит на некоторой грани многогранника M, либо целиком расположено в M;

в) существует открытый прямоугольный параллелепипед $R_n' \subset M$, обладающий свойством б) и содержащий в себе $\bar{R}_n \cap M$, причем грани у R_n' ориентированы так же, как у R_n.

Потребуем выполнения следующих двух глобальных условий.

1. $(\bigcup_{k:P_k \in \mathscr{P}} S_k) \cup (\bigcup_{m:L_m \in \mathscr{L}} T_m) \cup (\bigcup_{n=1}^{\tilde{N}} R_n) = M.$

2. Пусть γ_k — граница сферического сектора S_k, ϑ_m — граница цилиндрического сектора T_m, σ_n — граница прямоугольного параллелепипеда R_n. Существует такая постоянная $\varkappa_0 > 0$, что всякая точка

$$P \in M \cap ((\bigcup_{k:P_k \in \mathscr{P}} \gamma_k) \cup (\bigcup_{m:L_m \in \mathscr{L}} \vartheta_m) \cup (\bigcup_{n=1}^{\tilde{N}} \sigma_n)$$

попадает внутрь, по крайней мере, одной из фигур S_{k_p}, k_p: $P_{k_p} \in \mathscr{P}$, или T_{m_p}, m_p: $L_{m_p} \in \mathscr{L}$, или R_{n_p}, $1 \leqslant n_p \leqslant \tilde{N}$, зависящей от P, причем расстояние от P соответственно до $M \cap \gamma_{k_p}$ или до $M \cap \vartheta_{m_p}$ или до $M \cap \sigma_{n_p}$ не меньше, чем $\varkappa_0$.

В дальнейшем будем предполагать, что сделанные предположения выполнены, *величину* $\varkappa_0$ *будем называть глубиной склейки фигур* S_k $(k : P_k \in \mathscr{P})$, T_m $(m : L_m \in \mathscr{L})$ и R_n $(1 \leqslant n \leqslant \tilde{N})$, образующих конечное покрытие многогранника M. На практике желательно выбирать такое покрытие многогранника M, при котором глубина склейки $\varkappa_0$ не мала.

Введем параметр $h > 0$. Зададим на каждом замкнутом прямоугольном параллелепипеде $\bar{R}_n$, $n = 1, 2, \ldots, \tilde{N}$, кубическую сетку с максимально возможным шагом

$$h_n \leqslant \min \{h, \ \min \{a_{1n}, \ a_{2n}, \ a_{3n}\}/2\},$$

где a_{in} — стороны параллелепипеда R_n, причем так, чтобы граница σ_n параллелепипеда R_n целиком лежала на плоскостях, образующих кубическую сетку. Пусть $\bar{R}_n^h$, R_n^h, σ_{0n}^h и σ_{1n}^h — множества узлов сетки, расположенных соответственно на $R_n \cup \sigma_n$, R_n, $M \cap \sigma_n$ и $\Gamma \cap \sigma_n$.

Построим на каждом замкнутом секторе $\bar{T}_m$, $m : L_m \in \mathscr{L}$ цилиндрическую сетку, образованную семейством плоскостей, ортогональных ребру L_m, с максимальным постоянным шагом $h_m' \leqslant \min \{h, H_m/2\}$ (в крайних двух плоскостях этого семейства расположены основания цилиндрического сектора T_m), семейством плоскостей, проходящих через ребро L_m с постоянным угловым шагом $\beta_m \leqslant \min \{h_m'/r_{0m}, \ \alpha_m\pi/2\}$, где $\alpha_m\pi$ — величина внутреннего двугранного угла с ребром L_m (в крайних двух плоскостях этого семейства расположены грани рассматриваемого двугранного угла), и семейства цилиндрических поверхностей радиусов

$$r = r_{im} = r_{0m} \exp \{-i\beta_m\}, \qquad i = 0, 1, \ldots, N_m,$$

где

$$N_m = [\max \{2, \ 2\beta_m^{-1}\lambda_{1m}^{-1} \ln h^{-1}\}], \tag{3.1}$$

$$\lambda_{1m} = \min \{1, \ 1/\alpha_m - \varepsilon\}, \tag{3.2}$$

$\varepsilon \in (0, \ 1/\alpha_m)$ фиксировано. Пусть T_m^h (соответственно ϑ_{0m}^h) — множество

узлов построенной цилиндрической сетки, расположенных в T_m (соответственно на $M \cap \vartheta_m$) на расстоянии, превышающем $r_{N_m m}$, от ребра L_m; ϑ_{1m}^h — множество узлов сетки на $\Gamma \cap \vartheta_m$; ϑ_{2m}^h — множество узлов в T_m, удаленных от ребра L_m на расстояние $r_{N_m m}$, $\bar{T}_m^h = T_m^h \cup \vartheta_{0m}^h \cup \vartheta_{1m}^h \cup \vartheta_{2m}^h$.

