

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Букжалёв, О применении метода дифференциальных неравенств к уравнениям параболического типа, правая часть которых растёт по пространственному градиенту более чем квадратично, *Дифференц. уравнения*, 2005, том 41, номер 3, 356–365

<https://www.mathnet.ru/de11243>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

25 апреля 2025 г., 02:45:01



УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ К УРАВНЕНИЯМ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, ПРАВAYA ЧАСТЬ КОТОРЫХ РАСТЕТ ПО ПРОСТРАНСТВЕННОМУ ГРАДИЕНТУ БОЛЕЕ ЧЕМ КВАДРАТИЧНО

© 2005 г. Е. Е. Букжалёв

1. МОДИФИКАЦИЯ ТЕОРЕМЫ АМАННА О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В настоящей работе предлагается некоторая модификация метода дифференциальных неравенств (см. [1]) для дальнейшего его применения к сингулярно возмущенным дифференциальным уравнениям параболического типа.

Рассмотрим задачу

$$Ly = y_t - ky_{xx} + f(y_x, y, x, t) = 0, \quad (1)$$

$$y(x, t + T) = y(x, t), \quad (x, t) \in \Omega = (a, b) \times \mathbb{R}, \quad y(a, t) = y^0(t), \quad y(b, t) = y^1(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $k = \text{const} > 0$, f , y^0 и y^1 — T -периодические по t функции.

Определение 1. Нижним и верхним (барьерными) решениями задачи (1) называются соответственно T -периодические по t функции $\alpha = \alpha(x, t)$ и $\beta = \beta(x, t)$, принадлежащие $C^2(\bar{\Omega})$ и такие, что: 1) $\alpha(a, t) < y^0(t) < \beta(a, t)$, $\alpha(b, t) < y^1(t) < \beta(b, t)$; 2) $L\alpha(x, t) = -\psi_\alpha(x, t) < 0$, $L\beta(x, t) = +\psi_\beta(x, t) > 0$, $(x, t) \in \Omega$.

Введем обозначения: $B = (\alpha, \beta) \times \Omega$, $B^M = (\alpha_x - M, \beta_x + M) \times B$, $B^* = B^\infty = \mathbb{R} \times B$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f(z, y, x, t)$ принадлежит классу A в области B ($f \in A(B)$), если $f(z, y, x, t) = O(z^2)$ при $|z| \rightarrow \infty$, $(y, x, t) \in \bar{B}$.

В работе [2] доказана теорема (точнее, ее более общий вариант, в частности, в качестве x взята точка n -мерного пространства).

Теорема 1. Пусть существуют нижнее $\alpha(x, t)$ и верхнее $\beta(x, t)$ решения задачи (1), образующие упорядоченную на $\bar{\Omega}$ пару (α, β) . Далее, пусть функция

$$f(z, y, x, t) \in C^1(\bar{B}^*) \cap A(B), \quad y^0(t), y^1(t) \in C^2(\mathbb{R}).$$

Тогда существует решение задачи (1) такое, что $\alpha(x, t) \leq y(x, t) \leq \beta(x, t)$.

Наша цель — распространить результаты теоремы 1 на некоторый класс функций f , допускающий более чем квадратичный рост по первому аргументу.

Пусть

$$\|\beta - \alpha\|_{C(\bar{\Omega})} < l, \quad \|\psi_\alpha\|_{C(\bar{\Omega})} < \Delta_\alpha, \quad \|\psi_\beta\|_{C(\bar{\Omega})} < \Delta_\beta, \quad \|f_z\|_{C(\bar{B}^M)} < f_1(M), \quad \|f_y\|_{C(\bar{B}^M)} < f_2(M).$$

Определение 3. Будем говорить, что функция $f(z, y, x, t)$ принадлежит классу $A1$ в области B^M ($f \in A1(B^M)$), если существует положительное число M такое, что 1) $M > 4l/(b - a)$; 2) $M > 2pf_1 + [4(pf_1)^2 + 4p(f_2l + \Delta_\alpha + \Delta_\beta) + 2p^2]^{1/2}$, где $p = l/k$.

Теорема 2. Пусть выполнены требования теоремы 1 с тем лишь изменением, что функция $f(z, y, x, t) \in C^1(\bar{B}^M) \cap A1(B^M)$. Тогда существует решение задачи (1) такое, что

$$\alpha(x, t) \leq y(x, t) \leq \beta(x, t), \quad \alpha_x - M < y_x < \beta_x + M.$$

Лемма 1. При выполнении условий теоремы 2 справедливо утверждение $|\beta_x - \alpha_x| < M$.

Доказательство. Введем обозначение $u(x, t) = \beta(x, t) - \alpha(x, t)$, $0 \leq u \leq l$. Требуется показать, что $-M < u_x < M$.

