

Вик. С. Куликов

Теорема Кизини для почти общих накрытий проективной плоскости

Результаты, относящиеся к гипотезе Кизини и содержащиеся в статьях автора (Изв. РАН, Сер. матем., 63:6 (1999), 83–116) и С. Ю. Немировского (Изв. РАН, Сер. матем., 65:1 (2001), 77–80), обобщаются на случай почти общих накрытий проективной плоскости.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: конечные накрытия проективной плоскости, гипотеза Кизини.

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm9568>

Введение

Пусть S – неособая неприводимая проективная поверхность, определенная над полем комплексных чисел \mathbb{C} , и пусть $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ – конечный морфизм в проективную плоскость \mathbb{P}^2 , разветвленный в неприводимой кривой $B_f \subset \mathbb{P}^2$. Морфизм f определяет гомоморфизм монодромии $f_*: \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B_f, q) \rightarrow \mathbb{S}_{\deg f}$ в симметрическую группу $\mathbb{S}_{\deg f}$, действующую на слое $f^{-1}(q) = \{q_1, \dots, q_{\deg f}\}$. Его образ $G_f := f_*(\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B_f, q)) \subset \mathbb{S}_{\deg f}$ называется *группой монодромии* морфизма f .

Пусть γ – это так называемый геометрический порождающий элемент фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B_f, q)$, т.е. элемент группы $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B_f, q)$, представленный простой петлей вокруг кривой B_f вблизи неособой точки $p \in B_f$. Обозначим через $\bar{r}_f = (r_1, \dots, r_k)$ цикловой тип перестановки $f_*(\gamma)$, т.е. набор длин нетривиальных циклов, входящих в разложение перестановки $f_*(\gamma)$ в виде произведения непересекающихся циклов. Набор \bar{r}_f целых чисел $r_j \geq 2$, $j = 1, \dots, k$, называется *данными ветвления* морфизма f .

Пусть p – точка кривой $B_f \subset \mathbb{P}^2$. Хорошо известно, что группа $\pi_1^{\text{loc}}(B_f, p) := \pi_1(V \setminus B_f)$ не зависит от V , где $V \subset \mathbb{P}^2$ – это достаточно маленькая комплексно-аналитическая окрестность точки p , биголоморфная шару радиуса $r \ll 1$ с центром в точке p . Образ $G_{f,p} := \text{im } f_* \circ i_*$ называется *локальной группой монодромии* морфизма f в точке p , где $i_*: \pi_1^{\text{loc}}(B_f, p) = \pi_1(V \setminus B_f, \tilde{q}) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B_f, q)$ – гомоморфизм, определенный однозначно с точностью до сопряжения в группе $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B_f, q)$ вложением $V \hookrightarrow \mathbb{P}^2$. Набор конечных групп $\mathcal{G}_f = \{G_{f,p} \mid p \in \text{Sing } B_f\}$ называется *данными монодромии* морфизма f , а тройка $\text{pas}(f) = (B_f, \bar{r}_f, \mathcal{G}_f)$ называется *паспортом* морфизма f .

Работа выполнена в МЦМУ МИАН при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-15-2019-1614).

Чтобы ввести термин *теорема Кизини*, нам понадобятся следующие обозначения. Пусть \mathcal{G} – некоторое конечное множество конечных групп и \mathcal{S} – некоторое множество типов сингулярности особых точек плоских кривых. Обозначим через $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ множество неприводимых плоских кривых, особые точки которых имеют типы сингулярности, принадлежащие множеству \mathcal{S} . Пусть $\mathcal{F}_{\bar{r}, \mathcal{S}, \mathcal{G}}$ – множество конечных морфизмов $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ неособых неприводимых поверхностей S таких, что $\bar{r}_f = \bar{r}$, $B_f \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ и группы $G_{f,p}$, входящие в \mathcal{G}_f , принадлежат множеству \mathcal{G} .

Скажем, что два конечных морфизма $f_i: S_i \rightarrow \mathbb{P}^2$, $i = 1, 2$, эквивалентны, если существует изоморфизм $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ такой, что $f_1 = f_2 \circ \varphi$.

Пусть заданы набор \bar{r} целых чисел ≥ 2 и множества \mathcal{S} и \mathcal{G} . Назовем утверждение *теоремой Кизини для морфизмов из $\mathcal{F}_{\bar{r}, \mathcal{S}, \mathcal{G}}$* , если в нем утверждается существование константы $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}(\bar{r}, \mathcal{S}, \mathcal{G}) \in \mathbb{N}$ такой, что если $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{\bar{r}, \mathcal{S}, \mathcal{G}}$ удовлетворяют условиям $\text{pas}(f_1) = \text{pas}(f_2)$ и $\max(\deg f_1, \deg f_2) \geq \mathfrak{d}$, то морфизмы f_1 и f_2 эквивалентны.

Например, если $\mathcal{S} = \{A_1, A_2\}$, $\mathcal{G} = \{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{S}_3\}$ и $\bar{r} = (2)$, то морфизмы $f \in \mathcal{F}_{\bar{r}, \mathcal{S}, \mathcal{G}}$ называются *общими накрытиями проективной плоскости*. Отметим, что если поверхность S вложена в проективное пространство \mathbb{P}^n , то хорошо известно (см., например, [3]), что ограничение $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ на S линейной проекции $\text{pr}: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^2$, общей по отношению к вложению поверхности S в \mathbb{P}^n , является общим накрытием. Гипотеза Кизини (см. [2]) утверждает, что теорема Кизини с константой $\mathfrak{d} = 5$ верна для общих накрытий проективной плоскости. Заметим (см., например, [7]), что имеются примеры неэквивалентных общих накрытий проективной плоскости, имеющих одинаковые паспорта и степени которых ≤ 4 . Гипотеза Кизини была доказана в [6] для общих линейных проекций и с использованием результатов статьи [5] была доказана в [11] в случае, когда $\mathfrak{d} = 12$.

Если $\mathcal{S} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{G} = \{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{S}_3\}$, $\bar{r} = (2)$, то морфизмы $f \in \mathcal{F}_{\bar{r}, \mathcal{S}, \mathcal{G}}$ называются *почти общими накрытиями проективной плоскости*. В [8] было доказано, что конечный морфизм $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ неособой неприводимой поверхности S является почти общим накрытием проективной плоскости, если он удовлетворяет следующим условиям:

- (i) для каждой точки $p \in \mathbb{P}^2$ прообраз $f^{-1}(p)$ состоит по крайней мере из $\deg f - 2$ различных точек;
- (ii) кривая ветвления (внизу) $B \subset \mathbb{P}^2$ морфизма f неприводима;
- (iii) f разветвлен (вверху) с кратностью 2 в общей точке его кривой ветвления $R \subset S$ и $f|_R: R \rightarrow B$ является бирациональным морфизмом.

Цель настоящей статьи – доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Теорема Кизини с константой $\mathfrak{d} = 12$ верна для почти общих накрытий проективной плоскости.*

Из этой теоремы (с учетом замечания 1, сформулированного в конце п. 1.1) вытекает

СЛЕДСТВИЕ. *Если $f_1: S_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ и $f_2: S_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – два почти общих накрытия проективной плоскости, $\max(\deg f_1, \deg f_2) \geq 12$, разветвленные в одной и*

той же кривой $B \subset \mathbb{P}^2$, не имеющей особых точек сингулярных типов A_{6k-1} , $k \in \mathbb{N}$, то f_1 и f_2 являются эквивалентными накрытиями¹.

Ввиду гипотезы Кизини позволим себе сформулировать следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА. Константа $\mathfrak{d} = 12$ в приведенной теореме может быть заменена на $\mathfrak{d} = 5$.

Отметим, что неприводимые ростки почти общих накрытий проективной плоскости являются жесткими ростками (о жестких ростках конечных морфизмов гладких поверхностей и об их связи с рациональными парами Белого см. [9] и [10]). Поэтому представляет интерес следующий вопрос: является ли условие жесткости ростков конечных морфизмов необходимым для того, чтобы для множеств конечных морфизмов выполнялась теорема Кизини?

В § 1 напоминаются некоторые результаты статьи [8], описывающие свойства почти общих накрытий и которые затем в § 2 используются в доказательстве сформулированной теоремы.