Вопрос о построении сетки на замкнутом шаровом секторе $\bar{S}_k$, $k : P_k \in \mathcal{P}$, требует более детального рассмотрения. Обозначим через Ω_k — многоугольную область на единичной сфере с центром в точке P_k, вырезаемую минимальным многогранным углом, содержащим шаровой сектор S_k. Сторонами многоугольника Ω_k являются дуги больших кругов рассматриваемой единичной сферы. Осуществим конечное покрытие сферического многоугольника Ω_k треугольниками и четырехугольниками следующим образом. Пусть O_k^i, $i = 1, 2, \ldots, i_k$,— вершины многоугольника Ω_k, τ_k^i — его стороны, соединяющие вершины O_k^i и O_k^{i+1} $(O_k^{i_k+1} = O_k^1)$.

Зададим в Ω_k треугольники ω_k^i, $i = 1, 2, \ldots, i_k$, две стороны которых целиком лежат на τ_k^{i-1} и τ_k^i, а третья сторона является дугой некоторой окружности, ортогональной сторонам τ_k^{i-1} и τ_k^i, вырезаемой на единичной сфере конической поверхностью с углом раствора при вершине в точке P_k, равного $2\theta_{0k}^i$, $0 < \theta_{0k}^i \leqslant \pi/2$, и осью вращения, проходящей через точки P_k и O_k^i. Предполагается, что аналогичный треугольник, третья сторона которого образуется дугой окружности, вырезаемой конической поверхностью с углом раствора при вершине, равного $2\theta_{0k}^i + \delta_0$, где $\delta_0 > 0$ — некоторое число, принадлежит целиком Ω_k, $k : P_k \in \mathcal{P}$, $i = 1, 2, \ldots, i_k$.

Кроме построенных треугольников разместим в сферическом многоугольнике Ω_k конечное число t_k четырехугольников ψ_k^t, $t = 1, 2, \ldots, t_k$. У ψ_k^t, $k : P_k \in \mathcal{P}$, $t = 1, 2, \ldots, t_k$, имеются две противоположные стороны, являющиеся дугами двух больших кругов, лежащих в плоскостях Q_k^{1t} и Q_k^{2t}, проходящих через точку P_k. Ориентация плоскостей Q_k^{1t} и Q_k^{2t}, вообще говоря, произвольная. Две другие стороны четырехугольника ψ_k^t являются дугами двух окружностей, вырезаемых на единичной сфере двумя коническими поверхностями с вершинами, расположенными в точке P_k, общей осью вращения, являющейся линией пересечения плоскостей Q_k^{1t} и Q_k^{2t}, и углами раствора $2\tilde{\theta}_{0k}^t$ и $2\theta_{*k}^t$ при вершинах, $0 < \theta_{*k}^t < \tilde{\theta}_{0k}^t \leqslant \pi/2$. При этом

$$\frac{1}{\tilde{\alpha}_k^t \pi} \ln \frac{\tilde{\theta}_{0k}^t}{\theta_{*k}^t} \text{ рационально,} \tag{3.3}$$

где $\tilde{\alpha}_k^t \pi > 0$ — величина угла между плоскостями Q_k^{1t} и Q_k^{2t}, в котором расположен четырехугольник ψ_k^t, $k : P_k \in \mathcal{P}$, $t = 1, 2, \ldots, t_k$.

Каждая из двух противоположных сторон четырехугольника ψ_k^t, образуемых дугами больших кругов, либо целиком расположена строго внутри некоторой стороны многоугольника Ω_k, либо совсем не имеет общих точек с границей многоугольника Ω_k. Две другие стороны четырехугольника ψ_k^t могут пересекаться с границей многоугольника Ω_k только концами, $k : P_k \in \mathcal{P}$, $t = 1, 2, \ldots, t_k$.

Пусть γ_k^i — граница треугольника ω_k^i, ξ_k^t — граница четырехугольника ψ_k^t.

Предполагается выполнение следующих двух условий для покрытия сферического многоугольника Ω_k $(k : P_k \in \mathcal{P})$:

1. $(\bigcup_{i=1}^{i_k} \omega_k^i) \cup (\bigcup_{t=1}^{t_k} \psi_k^t) = \Omega_k$.

