A. E. Gutman, Locally one-dimensional $K$-spaces,
*Dokl. Akad. Nauk*, 1997, Volume 353, Number 5, 590–591

*ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1997, том 353, № 5, с. 590–591*

## МАТЕМАТИКА

*УДК 517.98*

# ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНЫЕ *K*-ПРОСТРАНСТВА

**© 1997 г. А. Е. Гутман**

Представлено академиком Ю.Г. Решетняком 30.01.95 г.

Поступило 21.03.95 г.

Всюду в сообщении $E$ – произвольное расширенное $K$-пространство, $E^+$ – совокупность положительных элементов $E$, $Q$ – стоуновский компакт базы $E$ и $\mathrm{Clop}(Q)$ – булева алгебра всех открыто-замкнутых подмножеств $Q$. Для произвольной булевой алгебры символы 0 и 1 обозначают ее наименьший и наибольший элементы, называемые соответственно нулем и единицей. Элемент $e \in E^+$ назовем локально-постоянным относительно $f \in E^+$, если $e = \bigvee_{\xi \in \Xi} \lambda_\xi \pi_\xi f$ для некоторого числового семейства $(\lambda_\xi)_{\xi \in \Xi}$ и семейства $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ попарно дизъюнктных порядковых проекторов. Расширенное $K$-пространство $E$ называется локально-одномерным, если оно удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:

1) все элементы $E^+$ являются локально-постоянными относительно некоторой порядковой единицы $E$,

2) все элементы $E^+$ являются локально-постоянными относительно любой порядковой единицы $E$,

3) для любой функции $e \in C_\infty(Q)$ существует разбиение единицы $(U_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в алгебре $\mathrm{Clop}(Q)$ такое, что функция $e$ постоянна на каждом из множеств $U_\xi$.

Линейный оператор $T: E \to E$ называется нерасширяющим или сохраняющим компоненты, если для любых $e, f \in E$ из $|e| \wedge |f| = 0$ следует $|Te| \wedge |f| = 0$.

Следующая теорема объединяет результаты, полученные Ю.А. Абрамовичем, А.И. Векслером и А.В. Колдуновым [1; теорема 2.1], а также П.Т.Н. Макполином и А.В. Викстедом [2, теорема 3.2].

Теорема 1. *Пусть $E$ – расширенное $K$-пространство. Каждый нерасширяющий оператор $T: E \to E$ регулярен тогда и только тогда, когда $K$-пространство $E$ локально-одномерно.*

Во избежание недоразумений при чтении статей [1, 2] следует иметь в виду следующие обстоятельства. Во-первых, несмотря на то что в формулировке теоремы 2.1 из [1] фигурирует произвольное недискретное $K$-пространство, доказательство этой теоремы приведено лишь для локально-одномерных $K$-пространств. Во-вторых, пример недискретного локально-одномерного $K$-пространства, приведенный в [2], содержит ошибку, о чем А.В. Викстед недавно сообщил в статье [3]. Таким образом, вопрос о том, всякое ли локально-одномерное $K$-пространство должно быть дискретным (т.е. иметь атомную базу), по всей видимости, до сих пор оставался открытым.

Понятие локально-одномерного $K$-пространства имеет следующую булевозначную интерпретацию. (За разъяснением основных понятий булевозначного анализа мы отсылаем читателя ко второй части монографии [4].) Пусть $B$ – полная булева алгебра, $\mathcal{R}$ – поле вещественных чисел внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $\mathbb{R}^\wedge$ – каноническое погружение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{V}^{(B)}$.

Теорема 2. *Равенство $\mathbb{R}^\wedge = \mathcal{R}$ имеет место тогда и только тогда, когда спуск $\mathcal{R}$ является локально-одномерным $K$-пространством.*

Из личных бесед с коллегами автору настоящего сообщения известно, что среди специалистов в области булевозначного анализа весьма популярна гипотеза об атомности всех булевых алгебр $B$, обеспечивающих равенство $\mathbb{R}^\wedge = \mathcal{R}$ в $\mathbb{V}^{(B)}$. Таким образом, вопрос о связи между дискретными и локально-одномерными $K$-пространствами имеет довольно широкую область приложений, по крайней мере включающую теорию векторных решеток, теорию положительных операторов и булевозначный анализ.