§ 1. Свойства почти общих накрытий

1.1. Паспорт почти общего накрытия. Пусть $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ – почти общее накрытие проективной плоскости, разветвленное в кривой $B \subset \mathbb{P}^2$, $\deg f = N$. Обозначим через $R \subset S$ кривую ветвления (вверху) накрытия f . Имеем $f^*(B) = 2R + C$, так как $\bar{r}_f = (2)$, где $f^*(B)$ – это прообраз дивизора B и $C \subset S$ – некоторая приведенная кривая.

ЛЕММА 1. (i) *Группа монодромии $G_f \subseteq \mathbb{S}_N$ почти общего накрытия $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ порождается транспозициями и совпадает с \mathbb{S}_N .*

(ii) *Ограничение $f|_R: R \rightarrow B$ накрытия f на R является бирациональным морфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus B, q)$ порождается геометрическими порождающими. Поэтому G_f порождается транспозициями, так как $\bar{r}_f = (2)$. Следовательно, утверждение (i) следует из неприводимости поверхности S , так как в этом случае группа $G_f \subset \mathbb{S}_{\deg f}$ действует транзитивно на слое $f^{-1}(q)$.

Утверждение (ii) также следует из условия $\bar{r}_f = (2)$, так как из этого условия вытекает, что $f|_R: R \rightarrow B$ однолистно над общей точкой кривой B . Следовательно, $f|_R$ является бирациональным морфизмом.

Лемма доказана.

Пусть $V \subset \mathbb{P}^2$ – достаточно маленькая окрестность точки $p \in B$ такая, что $\pi_1(V \setminus B) = \pi_1^{\text{loc}}(B, p)$. Группа локальной монодромии $G_{f,p} \subset G_f$ порождается транспозициями, так как группа $\pi_1(V \setminus B)$ также порождается геометрическими порождающими. Кроме того, мы можем считать, что $f^{-1}(V)$ является несвязным объединением M комплексно аналитических окрестностей $U_j \subset S$,

¹Следующий вопрос является открытым: является ли верным утверждение, аналогичное приведенному следствию, если не налагать ограничение на типы особых точек кривых ветвления почти общих накрытий проективной плоскости?

где M – это число орбит действия группы $G_{f,p}$ на слое $f^{-1}(q)$. Поэтому из данных монодромии почти общего накрытия плоскости и из леммы 1 следует, что имеются три возможных случая:

- 1) $G_{f,p} \simeq \mathbb{Z}_2$ порождается транспозицией и $f^{-1}(V)$ – несвязное объединение $N-1$ окрестностей U_1, \dots, U_{N-1} таких, что $f: U_j \rightarrow V$ – биголоморфные отображения для $j = 2, \dots, N-1$, а $f: U_1 \rightarrow V$ – двулистное накрытие;
- 2) $G_{f,p} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ порождается двумя коммутирующими транспозициями и $f^{-1}(V)$ – несвязное объединение $N-2$ окрестностей U_1, \dots, U_{N-2} таких, что $f: U_1 \rightarrow V$ и $f: U_2 \rightarrow V$ – двулистные накрытия, а $f: U_j \rightarrow V$ – биголоморфные отображения для $j = 3, \dots, N-2$;
- 3) $G_{f,p} \simeq \mathbb{S}_3$ порождается двумя некоммутирующими транспозициями и прообраз $f^{-1}(V)$ является несвязным объединением $N-2$ окрестностей U_1, \dots, U_{N-2} таких, что $f: U_1 \rightarrow V$ – трехлистное накрытие, а $f: U_j \rightarrow V$ – биголоморфные отображения для $j = 2, \dots, N-2$.

Легко показать, что в случае 1) существуют локальные координаты z, w в U_1 и u, v в V такие, что $f: U_1 \rightarrow V$ задается функциями $u = z$ и $v = w^2$. Пересечение $R \cap U$ задается уравнением $w = 0$, а $B \cap V$ – уравнением $v = 0$.

Аналогично в случае 2) существуют локальные координаты z_j, w_j в U_j и u_j, v_j в V , $j = 1, 2$, такие, что $f: U_j \rightarrow V$ задается функциями $u_j = z_j$ и $v_j = w_j^2$. Пересечение $R \cap U_j$ задается уравнением $w_j = 0$, а $B \cap V$ – уравнением $v_1 v_2 = 0$, где неприводимые ветви B_j кривой $B \cap V$, заданные уравнениями $v_j = 0$, $j = 1, 2$, неособы и $B_1 \neq B_2$, так как $\deg f|_R = 1$. Поэтому $p \in B \cap V$ – особая точка кривой B сингулярного типа A_{2k-1} , где k – индекс пересечения $(B_1, B_2)_p$ ветвей B_1 и B_2 в точке p , и в этом случае мы будем говорить, что точка $p \in B$ имеет f -тип $A_{k,2}$.

Трехлистные ростки неабелевых конечных накрытий $f: U \rightarrow V$ были исследованы в [8] в случае, когда U и V – неособые комплексно аналитические поверхности. В частности, в [8] было доказано, что существуют число $n \in \mathbb{N}$ и локальные координаты z, w в U и u, v в V такие, что трехлистный росток накрытия f эквивалентен накрытию $f_n: U \rightarrow V$, заданному функциями

$$\begin{aligned} u &= z, \\ v &= w^3 - 3z^n w, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1}$$

В случае 3) отождествим $f: U_1 \rightarrow V$ с ростком $f_n: U \rightarrow V$. Тогда пересечение $R \cap U_1$ задается уравнением $w^2 - z^n = 0$ и, следовательно, кривая R имеет в U_1 особую точку сингулярного типа A_{n-1} .

Пусть $n = 2k + \delta$, где δ равно 0 или 1 в зависимости от четности числа n .

Если $n = 2k$ – четное число, $k \geq 1$, то $R \cap U_1 = R_+ \cup R_-$ состоит из двух неприводимых компонент R_+ и R_- , заданных уравнениями $w = \pm z_i^k$. Поэтому кривая $B \cap V = B_+ \cup B_-$, где $B_+ = f(R_+)$ и $B_- = f(R_-)$, с учетом (1) задается параметрически функциями

$$u = z, \quad v = \mp 2z^{3k}.$$

Следовательно, $B \cap V$ задается уравнением

$$v^2 - 4u^{6k} = (v - 2u^{3k})(v + 2u^{3k}) = 0,$$

т.е. p является особой точкой кривой B сингулярного типа A_{6k-1} , и в случае 3), когда $n = 2k$, мы будем говорить, что $p \in B$ – это точка f -типа $A_{2k,3}$.

Непосредственно проверяется, что

$$f^*(v^2 - 4u^{6k}) = (w^2 - z^{2k})^2(w - 2z^k)(w + 2z^k).$$

Поэтому $C \cap U_1$ (здесь C – это компонента дивизора $f^*(B) = 2R + C$) задается уравнением

$$(w - 2z^k)(w + 2z^k) = 0. \quad (2)$$

Следовательно, пересечение $C \cap U_1$ также состоит из двух неприводимых компонент C_- и C_+ и имеет в U_1 особую точку сингулярного типа A_{2k-1} .

Если $n = 2k + 1$ – нечетное число, $k \geq 0$, то пересечение $R \cap U_1$ является неприводимой кривой, заданной уравнением $w^2 - z^n = 0$. Следовательно, кривая $R \cap U_1$ может быть задана параметрически функциями $z = t^2$ и $w = t^{2k+1}$, а кривая $B \cap V$ с учетом (1) задается параметрически функциями

$$u = t^2, \quad v = -2t^{6k+3}.$$

Следовательно, кривая $B \cap V$ задается уравнением

$$v^2 - 4u^{6k+3} = 0,$$

т.е. если $n = 2k + 1$, то p – особая точка кривой B сингулярного типа A_{6k+2} , и в случае 3), когда $n = 2k + 1$, мы будем говорить, что $p \in B$ – это точка f -типа $A_{2k+1,3}$.