2. Существует такая постоянная $\varkappa_{0k} > 0$, называемая глубиной склейки фигур ω_k^i, $i = 1, 2, \ldots, i_k$, ψ_k^t, $t = 1, 2, \ldots, t_k$, что всякая точка

$$P \in \Omega_k \cap ((\bigcup_{i=1}^{i_k} \gamma_k^i) \cup (\bigcup_{t=1}^{t_k} \xi_k^t))$$

попадает внутрь, по крайней мере, одной из фигур $\omega_k^{i_p}$, $1 \leqslant i_p \leqslant i_k$, или $\psi_k^{t_p}$, $1 \leqslant t_p \leqslant t_k$, зависящей от P, причем расстояние от P по дуге большого круга соответственно до $\Omega_k \cap \gamma_k^{i_p}$ или до $\Omega_k \cap \xi_k^{t_p}$ не меньше, чем $\varkappa_{0k}$.

Заданное конечное покрытие многоугольника Ω_k на единичной сфере индуцирует соответствующее конечное покрытие шарового сектора S_k, расположенного в многогранном угле многоугольника M при вершине P_k, «трехгранными» и «четырехгранными» шаровыми секторами $\overset{*}{\omega}{}_k^i$, $t = 1, 2, \ldots, i_k$, и $\overset{*}{\psi}{}_k^t$, $t = 1, 2, \ldots, t_k$, радиуса ρ_{0k} с общим центром (вершиной) P_k, проектирующимися из точки P_k соответственно на треугольники ω_k^i и четырехугольники ψ_k^t.

Пусть $2(\pi - \theta_{0k})$ — максимальный угол раствора при вершине некоторого кругового конуса (или шарового сектора) конечной высоты, вершиной которого можно коснуться точки $P_k \in \mathcal{P}$ так, чтобы этот конус не имел общих внутренних точек с многогранником M, $\lambda(\theta_{0k})$ — минимальное положительное значение λ, при котором

$$P_\lambda(\cos\theta_{0k}) = 0,$$

где $P_\lambda(\cos\theta)$ — сферическая функция первого рода, вообще говоря, дробной степени λ,

$$\lambda_{0k} = \min\{1, \lambda(\theta_{0k}) - \varepsilon\} > 0, \tag{3.4}$$

$\varepsilon \in (0, \lambda(\theta_{0k}))$ фиксировано [1]. Тогда (см. [27])

$$\min_{0 \leqslant \theta \leqslant \theta_{0k}} P_{\lambda_{0k}}(\cos\theta) = m_\varepsilon > 0. \tag{3.5}$$

Поскольку шаровой сектор $S(P_k, \rho_{0k} + \delta_0)$ можно поместить внутри некоторого кругового конуса раствора $2\theta_{0k}$ при вершине, совпадающей с точкой P_k, то в силу непрерывности на Γ граничных значений решения u задачи (1.37) и непрерывной дифференцируемости граничных значений на каждой замкнутой грани и в силу (3.5) вытекает существование такой постоянной a_k, вообще говоря, зависящей от ε, что на границе сектора $S(P_k, \rho_{0k} + \delta_0)$ выполняется неравенство

$$|u - u_{0k}| \leqslant a_k \rho^{\lambda_{0k}} P_{\lambda_{0k}}(\cos\theta), \tag{3.6}$$

где u_{0k} значение u в точке P_k, ρ — расстояние от точки P_k ($\rho = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2}$, x_k, y_k, z_k — координаты точки P_k), θ — угол между лучом, выходящим из точки P_k в направлении текущей точки, и осью указанного выше конуса, в который погружен сектор $S(P_k, \rho_{0k} + \delta_0)$. Поскольку функция, стоящая справа в (3.6) (см. [27]), а также функция $u - u_{0k}$, непрерывна на $\bar{S}(P_k, \rho_{0k} + \delta_0)$ и гармонична на

[1] Положительную оценку снизу величины $\lambda(\theta_{0k})$ можно получить исходя из интегрального представления сферической функции $P_\lambda(\cos\theta)$ (см. [27, гл. V, § 27] и [9]).

