В. И. Моркунас, Об интегралах типа Коши в областях с гладкой границей, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987, том 157, 173–174

В.И.Моркунас

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ТИПА КОШИ В ОБЛАСТЯХ С ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Пусть $\mathbb{D}=\{\xi\in\mathbb{C}, |\xi|<1\}$, $\mathbb{T}=\{\xi\in\mathbb{C}, |\xi|=1\}$, Γ - замкнутая спрямляемая жорданова кривая, φ - конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на $\operatorname{Int}\Gamma$. Символом K^f_Γ обозначим интеграл типа Коши:

$$K^f_\Gamma(z)\overset{def}{=}\int_\Gamma(\xi-z)^{-1}f(\xi)\,d\xi \qquad z\in \operatorname{Int}\Gamma .$$

Следуя Г.Ц.Тумаркину ([I]), обозначим через R_1 класс всех кривых Γ, обладающих следующим свойством: для любой функции $f\in L^1(\Gamma)$ существует такая функция $g\in L^1(\mathbb{T})$, что $(K^f_\Gamma\circ\varphi)\cdot\varphi'=K^g_\mathbb{T}$. Этот класс, под названием "класс K" был введен в [2] в связи с изучением граничных свойств интегралов типа Коши. Затем он по другим поводам появлялся в [3], [4].

В [I] обсуждается вопрос о соотношении класса R_1 с классом R_2 всех кривых Γ таких, что для любой $f\in L^2(\Gamma)$ функция $(K^f_\Gamma\circ\varphi)\varphi'$ принадлежит $H^2(\mathbb{D})$. В частности, там был поставлен вопрос: верно ли, что $R_1=R_2$? В этой заметке дается отрицательный ответ на этот вопрос.

Более того, как видно из формулируемой ниже теоремы, существуют кривые класса C^1, не принадлежащие R_1. Напомним, что согласно теореме Г.Давида (см. [5]), класс R_2 совпадает с классом карлесоновых кривых, т.е. кривых, для которых длина дуги $\Gamma\cap B_r$ не превосходит $const\cdot r$ для любого r и любого круга B_r радиуса r. В частности, кривые Γ класса C^1 принадлежат R_2. (Это следует и из известного результата А.П.Кальдерона.)

Обозначим через ω произвольный модуль непрерывности, а через $\omega(f,\delta)\overset{def}{=}\sup\{|f(z')-f(z)|, |z-z'|\leq\delta, z,z'\in \operatorname{clos}\mathbb{D}\}$ - модуль непрерывности функции f, заданной в круге $\operatorname{clos}\mathbb{D}$. Пусть

$$\mathcal{M}=\left\{\omega:\left|\int_0^a\frac{\omega(h)}{h}dh=\infty,\ \int_0^a\frac{\omega^2(h)}{h}dh<\infty,\ \omega^2 \text{ вогнута}\right.\right\}.$$

ТЕОРЕМА. Для любого $\omega\in\mathcal{M}$ существует такой конформный гомеоморфизм φ круга $\operatorname{clos}\mathbb{D}$, что

I) $\omega(\varphi',h)\leq c\,\omega(h)$

2) $\varphi(\mathbb{T})\notin R_1$

Доказательство теоремы будет изложено в другом месте. Здесь мы лишь укажем функцию φ, обладающую свойствами (I) и (2) для $\omega(h) = \frac{1}{|\log h|}$:

$$\varphi(z) = (z+1) + \varepsilon \int_{-1}^{z} \exp\left[\log(i(s+1))/\pi i\right] / \log(i(s+1))\, ds .$$

В работе [2] доказано, что, если $\int_0^a \frac{\omega(\varphi', u)}{u} dh < +\infty$, то $\varphi(\mathbb{T}) \in R_1$. Из теоремы следует точность этого утверждения.

В заключение благодарю С.А.Виноградова и В.П.Хавина за советы и внимание к работе.

Литература

I. T u m a r k i n G.C. Some problems conserning classes of domains determined by properties of Cauchy type integrals. - Lect.Notes Math., 1984, v.1043, p.313-316.

2. Т у м а р к и н Г.Ц. Свойства аналитических функций, представимых интегралами типа Коши - Стильтьеса и Коши - Лебега. - Изв. АН Арм.ССР, I963, т.ХУI, № 5, с.23-45.

3. Д ы н ь к и н Е.М. О равномерном приближении функций в жордановых областях. - Сиб.мат.ж., I977, т.ХУШ, № 4, с.775-786.

4. A n d e r s s o n J.E., G a n e l i u s T. The degree of approximation by rational functions with fixed poles. - Math.Z., 1977, Bd 153, N 2, S.161-166.

5. D a v i d G. Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe. - Ann.Scient.Ec.Norm.Sup., 4 serie, 1984, t.17, p.157-189.

V.I.Morkunas. On Cauchy type integrals in domains with smooth boundary.

Summary

There exist a Jordan domain G with C^1 -boundary and a Cauchy integral f in G such that $(f \circ \varphi)\varphi'$ is not a Cauchy integral in the unit disc $\mathbb{D}$, φ being a conformal map of $\mathbb{D}$ onto G.