Непосредственно проверяется, что

$$f^*(v^2 - 4u^{6k+3}) = (w^2 - z^{2k+1})^2(w - 4z^{2k+1}),$$

т.е. кривая $C \cap U_1$ задается уравнением

$$w^2 - 4z^{2k+1} = 0. \quad (3)$$

Следовательно кривая $C \cap U_1$ также неприводима и имеет в U_1 особую точку сингулярного типа A_{2k} .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Данные монодромии \mathcal{G}_f почти общего накрытия $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ проективной плоскости однозначно определяются типами сингулярности особых точек кривой ветвления B накрытия f , если B не имеет особых точек сингулярных типов A_{6k-1} , $k \in \mathbb{N}$, так как из приведенного выше детального рассмотрения возможных случаев 1)–3) следует, что локальные монодромии в особых точках кривой ветвления почти общего накрытия определены не однозначно только в случае, когда эти точки имеют один из сингулярных типов A_{6k-1} , $k \in \mathbb{N}$.

1.2. Инварианты кривых ветвления (вверху и внизу). Пусть $(B, p) \subset (\mathbb{P}^2, p)$ – росток приведенной кривой B в точке $p \in \mathbb{P}^2$. Он распадается на несколько неприводимых ростков: $(B, p) = (B_1, p) \cup \dots \cup (B_k, p)$. Обозначим

через μ_j кратность особенности ростка (B_j, p) в точке p , и пусть δ_p – это δ -инвариант особенности (B, p) . По определению (см. [4]) целые числа

$$c_{v,p} := \sum_{j=1}^k (\mu_j - 1), \quad n_{v,p} := \delta_p - \sum_{j=1}^k (\mu_j - 1)$$

называются соответственно *числами виртуальных каспов* и *виртуальных ноу-дов* ростка (B, p) , а числа

$$c_v := \sum_{p \in \text{Sing } B} c_{v,p}, \quad n_v := \sum_{p \in \text{Sing } B} n_{v,p}$$

называются соответственно числами *виртуальных каспов* и *виртуальных ноу-дов* кривой B . Имеем равенство $\delta_p = c_{v,p} + n_{v,p}$.

В [4] были доказаны обобщенные *формулы Плюккера*. А именно, пусть \widehat{B} – двойственная кривая к кривой B рода g и $\widehat{c}_v, \widehat{n}_v$ – числа виртуальных каспов и ноу-дов кривой \widehat{B} . Тогда имеют место следующие равенства:

$$\deg \widehat{B} = \deg B (\deg B - 1) - 3c_v - 2n_v, \quad (4)$$

$$2g = (\deg B - 1)(\deg B - 2) - 2c_v - 2n_v, \quad (5)$$

$$\deg \widehat{B} = \deg \widehat{B} (\deg \widehat{B} - 1) - 3\widehat{c}_v - 2\widehat{n}_v, \quad (6)$$

$$2g = (\deg \widehat{B} - 1)(\deg \widehat{B} - 2) - 2\widehat{c}_v - 2\widehat{n}_v. \quad (7)$$

Из (4)–(7) следует, что

$$\deg \widehat{B} = 2 \deg B - c_v + 2g - 2,$$

и так как $\deg \widehat{B} > 0$, то $c_v < 2 \deg B + 2g - 2$. Следовательно,

$$c_v < 2 \left(\frac{3}{2} \deg B + g - 1 \right). \quad (8)$$

ЛЕММА 2. *Если $p \in \text{Sing } B$ – это точка f -типа $A_{k,2}$, то $c_{v,p} = 0$, $n_{v,p} = \delta_p = k$; если p – это точка f -типа $A_{2k+1,3}$, $k \geq 0$, то $c_{v,p} = 1$, $n_{v,p} = 3k$ и $\delta_p = 3k + 1$; если p – это точка f -типа $A_{2k,3}$, $k \geq 1$, то $c_{v,p} = 0$, $n_{v,p} = \delta_p = 3k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что δ -инвариант особых точек плоской кривой, имеющих сингулярный тип A_{2m} или A_{2m-1} , равен m , а кратность особенности особой точки сингулярного типа A_{2m} равна 2 и в случае, когда сингулярный тип – это A_{2m-1} , ветви кривой в особой точке неособы, т.е. кратности особенностей этих ветвей в особой точке равны 1.

Лемма доказана.

Далее мы будем использовать следующие обозначения:

$$d := \frac{1}{2} \deg B;$$

n_k – число особых точек кривой B f -типа $A_{2k+1,3}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$;

m_k – число особых точек кривой B f -типа $A_{2k,3}$, $k \in \mathbb{N}$;

t_k – число особых точек кривой B f -типа $A_{k,2}$, $k \in \mathbb{N}$;

$$\mathbf{c} = \sum_{k=0}^{\infty} ((2k+1)n_k + 2km_k), \quad \mathbf{n} = \sum_{k=1}^{\infty} kt_k, \quad \mathbf{s} = \sum_{k=1}^{\infty} k(n_k + m_k).$$

Отметим, что числа \mathfrak{c} , \mathfrak{n} и \mathfrak{s} корректно определены, так как имеется только конечное число значений k , для которых числа n_k , m_k и t_k не равны нулю.

Имеем

$$c_v = \mathfrak{c} - 2\mathfrak{s}, \quad n_v = \mathfrak{n} + 3\mathfrak{s}. \quad (9)$$

Доказательство следующих трех лемм содержится в [8].

ЛЕММА 3 (см. [8; утверждение 2.1]). *Степень кривой B четна, $\deg B = 2d$, $d \in \mathbb{N}$.*

ЛЕММА 4 (см. [8; утверждение 2.2]). *Геометрический род g кривой B равен*

$$g = (2d - 1)(d - 1) - \mathfrak{c} - \mathfrak{n} - \mathfrak{s}.$$

ЛЕММА 5 (см. [8; утверждение 2.4]). *Степень $\widehat{d} = \deg \widehat{B}$ двойственной кривой \widehat{B} к кривой B равна*

$$\widehat{d} = 2d(2d - 1) - 3\mathfrak{c} - 2\mathfrak{n}.$$

ЛЕММА 6. *Индекс самопересечения $(R^2)_S$ кривой R равен*

$$(R^2)_S = 3d + g - 1 + \mathfrak{s}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждению 2.5 в [8] имеем $(R^2)_S = 2d^2 - \mathfrak{c} - \mathfrak{n}$ и лемма 6 следует из леммы 4.

ЛЕММА 7. *Имеет место следующее неравенство:*

$$\mathfrak{c} < 2(3d + g - 1 + \mathfrak{s}).$$

Доказательство следует из (8) и (9).

1.3. Инварианты накрывающих поверхностей. Обозначим через N степень почти общего накрытия $f: S \rightarrow \mathbb{P}^2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. (i) *Индекс самопересечения канонического класса K_S поверхности S равен*

$$K_S^2 = 9N - 9d + g - 1 + \mathfrak{s}.$$

(ii) *Топологическая эйлерова характеристика $e(S)$ поверхности S равна*

$$e(S) = 3N + 2(g - 1 + \mathfrak{s}) - \mathfrak{c}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложениям 2.1 и 2.2 в [8] имеем

$$K_S^2 = 9N - 12d + 2d^2 - \mathfrak{c} - \mathfrak{n}, \quad e(S) = 3N + 2d(2d - 3) - 3\mathfrak{c} - 2\mathfrak{n}.$$

Поэтому предложение 1 следует из леммы 4.

§ 2. Доказательство теоремы

Пусть $f_1: S_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ и $f_2: S_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – два почти общих накрытия проективной плоскости, разветвленные в одной и той же кривой $B \subset \mathbb{P}^2$, $\deg f_i = N_i$ при $i = 1, 2$, и пусть $\text{pas}(f_1) = \text{pas}(f_2)$. Имеем $f_1^*(B) = 2R_1 + C_1$ и $f_2^*(B) = 2R_2 + C_2$, где R_i – кривая ветвления (вверху) накрытия f_i , $i = 1, 2$.