$S(P_k, \rho_{0k} + \delta_0)$, то на основании (3.6) и принципа максимума

$$|u - u_{0k}| \leqslant A_k \rho^{\lambda_{0k}} \quad \text{на } \bar{S}(P_k, \rho_{0k} + \delta_0), \tag{3.7}$$

где u — решение задачи (1.37), $u_{0k} = u(P_k)$, λ_{0k} — величина (3.4) $A_k = a_k \max\limits_{0 \leqslant \theta \leqslant \theta_{0k}} P_{\lambda_{0k}}(\cos\theta)$ — постоянная, не зависящая от ρ.

Построим на замыкании каждого из шаровых секторов $\overset{*}{\omega}{}_k^i$, $i = 1, 2, \ldots, i_k$, и $\overset{*}{\psi}{}_k^t$, $t = 1, 2, \ldots, t_k$, сферическую сетку, аналогичную сетке, построенной в задаче (2.13). При этом конкретная сферическая система координат, в которой строится каждая сетка, определяется однозначно из условия того, что каждый из рассматриваемых секторов ограничен координатными поверхностями.

В шаровом секторе $\overset{*}{\omega}{}_k^i$ разбиваем двугранный угол, который в $\overset{*}{\omega}{}_k^i$ единственный, плоскостями с постоянным максимально возможным угловым шагом

$$\beta_k^i \leqslant \min\{\alpha_k^i \pi/2, \quad h/\rho_{0k} \sin\theta_{0k}^i\}, \tag{3.8}$$

где $\alpha_k^i \pi$ — величина двугранного угла многогранника M, в котором непосредственно расположен шаровой сектор $\overset{*}{\omega}{}_k^i$. Разбиение по ρ осуществляем семейством сфер с центрами в P_k радиусов

$$\rho_{mk} = \rho_{0k} \exp\{-m\beta_k^i\}, \quad m = 0, 1, \ldots, N_k^i, \tag{3.9}$$

где

$$N_k^i = \left[\max\left\{2, \ \frac{2}{\beta_k^i \lambda_{0k}} \ln\frac{1}{h}\right\}\right], \tag{3.10}$$

[ ] — знак целой части, λ_{0k} — величина (3.4).

Наконец, разбиение по θ производим коническими поверхностями

$$\theta = \theta_{nk}^i = \theta_{0k}^i \exp\{-n\beta_k^i\}, \quad n = 0, 1, \ldots, n_k^i, \tag{3.11}$$

где

$$n_k^i = \left[\max\left\{2, \ \frac{2}{\beta_k^i \lambda_{1k}^i} \ln\frac{1}{h}\right\}\right], \tag{3.12}$$

$$\lambda_{1k}^i = \min\{1, \ 1/\alpha_k^i - \varepsilon\}, \tag{3.13}$$

$\varepsilon \in (0, 1/\alpha_k^i)$ фиксировано.

Пусть $\overset{*}{\gamma}{}_k^i$ — граница шарового сектора $\overset{*}{\omega}{}_k^i$, $\bar{\omega}_k^{hi}$ — множество всех узлов сетки, построенной на $\overset{*}{\omega}{}_k^i \cup \overset{*}{\gamma}{}_k^i$. Разобьем $\bar{\omega}_k^{hi}$ на следующие подмножества: $\gamma_{1k}^{hi} = \Gamma \cap \bar{\omega}_k^{hi}$; γ_{2k}^{hi} — множество узлов, расположенных в $\overset{*}{\omega}{}_k^i$ на сфере минимального радиуса $\rho = \rho_{0k} \exp\{-N_k^i \beta_k^i\}$; γ_{3k}^{hi} — множество узлов, лежащих в $\overset{*}{\omega}{}_k^i$ на внутренней конической поверхности $\theta = \theta_{0k}^i \exp\{-n_k^i \beta_k^i\}$, но не принадлежащих γ_{2k}^{hi}; $\gamma_{0k}^{hi} = \bar{\omega}_k^{hi} \cap \overset{*}{\gamma}{}_k^i \cap M \setminus \gamma_{2k}^{hi}$; $\omega_k^{hi} = \bar{\omega}_k^{hi} \cap \overset{*}{\omega}{}_k^i \setminus (\gamma_{2k}^{hi} \cup \gamma_{3k}^{hi})$.