После некоторого предварительного обсуждения основных понятий мы приведем пример безатомного локально-одномерного $K$-пространства. В силу теоремы 1 мы тем самым получим безатомное расширенное $K$-пространство $E$, для которого все нерасширяющие операторы $T: E \to E$ регулярны, а в силу теоремы 2 мы будем иметь безатомную полную булеву алгебру $B$, для которой $\mathbb{R}^\wedge = \mathcal{R}$ в $\mathbb{V}^{(B)}$.

Напомним, что $\sigma$-полная алгебра $B$ называется $\sigma$-дистрибутивной, если она удовлетворяет

*Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской Академии наук, Новосибирск*

одному из следующих эквивалентных условий (см. [5]: 19.1):

1) $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}}\bigvee_{m\in\mathbb{N}} b_m^n = \bigvee_{m\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} b_{m(n)}^n$ для любых $b_m^n \in$ $\in B, n, m \in \mathbb{N}$;

2) $\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\bigwedge_{m\in\mathbb{N}} b_m^n = \bigwedge_{m\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\bigvee_{n\in\mathbb{N}} b_{m(n)}^n$ для любых $b_m^n \in$ $\in B, n, m \in \mathbb{N}$;

3) для любой последовательности $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $B$ выполнено $\bigvee_{\sigma\in\{1,-1\}^{\mathbb{N}}}\bigwedge_{n\in\mathbb{N}}\sigma(n)b_n = 1$, где $1b_n = b_n$ и $(-1) = 1\backslash b_n$.

Теорема 3. *Расширенное $K$-пространство локально-одномерно тогда и только тогда, когда его база $\sigma$-дистрибутивна.*

Таким образом, вопрос о существовании безатомного локально-одномерного $K$-пространства сводится к существованию безатомной $\sigma$-дистрибутивной полной булевой алгебры. Построению такой алгебры посвящена оставшаяся часть этой заметки.

Булева алгебра $B$ называется $\sigma$-индуктивной, если любая убывающая последовательность ненулевых элементов $B$ имеет ненулевую нижнюю границу. Подалгебра $B_0$ булевой алгебры $B$ называется плотной или массивной, если для любого ненулевого элемента $b \in B$ существует ненулевой элемент $b_0 \in B_0$ такой, что $b_0 \le b$.

Лемма 1. *Если $\sigma$-полная булева алгебра содержит $\sigma$-индуктивную плотную подалгебру, то она $\sigma$-дистрибутивна.*

Как известно, для любой булевой алгебры $B$ существует полная булева алгебра $\bar{B}$, содержащая $B$ как плотную подалгебру (см. [5, § 35]). Такая алгебра $\bar{B}$ единственна с точностью до изоморфизма и называется пополнением алгебры $B$. Очевидно, пополнение безатомной алгебры безатомно. Кроме того, в силу леммы 4 пополнение $\sigma$-индуктивной алгебры $\sigma$-дистрибутивно. Поэтому для доказательства существования безатомной $\sigma$-дистрибутивной полной булевой алгебры достаточно предъявить произвольную безатомную $\sigma$-индуктивную булеву алгебру. Примеры таких алгебр безусловно известны. Для полноты картины мы приведем здесь одну из наиболее простых конструкций.

Пример. Пусть $B$ – булева алгебра всех подмножеств $\mathbb{N}$, а $I$ – идеал $B$, состоящий из всех конечных подмножеств $\mathbb{N}$. Тогда фактор-алгебра $B/I$ (см. [5, § 10]) безатомна и $\sigma$-индуктивна.

Автор благодарен Э.Ю. Емельянову, С.С. Кутателадзе и С.А. Малюгину за внимание к работе, а также Ю.А. Абрамовичу за предоставленную им информацию, способствовавшую успешному решению проблемы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамович Ю.А., Векслер А.И., Колдунов А.В.* // Линейные операторы и их приложения. Межвуз. сб. науч. тр. Л.: ЛГПИ, 1981. С. 13–34.
2. *McPolin P.T.N., Wickstead A.W.* // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1985. V. 97. № 3. P. 481–487.
3. *Abramovich Y.A., Wickstead A.W.* // Quart. J. Math. Oxford. 1993. V. 44. № 175. P. 257–270.
4. *Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С.* Нестандартные методы анализа. Новосибирск: Наука, 1990.
5. *Сикорский Р.* Булевы алгебры. М.: Мир, 1969.