2.1. Неприводимость расслоенного произведения двух неэквивалентных почти общих накрытий. Рассмотрим расслоенное произведение

$$S_1 \times_{\mathbb{P}^2} S_2 = \{(x, y) \in S_1 \times S_2 \mid f_1(x) = f_2(y)\}$$

поверхностей S_1 и S_2 над \mathbb{P}^2 . Пусть $\tilde{X} = \widetilde{S_1 \times_{\mathbb{P}^2} S_2}$ – нормализация поверхности $S_1 \times_{\mathbb{P}^2} S_2$. Обозначим через $g_1: \tilde{X} \rightarrow S_1$, $g_2: \tilde{X} \rightarrow S_2$ и $g_{1,2}: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^2$ соответствующие естественные морфизмы. Имеем $\deg g_1 = N_2$, $\deg g_2 = N_1$ и $\deg g_{1,2} = N_1 N_2$.

Мы будем использовать следующие обозначения: $\tilde{R} = g_1^{-1}(R_1) \cap g_2^{-1}(R_2) \subset \tilde{X}$, $\tilde{C} = g_1^{-1}(C_1) \cap g_2^{-1}(C_2)$, $\tilde{C}_1 = g_1^{-1}(R_1) \cap g_2^{-1}(C_2)$ и $\tilde{C}_2 = g_2^{-1}(R_2) \cap g_1^{-1}(C_1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если накрытия $f_1: S_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ и $f_2: S_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ не эквивалентны, то \tilde{X} является неприводимой поверхностью.*

Доказательство дословно повторяет доказательство предложения 2 в [5].

2.2. Разрешение особых точек поверхности \tilde{X} . Пусть $\nu: X \rightarrow \tilde{X}$ – разрешение особых точек поверхности \tilde{X} , конкретное описание которого будет дано ниже. Обозначим через

$$\bar{R} = \nu^{-1}(R), \quad \bar{C} = \nu^{-1}(\tilde{C}), \quad \bar{C}_i = \nu^{-1}(\tilde{C}_i), \quad i = 1, 2,$$

собственные прообразы кривых \tilde{R} , \tilde{C} и \tilde{C}_i .

Рассмотрим морфизм $h_1 = g_1 \circ \nu: X \rightarrow S_1$. Цель следующих пп. 2.2.1–2.2.5 – исследование свойств дивизора $h_1^*(R_1) = \nu^*(\tilde{R} + \tilde{C}_1)$.

2.2.1. Особенности расслоенного произведения двух неэквивалентных почти общих накрытий и его нормализации. Обозначим $R_{1,2} = \text{pr}_1^{-1}(R_1) \cap \text{pr}_2^{-1}(R_2) \subset S_1 \times_{\mathbb{P}^2} S_2$.

ЛЕММА 8. *Имеем $\text{Sing}(S_1 \times_{\mathbb{P}^2} S_2) = R_{1,2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точки $x \in S_1$ и $y \in S_2$ такие, что $f_1(x) = f_2(y)$, и пусть $U_1 \subset S_1$ и $U_2 \subset S_2$ – это две достаточно маленькие окрестности точек x и y , $f_1(U_1) = f_2(U_2) = V$.

Если $x \notin R_1$, то мы можем предполагать, что $f_1: U_1 \rightarrow V$ является биголоморфным отображением. Поэтому произведение $U_1 \times_V U_2 \subset S_1 \times_{\mathbb{P}^2} S_2$ биголоморфно графику отображения $f_2: U_2 \rightarrow V$, и, следовательно, поверхность $S_1 \times_{\mathbb{P}^2} S_2$ неособа в точке (x, y) . Аналогично, $S_1 \times_{\mathbb{P}^2} S_2$ – неособая поверхность в точке (x, y) , если $y \notin R_2$. Следовательно, $(S_1 \times_{\mathbb{P}^2} S_2) \setminus R_{1,2}$ является неособой поверхностью.

Если $x \in R_1 \setminus \text{Sing } R_1$ и $y \in R_2 \setminus \text{Sing } R_2$, то $(x, y) \in R_{1,2}$ и найдутся локальные координаты (z_i, w_i) в U_i , $i = 1, 2$, и локальные координаты (u, v) в V такие, что $f_i: U_i \rightarrow V$ – двулистные накрытия, заданные функциями $u = z_i$ и $v = w_i^2$. Поэтому поверхность $U_1 \times_V U_2$ задана в $U_1 \times U_2$ уравнениями $z_1 = z_2$ и $w_1^2 = w_2^2$. Следовательно, $(x, y) \in \text{Sing}(S_1 \times_{\mathbb{P}^2} S_2)$, если $x \in R_1 \setminus \text{Sing } R_1$ и $y \in R_2 \setminus \text{Sing } R_2$, т.е. $\text{Sing}(S_1 \times_{\mathbb{P}^2} S_2) = R_{1,2}$, так как $\text{Sing}(S_1 \times_{\mathbb{P}^2} S_2)$ и $R_{1,2}$ являются замкнутыми подмножествами в $S_1 \times_{\mathbb{P}^2} S_2$.

Лемма доказана.

В дальнейшем мы будем использовать результаты, полученные в п. 1.1, слегка модифицируя введенные там обозначения. А именно, для $f = f_i$ через $U_{i,j} \subset S_i$ будем обозначать окрестности U_j в $f^{-1}(V) = \bigsqcup U_j \subset S$, когда $S = S_i$, где $i = 1, 2$.

Из условия $\text{pas}(f_1) = \text{pas}(f_2)$ следует, что для каждой точки $p \in \text{Sing } B$ ее f_1 -тип совпадает с f_2 -типом.

Обозначим через $\widetilde{W}_{j_1, j_2} = U_{1, j_1} \widetilde{\times}_V U_{2, j_2} \subset \widetilde{X}$ нормализации расслоенных произведений над V окрестностей U_{1, j_1} и U_{2, j_2} .

2.2.2. Случай 1). В случае 1) (см. п. 1.1) локально в точке q кривая ветвления B неособа (росток $(B, p) \subset (V, p)$ является кривой ветвления ограничения отображения f_i на окрестность $U_{i,1}$), кривая $R_i \cap f_i^{-1}(V) \subset U_{i,1}$ также неособа и $R_i \cap C_i \cap f_i^{-1}(V) = \emptyset$. Легко видеть, что все поверхности \widetilde{W}_{j_1, j_2} неособы и для $j_i > 1$, $i = 1, 2$, отображения $g_i: \widetilde{W}_{j_1, j_2} \rightarrow U_{i, j_i}$, $g_1: \widetilde{W}_{1, j_2} \rightarrow U_{1,1}$ и $g_2: \widetilde{W}_{j_1, 1} \rightarrow U_{2,1}$ биголоморфны, а $g_1: \widetilde{W}_{j_1, 1} \rightarrow U_{1, j_1}$ и $g_2: \widetilde{W}_{1, j_2} \rightarrow U_{2, j_2}$ являются двулиственными накрытиями и $\widetilde{W}_{1,1} = \widetilde{W}_{1,1,+} \sqcup \widetilde{W}_{1,1,-}$ – несвязное объединение двух окрестностей (заданных в $U_{1, j_1} \times U_{2, j_2}$ уравнениями $z_1 = z_2$, $w_1 = \pm w_2$) таких, что ограничения отображений g_i на каждую из этих окрестностей являются биголоморфными отображениями. Поэтому $g_1: \widetilde{R} \rightarrow R_1$ является морфизмом степени 2, и, в частности, имеем следующее утверждение, так как ν является бимероморфным отображением.

ЛЕММА 9. Имеем $\deg h_{1|\widetilde{R}} = 2$.

Отметим, что в случае 1) имеем следующее: $R_1 \cap f_1^{-1}(V) \subset U_{1,1}$, окрестность $\widetilde{W}_{1,1} \subset g_1^{-1}(U_{1,1})$ неособа и

$$\widetilde{R} \cap g_{1,2}^{-1}(V) \subset \widetilde{W}_{1,1} = \widetilde{W}_{1,1,+} \sqcup \widetilde{W}_{1,1,-}, \quad \widetilde{C}_i \cap \widetilde{W}_{1,1} = \emptyset. \quad (10)$$

Поэтому в случае (1) мы получаем, что

$\nu: (g_{1,2} \circ \nu)^{-1}(V) \rightarrow g_{1,2}^{-1}(V)$ – биголоморфное отображение и кривые \overline{R} и \overline{C}_1 не имеют общих точек в $(g_{1,2} \circ \nu)^{-1}(V)$.