Для построения сетки на замыкании шарового сектора $\overset{*}{\psi}{}_k^t$ разбиваем двугранный угол, образованный плоскостями Q_k^{1t} и Q_k^{2t}, величины $\tilde{\alpha}_k^t \pi$ семейством плоскостей с максимально возможным постоянным угловым шагом

$$\tilde{\beta}_k^t \leqslant \min\{\tilde{\alpha}_k^t \pi/2, \quad h/\rho_{0k} \sin\tilde{\theta}_{0k}^t\}, \tag{3.14}$$

при котором величина

$$\tilde{n}_k^t = (\ln(\tilde{\theta}_{0k}^t/\theta_{*k}^t))/\tilde{\beta}_k^t \geqslant 2 \tag{3.15}$$

является целой. В силу требования (3.3) выбор указанного $\tilde{\beta}_k^t$ возможен

Разбиение по ρ осуществляем семейством сфер с центрами в P_k радиусов

$$\rho = \tilde{\rho}_{mk} = \rho_{0k}\exp\{-m\tilde{\beta}_k^t\}, \quad m = 0, 1, \ldots, \tilde{N}_k^t, \tag{3.16}$$

где

$$\tilde{N}_k^t = \left[\max\left\{2, \frac{2}{\tilde{\beta}_k^t\lambda_{0k}}\ln\frac{1}{h}\right\}\right], \tag{3.17}$$

λ_{0k} — величина (3.4).

Разбиение по θ производим коническими поверхностями

$$\theta = \tilde{\theta}_{nk}^t = \tilde{\theta}_{0k}^t\exp\{-n\tilde{\beta}_k^t\}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tilde{n}_k^t, \tag{3.18}$$

где $\tilde{n}_k^t$ — величина (3.15).

Обозначив через $\tilde{\gamma}_k^t$ границу шарового сектора $\overset{*}{\psi}{}_k^t$, а через $\overline{\psi}_k^{th}$ — множество всех узлов сетки, построенной на замыкании $\overset{*}{\psi}{}_k^t$, разобьем $\overline{\psi}_k^{th}$ на следующие непересекающиеся подмножества: $\tilde{\gamma}_{1k}^{ht} = \Gamma \cap \overline{\psi}_k^{th}$; $\tilde{\gamma}_{2k}^{ht}$ — множество узлов, расположенных в $\overset{*}{\psi}{}_k^t$ на сфере $\rho = \rho_{0k}\exp\{-\tilde{N}_k^t\tilde{\beta}_k^t\}$;

$$\tilde{\gamma}_{0k}^{ht} = \overline{\psi}_k^{ht} \cap \tilde{\gamma}_k^t \cap M \setminus \gamma_{2k}^{ht}; \qquad \psi_k^{ht} = \overline{\psi}_k^{ht} \cap \overset{*}{\psi}{}_k^t \setminus \tilde{\gamma}_{2k}^{ht}.$$

Итак, все необходимое сетки построены. Введем оператор Δ_h в узлах кубической сетки R_n^h, $n = 1, 2, \ldots, \tilde{N}$, аналогично (2.3) в соответствующей прямоугольной системе координат с заменой h на h_n, в узлах цилиндрической сетки $T_m^{h'}$, $m : L_m \in \mathscr{L}$, аналогично (2.6) в соответствующей цилиндрической системе координат с заменой h и β на h'_m и β_m, а также в узлах сферических сеток ω_k^{hi}, $i = 1, 2, \ldots, i_k$, и ψ_k^{ht}, $t = 1, 2, \ldots, t_k$, $k : P_k \in \mathscr{P}$, аналогично (2.14) в соответствующих сферических системах координат с заменой β соответственно на β_k^i и $\tilde{\beta}_k^t$.

Зададим оператор склейки S в каждой точке

$$Q \in M_0^h = \Big(\bigcup_{m:L_m\in\mathscr{L}} \vartheta_{0m}^h\Big) \cup \Big(\bigcup_{n=1}^{\tilde{N}} \sigma_{0n}^h\Big) \cup \Big(\bigcup_{k:P_k\in\mathscr{P}} \Big(\Big(\bigcup_{i=1}^{i_k} \gamma_{0k}^{hi}\Big) \cup \Big(\bigcup_{t=1}^{t_k} \tilde{\gamma}_{0k}^{ht}\Big)\Big)\Big)$$

следующим образом. Рассмотрим множество всех параллелепипедов $\{R_n\}$, цилиндрических секторов $\{T_m\}$ и шаровых секторов $\{\overset{*}{\omega}{}_k^i\} \cup \{\overset{*}{\psi}{}_k^t\}$, внутри которых находится точка Q, и выберем одну из тех фигур R_{n_Q}, T_{m_Q}, $\overset{*}{\omega}{}_{k_Q}^{i_Q}$ или $\overset{*}{\psi}{}_{k_Q}^{t_Q}$, часть границы которой, расположенная в M, удалена от Q на максимальное расстояние. Значение оператора S в точке Q вычисляется, как правило, через значения функции в восьми ближайших узлах сетки, построенной на замыкании выбранной фигуры, полилинейной интерполяцией в ортогональной системе координат, в которой задана сетка. Однако, если сетка цилиндрическая или сферическая и со стороны ребра L_{m_Q} или, соответственно, вершины P_{k_Q}, недостает узлов сетки для выполнения указанной интерполяции, то при интерполяции используются заданные граничные значения (в задаче (1.37)) в соответствующих точках ребра L_{m_Q} или в вершине P_{k_Q}.