2.2.3. Разрешение особых точек поверхности \widetilde{X} в случае 3). Как и выше, легко показать, что окрестности \widetilde{W}_{j_1, j_2} , \widetilde{W}_{1, j_2} и $\widetilde{W}_{j_1, 1}$ неособы при $j_1, j_2 > 1$ и

$$\widetilde{R} \cap g_{1,2}^{-1}(V) \subset \widetilde{W}_{1,1}. \quad (11)$$

Чтобы описать окрестность $\widetilde{W}_{1,1}$, рассмотрим гомоморфизмы монодромии $\psi_i: \pi_1(V \setminus B) \rightarrow \mathbb{S}_3$ трехлистных накрытий $f_i: U_{i,1} \rightarrow V$, разветвленных в $V \cap B$. Отметим, что накрытия $f_i: U_{i,1} \rightarrow V$ однозначно с точностью до эквивалентности определены типом особой точки p кривой ветвления $V \cap B$ (см. п. 1.1). Поэтому гомоморфизмы ψ_i также однозначно с точностью до сопряжения в группе \mathbb{S}_3 определены типом особой точки p , и мы можем считать, что $\psi_1 = \psi_2 = \psi$, а гомоморфизм монодромии накрытия $g_{1,2}: \widetilde{W}_{1,1} \rightarrow V$ – это

$$\psi \times \psi: \pi_1(V \setminus B) \rightarrow \mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3 \subset \mathbb{S}_9$$

и $\text{im}(\psi \times \psi)$ – это диагональ в $\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3$. Поэтому легко видеть, что множество $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ является объединением двух орбит O' и O'' действия группы $\psi \times \psi(\pi_1(V \setminus B)) \simeq \mathbb{S}_3$ на $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$,

$$O' = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}, \quad O'' = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 3), (2, 1)(3, 2)\}.$$

Следовательно, $\widetilde{W}_{1,1} = \widetilde{W}'_{1,1} \sqcup \widetilde{W}''_{1,1}$ – несвязное объединение двух окрестностей таких, что $g_i: \widetilde{W}'_{1,1} \rightarrow U_{i,1}$ являются биголоморфными изоморфизмами, $g_{1,2}: \widetilde{W}'_{1,1} \rightarrow V$ совпадает с отображениями f_1 и f_2 (ввиду того, что ограничения отображений g_1 и g_2 на $\widetilde{W}'_{1,1}$ являются изоморфизмами). Следовательно,

$$\widetilde{R} \cap \widetilde{W}'_{1,1} = g_{i|\widetilde{W}'_{1,1}}^{-1}(R_i \cap U_{i,1}), \quad \widetilde{C} \cap \widetilde{W}'_{1,1} = g_{i|\widetilde{W}'_{1,1}}^{-1}(C_i \cap U_{i,1}), \quad \widetilde{C}_i \cap \widetilde{W}'_{1,1} = \emptyset \quad (12)$$

для $i = 1, 2$.

Накрытие $g_{1,2}: \widetilde{W}''_{1,1} \rightarrow V$ является галуизацией накрытий $f_i: U_{i,1} \rightarrow V$. Следовательно, $g_1: \widetilde{W}''_{1,1} \rightarrow U_{1,1}$ – двулистное накрытие, разветвленное (внизу) в $C_1 \cap U_{1,1}$ и оно разветвлено (вверху) в $\widetilde{C}_2 \cap \widetilde{W}''_{1,1}$. Из (2) и (3) следует, что $q = g_{1,2}^{-1}(p) \cap \widetilde{W}''_{1,1}$ является особой точкой типа A_{n-1} поверхности $\widetilde{W}''_{1,1}$. Легко видеть, что

$$g_{i|\widetilde{W}''_{1,1}}^{-1}(R_i \cap U_{i,1}) = (\widetilde{R} \cap \widetilde{W}''_{1,1}) \cup (\widetilde{C}_i \cap \widetilde{W}''_{1,1}), \quad i = 1, 2. \quad (13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из (10)–(13) следует, что в случае 3) кривые \widetilde{R} и \widetilde{C}_i пересекаются только в точках $q \in \widetilde{W}''_{1,1}$, лежащих над точками $p \in B$ f -типа $A_{n,3}$.

Чтобы разрешить особую точку q поверхности $\widetilde{W}''_{1,1}$, рассмотрим накрытие $g_1: \widetilde{W}''_{1,1} \rightarrow U_{1,1}$. Пусть $\sigma: Z \rightarrow U_{1,1}$ – композиция m σ -процессов, разрешающая до дивизора с нормальными пересечениями особую точку кривой $C_1 \cap U_{1,1}$, где $m = k$, если $n = 2k$, и $m = k + 2$, если $n = 2k + 1$. Обозначим через $\widetilde{E}_j \subset Z$ собственный прообраз исключительной кривой j -го σ -процесса, через C'_1 собственный прообраз кривой $C_1 \cap U_{1,1}$ (если $n = 2k$, то $C'_1 = C'_{1,+} \cup C'_{1,-}$) и через R'_1 собственный прообраз кривой $R_1 \cap U_{1,1}$ (если $n = 2k$, то $R'_1 = R'_{1,+} \cup R'_{1,-}$).

Легко видеть, что $\sigma: Z \rightarrow U_{1,1}$ является также разрешением до дивизора с нормальными пересечениями особой точки кривой $R_1 \cap U_{1,1}$ и

$$R'_1 \cap C'_1 = \emptyset, \quad (R'_{1,+}, \widetilde{E}_k)_Z = (R'_{1,-}, \widetilde{E}_k)_Z = 1, \quad (R'_1, \widetilde{E}_j)_Z = 0 \quad \text{для } 1 \leq j < k, \quad (14)$$

если $n = 2k$,

$$R'_1 \cap C'_1 = \emptyset, \quad (R'_1, \widetilde{E}_{k+2})_Z = 1, \quad (R'_1, \widetilde{E}_j)_Z = 0 \quad \text{для } 1 \leq j < k + 2, \quad (15)$$

если $n = 2k + 1$.

В случае, когда $n = 2k$, взвешенный двойственный граф Γ ростка кривой $C_1 \cap U_{1,1}$, имеющего особую точку сингулярного типа A_{2k-1} , $k \geq 1$, изображен на рис. 1, где веса w_j вершин \widetilde{E}_j – это индексы самопересечения $w_j = (\widetilde{E}_j, \widetilde{E}_j)_Z$ (если $k = 1$, то $w_1 = -1$).

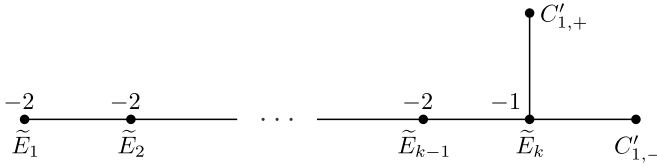


Рис. 1

Прообразы $\sigma^*(C_1)$ и $\sigma^*(R_1)$ в Z дивизоров $C_1 \cap U_{1,1}$ и $R_1 \cap U_{1,1}$ – это

$$\begin{aligned} \sigma^*(C_1) &= C'_{1,+} + C'_{1,-} + \sum_{j=1}^k 2j \tilde{E}_j, \\ \sigma^*(R_1) &= R'_{1,+} + R'_{1,-} + \sum_{j=1}^k 2j \tilde{E}_j. \end{aligned} \tag{16}$$

В случае, когда $n = 2k + 1$, взвешенный двойственный граф Γ ростка кривой $C_1 \cap U_{1,1}$, имеющего особую точку сингулярного типа A_{2k} , $k \geq 1$, изображен на рис. 2.