Пусть

$$\Gamma^h = \Big(\bigcup_{n=1}^{\tilde{N}} \sigma_{1n}^h\Big) \cup \Big(\bigcup_{m:L_m\in\mathscr{L}} (\vartheta_{1m}^h \cup \vartheta_{2m}^h)\Big) \cup \Big(\bigcup_{k:P_k\in\mathscr{P}} \Big(\Big(\bigcup_{i=1}^{i_k} \bigcup_{j=1}^{3} \gamma_{jk}^{hi}\Big) \cup \Big(\bigcup_{t=1}^{t_k} \bigcup_{q=1}^{2} \tilde{\gamma}_{qk}^{ht}\Big)\Big)\Big).$$

Обозначим через $\overline{M}^h$ объединение стандартных сеток $\overline{R}_n^h$, $n = 1, 2, \ldots, \tilde{N}$, $\overline{T}_m^h$, $m : L_m \in \mathscr{L}$, $\overline{\omega}_k^{hi}$, $i = 1, 2, \ldots, i_k$, $\overline{\psi}_k^{ht}$, $t = 1, 2, \ldots, t_k$, $k : P_k \in \mathscr{P}$. Хотя некоторые узлы различных сеток геометрически могут совпадать, но как элементы множества $\overline{M}^h$ они различаются с учетом принадлежности к разным стандартным сеткам.

Зададим на Γ^h функцию η_h следующим образом. Если $P \in \Gamma \cap \Gamma^h$, то $\eta_h = \eta$, где η — заданное в точке P граничное значение решения u задачи (1.37). Если $P \in \vartheta_{2m}^h$, то η_h равно значению η в точке $Q_P \in L_m$, ближайшей к P. Аналогично, если $P \in \gamma_{3k}^{hi}$, то η_h совпадает со значением η в ближайшей к P точке Q_P, лежащей на ребре двугранного угла (многогранника M), в котором непосредственно расположен шаровой сектор $\overset{*}{\omega}{}_k^i$. Наконец, если $P \in \gamma_{2k}^{hi}$, $i = 1, 2, \ldots, i_k$, или $P \in \tilde{\gamma}_{2k}^{ht}$, $t = 1, 2, \ldots, t_k$, то η_h совпадает со значением η в вершине P_k.

В силу оценки (3.7), теорем 1.3—1.7, леммы 1.5 и условий (3.1), (3.8)—(3.18) имеем

$$\max_{M_0^h} |u - Su| = O(h^2), \qquad \max_{\Gamma^h} |u - \eta_h| = O(h^2), \tag{3.19}$$

где u — решение задачи (1.37).

Рассмотрим систему $O(h^{-3}\ln^2 h)$ разностных уравнений

$$\Delta_h u_h = 0 \text{ на } R_n^h, \quad u_h = Su_h \text{ на } \sigma_{0n}^h, \quad n = 1, 2, \ldots, \tilde{N}; \tag{3.20}$$

$$\Delta_h u_h = 0 \text{ на } T_m^h, \quad u_h = Su_h \text{ на } \vartheta_{0m}^h, \quad m : L_m \in \mathscr{L}; \tag{3.21}$$

$$\Delta_h u_h = 0 \text{ на } \omega_k^{hi}, \quad u_h = Su_h \text{ на } \gamma_{0k}^{hi}, \tag{3.22}$$

$$i = 1, 2, \ldots, i_k, \quad k : P_k \in \mathscr{P};$$

$$\Delta_h u_h = 0 \text{ на } \psi_k^{ht}, \quad u_h = Su_h \text{ на } \tilde{\gamma}_{0k}^{ht}, \tag{3.23}$$

$$t = 1, 2, \ldots, t_k, \quad k : P_k \in \mathscr{P};$$

$$u_h = \eta_h \text{ на } \Gamma^h. \tag{3.24}$$

Лемма 3.1. *Система разностных уравнений* (3.20)—(3.24) *имеет единственное решение.*

Теорема 3.1. *Справедлива оценка*

$$\max_{\overline{M}^h} |u_h - u| = O(h^2 \ln h^{-1}),$$

где u — решение задачи (1.37), *u_h — решение системы* (3.20)—(3.24).