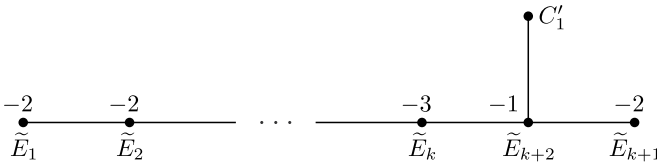


Рис. 2

Прообразы $\sigma^*(C_1)$ и $\sigma^*(R_1)$ в Z дивизоров $C_1 \cap U_{1,1}$ и $R_1 \cap U_{1,1}$ – это

$$\begin{aligned} \sigma^*(C_1) &= C'_1 + \sum_{j=1}^k 2j \tilde{E}_j + (2k + 1) \tilde{E}_{2k+1} + (4k + 2) \tilde{E}_{2k+2}, \\ \sigma^*(R_1) &= R'_1 + \sum_{j=1}^k 2j \tilde{E}_j + (2k + 1) \tilde{E}_{2k+1} + (4k + 2) \tilde{E}_{2k+2}. \end{aligned} \tag{17}$$

Чтобы описать разрешение особой точки $q = g^{-1}(p) \cap \widetilde{W}''_{1,1}$ поверхности $\widetilde{W}''_{1,1}$, рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\nu} & \widetilde{W}''_{1,1} \\ \tilde{g}_1 \downarrow & & \downarrow g_1 \\ Z & \xrightarrow{\sigma} & U_{1,1} \end{array} \tag{18}$$

в которой $Y = Z \times_{U_1} \widetilde{W}_{1,1}''$ является нормализацией расслоенного произведения над $U_{1,1}$ поверхностей Z и $\widetilde{W}_{1,1}''$, а отображения ν и \tilde{g}_1 – это проекции на сомножители. Имеем $\deg \tilde{g}_1 = 2$, так как $\deg g_{1|\widetilde{W}_{1,1}''} = 2$ и $\deg \sigma = 1$. Отметим также, что кривая ветвления (внизу) отображения \tilde{g}_1 содержится в $\sigma^{-1}(C_1)$.

Из (16) следует, что в случае, когда $n = 2k$, двулистное накрытие $\tilde{g}_1: Y \rightarrow Z$ разветвлено только в кривых $C'_{1,+}$ и $C'_{1,-}$, так как $g_{1|\widetilde{W}_{1,1}''}$ разветвлено в C_1 и кратности, с которыми кривые \tilde{E}_j входят в дивизор $\sigma^*(C_1)$, четны. Следовательно, поверхность Y неособа, так как поверхность Z и кривая ветвления накрытия \tilde{g}_1 неособы. Следовательно, $\nu: Y \rightarrow \widetilde{W}_{1,1}''$ является разрешением особой точки $q = g^{-1}(p) \cap \widetilde{W}_{1,1}''$ поверхности $\widetilde{W}_{1,1}''$, лежащей над особой точкой p кривой B f -типа $A_{2k,3}$, т.е. мы можем считать, что Y – открытое подмножество в X и $\nu: Y \rightarrow \widetilde{W}_{1,1}''$ – ограничение разрешения особенностей $\nu: X \rightarrow \tilde{X}$ на $Y = \nu^{-1}(\widetilde{W}_{1,1}'') \subset X$.

Легко видеть, что $E_k = \tilde{g}_1^{-1}(\tilde{E}_k)$ является неприводимой рациональной кривой и $(E_k, E_k)_Y = -2$, так как $\tilde{g}_{1|E_k}: E_k \rightarrow \tilde{E}_k$ является двулистным накрытием, разветвленным в $\tilde{E}_k \cap (C_{1,+} \cup C_{1,-})$, и $(\tilde{E}_k, \tilde{E}_k)_Z = -1$. При $j = 1, \dots, k-1$ прообразы $\tilde{g}_1^{-1}(\tilde{E}_j)$ являются несвязными объединениями двух рациональных кривых, $\tilde{g}_1^{-1}(\tilde{E}_j) = E_{j,1} \cup E_{j,2}$, и

$$E_{1,1}, \dots, E_{k-1,1}, E_k, E_{k-1,2}, \dots, E_{1,2}$$

является цепью, состоящей из (-2) -кривых. Для особой точки p кривой B f -типа $A_{2k,3}$ обозначим

$$E_p := kE_k + \sum_{j=1}^{k-1} j(E_{j,1} + E_{j,2}).$$

Легко проверить, что

$$(E_p, E_p)_X = -2k. \quad (19)$$

Из (14), (16) и (18) следует, что в случае $n = 2k$ (в случае, когда p – особая точка кривой B f -типа $A_{2k,3}$) дивизор $h_1^{-1}(R_1)$ в окрестности $Y = \nu^{-1}(\widetilde{W}_{1,1}'') \subset X$ – это

$$h^*(R_1) = \bar{R} + \bar{C}_1 + 2E_p, \quad (20)$$

$$(\bar{R}, \bar{C}_1)_Y = 0, \quad (\bar{R}, E_p)_X = (\bar{C}_1, E_p)_X = 2k. \quad (21)$$

Как и в случае $n = 2k$, из (17) следует, что в случае, когда $n = 2k + 1$, двулистное накрытие $\tilde{g}_1: Y \rightarrow Z$ разветвлено только в C'_1 и \tilde{E}_{k+1} , так как накрытие $g_{1|\widetilde{W}_{1,1}''}$ разветвлено в C_1 и кратности, с которыми кривые \tilde{E}_j входят в дивизор $\sigma^*(C_1)$, четны, за исключением кратности кривой \tilde{E}_{k+1} . Поэтому поверхность Y неособа, так как поверхность Z и кривая ветвления накрытия \tilde{g}_1 неособы. Следовательно, $\nu: Y \rightarrow \widetilde{W}_{1,1}''$ является (не минимальным) разрешением особой точки $q = g^{-1}(p) \cap \widetilde{W}_{1,1}''$ поверхности $\widetilde{W}_{1,1}''$, лежащей над особой точкой p кривой B типа $A_{2k+1,3}$, т.е. мы можем отождествить Y с окрестностью

в X и $\nu: Y \rightarrow \widetilde{W}_{1,1}''$ – с ограничением разрешения особенностей $\nu: X \rightarrow \widetilde{X}$ на $Y = \nu^{-1}(\widetilde{W}_{1,1}'') \subset X$.

Легко видеть, что $E_{k+2} = \widetilde{g}_1^{-1}(\widetilde{E}_{k+2})$ является неприводимой рациональной кривой и $(E_{k+2}, E_{k+2})_{\widetilde{Y}} = -2$, так как $\widetilde{g}_1|_{E_{k+2}}: E_{k+2} \rightarrow \widetilde{E}_{k+2}$ – двулистное накрытие, разветвленное в $\widetilde{E}_{k+2} \cap (C_1 \cup \widetilde{E}_{k+1})$, кривая $E_{k+1} = \widetilde{g}_1^{-1}(\widetilde{E}_{k+1})$ также является неприводимой рациональной кривой, и при $j = 1, \dots, k$ прообразы $\widetilde{g}_1^{-1}(\widetilde{E}_j)$ – это несвязные объединения двух рациональных кривых, $\widetilde{g}_1^{-1}(\widetilde{E}_j) = E_{j,1} \cup E_{j,2}$, и

$$\begin{aligned} (E_{j,i}, E_{j+1,i})_X &= 1, & i = 1, 2, & 1 \leq j \leq k-1, \\ (E_{j_1,1}, E_{j_2,2})_X &= 0, & 1 \leq j_1, j_2 \leq k, \\ (E_{j,i}, E_{k+1})_X &= 0, & i = 1, 2, & 1 \leq j \leq k, \\ (E_{k,i}, E_{k+2})_X &= 1, & i = 1, 2, \\ (E_k, E_k)_X &= -3, \\ (E_{k+1}, E_{k+1})_X &= -1, \\ (E_{k+2}, E_{k+2})_X &= (E_{j,i}, E_{j,i})_X = -2, & i = 1, 2, & 1 \leq j \leq k-1. \end{aligned} \quad (22)$$

Для особой точки p кривой B f -типа $A_{2k+1,3}$ обозначим

$$E_p := \sum_{j=1}^k j(E_{j,1} + E_{j,2}) + (k+1)E_{k+1} + (2k+1)E_{k+2}.$$

Из (22) следует, что

$$(E_p, E_p)_X = -(2k+1). \quad (23)$$

Применяя (15), (17) и (18), получаем, что в случае $n = 2k+1$, $k \geq 0$ (в случае, когда p – особая точка кривой B f -типа $A_{2k+1,3}$), дивизор $h_1^{-1}(R_1)$ в окрестности $Y = \nu^{-1}(\widetilde{W}_{1,1}'')$ – это

$$h^*(R_1) = \overline{R} + \overline{C}_1 + 2E_p, \quad (24)$$

$$(\overline{R}, \overline{C}_1)_Y = 0, \quad (\overline{R}, E_p)_X = (\overline{C}_1, E_p)_X = 2k+1. \quad (25)$$

2.2.4. *Разрешение особых точек поверхности \widetilde{X} в случае 2).* Напомним, что в случае 2) окрестности $U_{i,1}$ и $U_{i,2}$ неособы, локально в точке $p \in V$ кривая ветвления B состоит из двух гладких компонент B_1 и B_2 , $B_1 \neq B_2$, где B_1 – это кривая ветвления ограничения накрытия f_i на окрестность $U_{i,1}$, а B_2 – это кривая ветвления ограничения накрытия f_i на окрестность $U_{i,2}$. Пересечения $R_i \cap f_i^{-1}(V) \subset U_{i,1} \cup U_{i,2}$ и $R_{i,j} = R_i \cap U_{i,j}$, $j = 1, 2$, являются гладкими кривыми, кривая B в особой точке p имеет тип сингулярности A_{2k-1} , где $k = (B_1, B_2)_p$ – индекс пересечения ростков B_1 и B_2 в точке p . Для $1 \leq i, j \leq 2$ ростки $C_{i,j} = C_i \cap U_{i,j}$ имеют особую точку сингулярного типа A_{k-1} и $(R_{i,j}, C_{i,j})_{f_i^{-1}(p) \cap U_{i,j}} = k$.

Как и в случае 1), легко видеть, что \widetilde{W}_{j_1, j_2} при $j_i > 2$ и $\widetilde{W}_{1,1}$, $\widetilde{W}_{2,2}$ – неособые поверхности, а для $j = 1, 2$ окрестности $\widetilde{W}_{j,j} = \widetilde{W}_{j,j,+} \sqcup \widetilde{W}_{j,j,-}$ являются

несвязными объединениями неособых поверхностей и

$$\tilde{R} \cap g_{1,2}^{-1}(V) \subset \tilde{W}_{1,1} \cup \tilde{W}_{2,2}, \quad \tilde{C}_i \cap (\tilde{W}_{1,1} \cup \tilde{W}_{2,2}) = \emptyset.$$

Двулистное накрытие $g_{1|\tilde{W}_{1,2}} : \tilde{W}_{1,2} \rightarrow U_{1,1}$ разветвлено (внизу) в $C_{1,1}$ и его кривая ветвления (вверху) – это $\tilde{C}_2 \cap \tilde{W}_{1,2}$. Следовательно, $\tilde{W}_{1,2}$ имеет в точке $g^{-1}(p) \cap \tilde{W}_{1,2}$ особенность типа A_{2k-1} . Аналогично двулистное накрытие $g_{1|\tilde{W}_{2,1}} : \tilde{W}_{2,1} \rightarrow U_{1,2}$ разветвлено (внизу) в $C_{1,2}$ и его кривая ветвления (вверху) – это $\tilde{C}_2 \cap \tilde{W}_{2,1}$. Поэтому $\tilde{W}_{1,2}$ также имеет в точке $g_{1,2}^{-1}(p) \cap \tilde{W}_{2,1}$ особенность типа A_{2k-1} .

В результате в случае 2) (т.е. в случае, когда p – особая точка кривой B f -типа $A_{k,2}$) получаем, что в окрестности $(g_1 \circ \nu)^{-1}(V)$

$$h_1^*(R_1) = \bar{R} + \bar{C}_1 + E_p,$$

где E_p – дивизор, носитель которого содержится в $\nu^{-1}(g_{1,2}^{-1}(p))$. Отметим, что

$$(\bar{R}, \bar{C}_1)_X = (\bar{R}, E_p)_X = 0, \quad (26)$$

так как $\tilde{R} \cap (\tilde{W}_{1,2} \cup \tilde{W}_{2,1}) = \emptyset$.

2.2.5. Пусть $A_{2k+1,3}$, $k \geq 0$, – подмножество в $\text{Sing } B$, состоящее из точек f -типа $A_{2k+1,3}$, $A_{2k,3}$, $k \geq 1$, – подмножество в $\text{Sing } B$, состоящее из точек f -типа $A_{2k,3}$, и $A_{k,2}$, $k \geq 1$, – подмножество в $\text{Sing } B$, состоящее из точек f -типа $A_{k,2}$. Обозначим

$$E_{A_{2k+1,3}} = \sum_{k \geq 0} \sum_{p \in A_{2k+1,3}} E_p, \quad E_{A_{2k,3}} = \sum_{k \geq 0} \sum_{p \in A_{2k,3}} E_p, \quad E_{A_{k,2}} = \sum_{k \geq 0} \sum_{p \in A_{k,2}} E_p.$$

Из (19), (21), (23), (25) и (26) следует, что

$$(\bar{R}, E_{A_{2k+1,3}} + E_{A_{2k,3}})_X = (\bar{C}_1, E_{A_{2k+1,3}} + E_{A_{2k,3}})_X = \mathbf{c}, \quad (27)$$

$$(E_{A_{2k+1,3}} + E_{A_{2k,3}}, E_{A_{2k+1,3}} + E_{A_{2k,3}})_X = -\mathbf{c}, \quad (28)$$

$$(\bar{R}, \bar{C}_1)_X = (\bar{R}, E_{A_{k,2}})_X = 0. \quad (29)$$

Собирая вместе результаты из пп. 2.2.1–2.2.4, получаем

$$h_1^*(R_1) = \bar{R} + \bar{C}_1 + 2E_{A_{2k+1,3}} + 2E_{A_{2k,3}} + E_{A_{k,2}}.$$

Обозначим

$$D = \bar{R} + E_{A_{2k+1,3}} + E_{A_{2k,3}}, \quad D_1 = \bar{C}_1 + E_{A_{2k+1,3}} + E_{A_{2k,3}} + E_{A_{k,2}}.$$

Отметим, что $h_1^*(R_1) = D + D_1$.

ЛЕММА 10. *Имеем*

$$(D, D)_X = 2(3d + g - 1 + \mathfrak{s}) - \mathbf{c}, \quad (30)$$

$$(D_1, D_1)_X = (N_2 - 2)(3d + g - 1 + \mathfrak{s}) - \mathbf{c}, \quad (31)$$

$$(D, D_1)_X = \mathbf{c}. \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (27) и (29) следует, что

$$(D, D_1)_X = (\bar{R} + E_{\mathcal{A}_{2k+1,3}} + E_{\mathcal{A}_{2k,3}}, \bar{C}_1 + E_{\mathcal{A}_{2k+1,3}} + E_{\mathcal{A}_{2k,3}} + E_{\mathcal{A}_{k,2}})_X = \mathfrak{c}.$$

Применяя леммы 6 и 9, получаем

$$(h_1^*(R_1), D)_X = (h_1^*(R_1), \bar{R})_X = \deg h_{1|\bar{R}}(R_1, R_1)_{S_1} = 2(3d + g - 1 + \mathfrak{s}).$$

С другой стороны, из (27)–(28) следует

$$\begin{aligned} (h_1^*(R_1), D)_X &= (\bar{R} + \bar{C}_1 + 2E_{\mathcal{A}_{2k+1,3}} + 2E_{\mathcal{A}_{2k,3}} + E_{\mathcal{A}_{k,2}}, \bar{R} + E_{\mathcal{A}_{2k+1,3}} + E_{\mathcal{A}_{2k,3}})_X \\ &= (\bar{R}, \bar{R})_X + 2\mathfrak{c}, \end{aligned}$$