Доказательства леммы 3.1 и теоремы 3.1 аналогичны доказательствам леммы 3.1 и теоремы 3.1 работы [5], проведенным детально в двумерном случае. При этом в доказательстве теоремы 3.1 роль теорем 1.1 и 2.1 работы [5] выполняют леммы 2.1—2.3 предыдущего параграфа, вместо теорем 1.2 и 2.2 [5] используются леммы 2.4—2.7 и, наконец, оценка (3.24) из [5] заменяется на оценки (3.19) настоящего параграфа. В свою очередь выполнение условий лемм 2.1—2.3 из предыдущего параграфа, в частности, требований (2.3), (2.7), (2.15) применительно к решению u задачи (1.37) на соответствующих прямоугольных параллелепипедах, цилиндрических и шаровых секторах, на которых построены стандартные сетки $\overline{R}_n^h$, $n = 1, 2, \ldots, \tilde{N}$, $\overline{T}_m^h$, $m : L_m \in \mathscr{L}$, $\overline{\omega}_k^{ih}$, $i = 1, 2, \ldots, i_k$, $\overline{\psi}_k^{th}$, $t = 1, 2, \ldots, t_k$, $k : P_k \in \mathscr{P}$, гарантируется изложенным выше методом покрытия многогранника M, оценкой (3.7) и теоремами 1.3—1.7 (неравенства (2.15) и (2.7) проверяются аналогично (1.78)).

Замечание 1. Для нахождения решения системы (3.20)—(3.24) может быть применен альтернирующий метод Шварца путем поочередного решения разностных уравнений на стандартных кубических, цилиндрических и сферических сетках, аналогично двумерному случаю, изложенному в [5]. При этом решение системы (3.20)—(3.24) может быть найдено с любой точностью $\varepsilon > 0$ в равномерной метрике за число итераций по Шварцу $O(\ln \varepsilon^{-1})$, не зависящее от h, $0 < h \leqslant h_0$, где $h_0 > 0$ — некоторое число. Это утверждение доказывается аналогично теореме 3.2 [5].

Замечание 3.2. Рассмотренный метод составных сеток без каких-либо изменений распространяется на уравнение Пуассона $\Delta u = f$ на многограннике M при тех же краевых условиях, что и в задаче (1.37), если $f \in C_{2,\lambda}(\Omega)$, $0 < \lambda < 1$, где Ω — область с достаточно гладкой границей, содержащая $\overline{M}$. При этом система разностных уравнений (3.20)—(3.24) заменяется системой

$$\Delta_h u_h = f \text{ на } \overline{M}^h \setminus (M_0^h \cup \Gamma^h), \qquad u_h = S u_h \text{ на } M_0^h, \qquad u_h = \eta_h \text{ на } \Gamma^h$$

и лемма 3.1 и теорема 3.1 сохраняют силу. Это вытекает из возможности представления решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в виде суммы функции класса $C_{4,\lambda}(\Omega)$ и решения задачи вида (1.37) при граничных значениях, удовлетворяющих заданным требованиям гладкости (см. [22]).

Замечание 3.3. Пусть многогранник M имеет трехгранный угол, обладающий следующими свойствами: 1) две его грани ортогональны третьей грани, 2) весь трехгранный угол расположен по одну сторону от плоскости указанной третьей грани, 3) не является выпуклым прямым трехгранным углом[1].

Тогда при построении конечного покрытия многогранника M, по-видимому, можно не строить шаровой сектор в этом трехгранном угле, расположив цилиндрический сектор, охватывающий ребро, образованное первыми двумя гранями, вплотную к третьей грани. Выяснение возможности указанного упрощения с сохранением аналога теоремы 3.1 потребует дополнительного исследования дифференциальных свойств гармонических функций в трехгранном угле рассматриваемого вида и получаемых при этом разностных уравнений.

Замечание к работе [5]. При доказательстве неравенства (3.46) работы [5] следует иметь в виду, что теорема 1.2 работы [5] справедлива и в случае, когда $\varphi_1 \equiv 1$ на γ_1, причем существует m $(2 \leqslant m \leqslant 4)$, при котором $\nu_m = 1$, $\varphi_m \equiv 0$, а теорема 2.2 работы [5] остается в силе также в случае, когда $\varphi \equiv 1$ на замыкании дуги ϑ_0, причем $\nu_1 + \nu_2 > 0$. Доказательства теорем 1.2 и 2.2 [5] в указанных дополнительных случаях остаются теми же.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волков Е. А.* О дифференциальных свойствах решений уравнений Лапласа и Пуассона на параллелепипеде и эффективных оценках погрешности метода сеток.— Труды МИАН СССР, 1969, 105, с. 46—65.

[1] В выпуклый прямой трехгранный угол вписывается прямоугольный параллелепипед, на котором строится кубическая сетка.

2. *Филиппов А. Ф.* Гладкость обобщенных решений вблизи вершины многогранного угла.— Диф. уравнения, 1973, 9, № 10, с. 1889—1903.
3. *Волков Е. А.* Метод сеток для конечных и бесконечных областей с кусочно-гладкой границей.— Докл. АН СССР, 1966, 168, №. 5, с. 978—981.
4. *Волков Е. А.* Метод составных сеток для конечных областей с кусочно-гладкой границей.— Труды МИАН СССР, 1968, 96, с, 117—148.
5. *Волков Е. А.* О методе регулярных составных сеток для уравнения Лапласа на многоугольниках.— Труды МИАН СССР, 1976, 140, с. 68—102.
6. *Дьяконов Е. Г.* Об одном способе решения уравнения Пуассона.— ДАН СССР, 1962, 143, № 1, с. 21—24.
7. *Miller K.* Numerical analysis to the Schwarz alternating procedure.— Numer. Math., 1965, 7, N 2, p. 91—103.
8. *Дьяконов Е. Г.* Разностные методы решения краевых задач. М.: Изд-во МГУ, 1971. Вып. 1 (стационарные задачи).
9. *Волков Е. А.* Метод неравномерных сеток для конечных и бесконечных областей с коническими точками.— Диф. уравнения, 1966, 2, № 10, с. 1358—1373.
10. *Bramble J. H., Hubbard B. E.* Approximation of solution of mixed boundary value problems for Poisson's equation by finite differences.— J. Assoc. Comput. Mach., 1965, 12, № 1, p. 114—123.
11. *Wigly N. M.* On the convergence of discrete approximations to solutions of mixed boundary value problems.— SIAM J. Numer. Analys., 1966, 3, N 3, p. 372—382.
12. *Оганесян Л. А., Руховец Л. А.* О вариационно-разностных схемах для линейных эллиптических уравнений второго порядка в двумерной области с кусочно-гладкой границей.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1968, 8, № 1, с. 97—114.
13. *Whiteman J. R.* Numerical solution of a harmonic mixed boundary value problem by the extention of a dual series method.— Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1970, 23, N 3, p. 449—455.
14. *Волков Е. А.* Метод регулярных составных сеток решения смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа.— ДАН СССР, 1971, 196, № 2, с. 266—269.
15. *Whiteman J. R.* Finite-difference techniques for a harmonic mixed boundary problem, having a reentrant boundary.— Proc. Roy. Soc. London A, 1971, 323, N 1553, p. 271—276.
16. *Babuška I., Rozenzweig M. B.* A finite elements scheme for domains with corners.— Numer. Math., 1972, 20, N 1, p. 1—21.
17. *Whiteman J. R., Barnhill R. E.* Finite element methods for elliptic mixed boundary value problems containing singularities. — Proc. Conf. «Equadiff III». Brno, 1972, p. 261—267.
18. *Оганесян Л. А., Ривкинд В. Я., Руховец Л. А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. II. Дифференциальные уравнения и их применение: Труды семинара. Вильнюс, 1974. Вып. 8, с. 2—319.
19. *Фрязинов И. В.* Разностные схемы для уравнения Пуассона и уравнения теплопроводности в многоугольнике при различных типах краевых условий на различных частях границы: Препринт № 25 за 1977 г. М.: Ин-т прикл. мат. АН СССР, 1977.
20. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. I. М.: Наука, 1973.
21. *Kellog O. D.* On the derivatives of harmonic functions on the boundary.— Trans. Amer. Math. Soc., 1931, 33, N 2, p. 486—510.
22. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: ИЛ. 1957.
23. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
24. *Стечкин С. Б.*— Дополнение VI к книге Г. Г. Харди. Дж. Е. Литтльвуда, Г. Полиа. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
25. *Келдыш М. В.* О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле. — Усп. мат. наук, 1940, вып. 8, с. 171—231.
26. *Самарский А. А., Андреев В. Б.* Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.
27. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952.