и поэтому $(\bar{R}, \bar{R})_X = 2(3d + g - 1 + \mathfrak{s}) - 2\mathfrak{c}$, а из (27) и (28) следует

$$\begin{aligned} (D, D)_X &= (\bar{R} + E_{\mathcal{A}_{2k+1,3}} + E_{\mathcal{A}_{2k,3}}, \bar{R} + E_{\mathcal{A}_{2k+1,3}} + E_{\mathcal{A}_{2k,3}})_X \\ &= (\bar{R}, \bar{R})_X + 2(\bar{R}, E_{\mathcal{A}_{2k+1,3}} + E_{\mathcal{A}_{2k,3}})_X \\ &\quad + (E_{\mathcal{A}_{2k+1,3}} + E_{\mathcal{A}_{2k,3}}, E_{\mathcal{A}_{2k+1,3}} + E_{\mathcal{A}_{2k,3}})_X \\ &= (2(3d + g - 1 + \mathfrak{s}) - 2\mathfrak{c}) + 2\mathfrak{c} - \mathfrak{c} = 2(3d + g - 1 + \mathfrak{s}) - \mathfrak{c}. \end{aligned}$$

Из леммы 6 следует, что

$$(h_1^*(R_1), h_1^*(R_1))_X = \deg h_1(R_1, R_1)_{S_1} = N_2(3d + g - 1 + \mathfrak{s}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (D_1, D_1)_X &= (h_1^*(R_1), h_1^*(R_1))_X - 2(h_1^*(R_1), D)_X + (D, D)_X \\ &= (N_2 - 2)(3d + g - 1 + \mathfrak{s}), \end{aligned}$$

так как $D_1 = h_1^*(R_1) - D$.

2.3. Конец доказательства теоремы. Следующее предложение 3 (аналог теоремы 1 в [5]) играет важнейшую роль в доказательстве приведенной выше теоремы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $f_i: S_i \rightarrow \mathbb{P}^2$, $i = 1, 2$, – два почти общих накрытия проективной плоскости, разветвленные в кривой $B \subset \mathbb{P}^2$, $\deg f_i = N_i$. Если $\text{pas}(f_1) = \text{pas}(f_2)$, но f_1 и f_2 не эквивалентны, то

$$N_i \leq \frac{4(3d + g - 1 + \mathfrak{s})}{2(3d + g - 1 + \mathfrak{s}) - \mathfrak{c}}. \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 7 следует, что $(D, D)_X > 0$. Поэтому из теоремы Ходжа об индексе, примененной к дивизорам D и D_1 , и из леммы 10 следует, что

$$\begin{aligned} &\left| \begin{array}{cc} (D, D)_X & (D, D_1)_X \\ (D_1, D)_X & (D_1, D_1)_X \end{array} \right| \\ &= \left| \begin{array}{cc} 2(3d + g - 1 + \mathfrak{s}) - \mathfrak{c} & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{c} & (N_2 - 2)(3d + g - 1 + \mathfrak{s}) - \mathfrak{c} \end{array} \right| \leq 0, \end{aligned}$$

т.е.

$$2(N_2 - 2)(3d + g - 1 + \mathfrak{s})^2 - N_2(3d + g - 1 + \mathfrak{s})\mathfrak{c} \leq 0.$$

Следовательно,

$$N_2[2(3d + g - 1 + \mathfrak{s}) - \mathfrak{c}] \leq 4(3d + g - 1 + \mathfrak{s}).$$

Аналогично (считая, что f_1 – это f_2 , а f_2 – это f_1) имеем неравенство

$$N_1[2(3d + g - 1 + \mathfrak{s}) - \mathfrak{c}] \leq 4(3d + g - 1 + \mathfrak{s}).$$

Таким образом, если $f_1: S_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ и $f_2: S_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – неэквивалентные почти общие накрытия, разветвленные в одной и той же кривой B , и $\text{pas}(f_1) = \text{pas}(f_2)$, то их степени удовлетворяют неравенствам (33).

Предложение доказано.

Для завершения доказательства теоремы осталось применить аргументы, использованные в [11].

ЛЕММА 11. *Если для поверхности S выполнено неравенство Богомолова–Мияоки–Яу $K_S^2 \leq 3e(S)$, то*

$$\mathfrak{c} \leq 3d + \frac{5}{3}(g - 1 + \mathfrak{s}). \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 1 имеем неравенство

$$9N - 9d + g - 1 + \mathfrak{s} \leq 3(3N + 2(g - 1 + \mathfrak{s}) - \mathfrak{c}),$$

которое эквивалентно неравенству (34).

Лемма доказана.

Следовательно, в случае, когда $K_S^2 \leq 3e(S)$, мы имеем неравенство

$$\frac{4(3d + g - 1 + \mathfrak{s})}{2(3d + g - 1 + \mathfrak{s}) - \mathfrak{c}} \leq 4 + \frac{8(g - 1 + \mathfrak{s})}{9d + (g - 1 + \mathfrak{s})} < 12. \quad (35)$$

ЛЕММА 12. *Если для поверхности S не выполнено неравенство Богомолова–Мияоки–Яу $K_S^2 \leq 3e(S)$, то*

$$\mathfrak{c} \leq \frac{3}{2}(3d + g - 1 + \mathfrak{s}). \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если для поверхности S не выполнено неравенство Богомолова–Мияоки–Яу, то S является иррегулярной линейчатой поверхностью (см., например, [1]) и, следовательно, $K_S^2 \leq 2e(S)$. Применяя снова предложение 1, получим неравенство (36).

Лемма доказана.

Следовательно, в случае, когда для поверхности S не выполнено неравенство Богомолова–Мияоки–Яу, мы имеем неравенство

$$\frac{4(3d + g - 1 + \mathfrak{s})}{2(3d + g - 1 + \mathfrak{s}) - \mathfrak{c}} \leq 8. \quad (37)$$

Теперь наша теорема следует из неравенств (33), (35), (37) и замечания 1.

Список литературы

- [1] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), 4, Springer-Verlag, Berlin, 1984, x+304 pp.
- [2] O. Chisini, “Sulla identita birazionale delle funzioni algebriche di due variabili dotate di una medesima curva di diramazione”, *Ist. Lombardo Sci. Lett. Cl. Sci. Mat. Nat. Rend.* (3), **8(77)** (1944), 339–356.
- [3] C. Ciliberto, F. Flamini, “On the branch curve of a generic projection of a surface to a plane”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **363**:7 (2011), 3457–3471.
- [4] Vik. S. Kulikov, “A remark on classical Pluecker’s formulae”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6), **25**:5 (2016), 959–967.
- [5] Вик. С. Куликов, “О гипотезе Кизини”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63**:6 (1999), 83–116; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, “On Chisini’s conjecture”, *Izv. Math.*, **63**:6 (1999), 1139–1170.
- [6] Вик. С. Куликов, “О гипотезе Кизини. II”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:5 (2008), 63–76; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, “On Chisini’s conjecture. II”, *Izv. Math.*, **72**:5 (2008), 901–913.
- [7] Вик. С. Куликов, “Обобщенная гипотеза Кизини”, *Теория чисел, алгебра и алгебраическая геометрия*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Игоря Ростиславовича Шафаревича, Труды МИАН, **241**, Наука, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2003, 122–131; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, “Generalized Chisini’s Conjecture”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **241** (2003), 110–119.
- [8] V. S. Kulikov, “On the almost generic covers of the projective plane”, *Pure Appl. Math. Q.*, **16**:4 (2020), 1067–1082.
- [9] Вик. С. Куликов, “О жестких ростках конечных морфизмов гладких поверхностей”, *Матем. сб.*, **211**:10 (2020), 3–31; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, “On rigid germs of finite morphisms of smooth surfaces”, *Sb. Math.*, **211**:10 (2020), 1354–1381.
- [10] Вик. С. Куликов, “Жесткие ростки конечных морфизмов гладких поверхностей и рациональные пары Белого”, *Матем. сб.*, **212**:9 (2021), 119–145; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, “Rigid germs of finite morphisms of smooth surfaces and rational Belyi pairs”, *Sb. Math.*, **212**:9 (2021), 1304–1328.
- [11] С. Ю. Немировский, “К теореме Куликова о гипотезе Кизини”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:1 (2001), 77–80; англ. пер.: S. Yu. Nemirovski, “Kulikov’s theorem on the Chisini conjecture”, *Izv. Math.*, **65**:1 (2001), 71–74.

Виктор Степанович Куликов
(Viktor S. Kulikov)

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: kulikov@mi-ras.ru

Поступила в редакцию
17.02.2021 и 30.06.2021