Остановимся на верхнем неравенстве (нижнее рассматривается аналогично). Сперва докажем, что существует по крайней мере одна точка $(x, t) = P_1(x_1, t_1)$, в которой $u_x \leq M$. Предположим противное, т.е. что $u_x > M$ всюду на $\bar{\Omega}$, и рассмотрим некоторую прямую $t = \text{const}$, $x = \xi$, $\xi \in [a, b]$. Оценим разность

$$u|_{\xi=a}^{\xi=b} > M(b-a) > \frac{4l}{b-a}(b-a) = 4l.$$

Последнее противоречит тому, что $u \in [0, l]$, а значит, искомая точка P_1 действительно существует.

Предположим теперь, что $u_x(P_1) = M$ (иначе лемма доказана). Далее, очевидно, что либо $x_1 - a \geq (a-b)/2$, либо $b - x_1 \geq (a-b)/2$.

Пусть $b - x_1 \geq (a-b)/2$ (первый вариант рассматривается аналогично).

Рассмотрим кривую $t = t(x)$, определяемую из соотношений

$$dt/dx = u_t/u_x, \quad (x, t) \in \bar{K}_{P_1}^{R_0}, \quad t(x_1) = t_1, \quad (2)$$

где $K_{P_1}^{R_0}$ – максимальный из открытых кругов (имеющий радиус R_0) с центром в точке P_1 , принадлежащих области Ω , в которых всюду $u_x \geq M/2$. Его существование является прямым следствием непрерывности u_x .

В силу непрерывности и ограниченности правой части уравнения (2) в $\bar{K}_{P_1}^{R_0}$ существует решение $t = t(x)$ задачи (2), достигающее границы круга $K_{P_1}^{R_0}$ в некоторой точке $(x, t) = N_1(a_1, b_1)$ такой, что $a_1 > x_1$. Очевидно, что $u_x(N_1) \geq M/2$.

Если $u_x(N_1) > M/2$, то рассмотрим задачу

$$dt/dx = u_t/u_x, \quad (x, t) \in \bar{K}_{N_1}^{R_1}, \quad t(a_1) = b_1,$$

где $K_{N_1}^{R_1}$ – максимальный из открытых кругов с центром в N_1 , принадлежащих области Ω , в которых $u_x \geq M/2$.

Вновь в силу непрерывности и ограниченности u_t/u_x получаем утверждение о существовании точки $N_2 = (a_2, b_2)$, $a_2 > a_1$, – пересечения решения $t = t(x)$ с границей круга $K_{N_1}^{R_1}$.

Повторяя (при необходимости бесконечно много раз) указанную процедуру, получаем точку $N_3(a_3, b_3)$, затем $N_4(a_4, b_4)$ и т.д. Проанализируем три возможных случая:

1) очередная точка N_i (которую обозначим через $(x, t) = P_2(x_2, t_2)$) достигнет границы области Ω и, таким образом, указанный процесс оборвется;

2) в очередной точке N_i (вновь обозначаемой через $(x, t) = P_2(x_2, t_2)$) значение u_x станет равным $M/2$, так что указанный процесс также оборвется;

3) ни одна из точек N_i не достигнет границы области Ω и ни в одной из них значение u_x не станет равным $M/2$, так что мы получим некоторую бесконечную последовательность точек $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Покажем, что случай 1) не реализуется. Предположим противное. Тогда на отрезке $[x_1, b]$ существует решение задачи

$$dt/dx = u_t/u_x, \quad t(x_1) = t_1. \quad (3)$$

Оценим $u(P_2)$. Используя представление

$$u(P_2) = u(P_1) + \int_{L_{12}} u_x dx + u_t dt,$$

где L_{12} – интегральная кривая задачи (3), соединяющая точки P_1 и P_2 , имеем

$$u(P_2) \geq \int_{L_{12}} u_x dx + u_t dt = \int_{x_1}^b \left(u_x + \frac{u_t^2}{u_x} \right) dx \geq \int_{x_1}^b u_x dx > \frac{M}{2}(b - x_1) > \frac{4l}{2(b-a)} \frac{a-b}{2} = l.$$

Таким образом, получаем, что $u(P_2) > l$. Но последнее невозможно, а следовательно, невозможно и случай 1).

Обратимся теперь к случаю 3) и докажем сходимость последовательности $\{N_i\}$, эквивалентной в свою очередь сходимости $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$.

Поскольку a_i – возрастающая и ограниченная последовательность, для нее высказанное утверждение очевидно. Обозначим ее предел через x_2 , $x_2 \leq b$. Для доказательства сходимости b_i , объединив все полуинтервалы $[x_1, a_1) \cup [a_1, a_2) \cup [a_2, a_3) \cup \dots$, получим полуинтервал $[x_1, x_2)$. В силу проведенных выше построений можно говорить о существовании решения следующей задачи Коши:

$$dt/dx = u_t/u_x, \quad x \in [x_1, x_2), \quad t(x_1) = t_1.$$

Так как $t = t(x)$ непрерывна и имеет ограниченную производную на $[x_1, x_2)$, то она может быть непрерывно продолжена на весь отрезок $[x_1, x_2]$. Будем обозначать $\|dt/dx\|_{C[x_1, x_2]} = \|u_t/u_x\|_{C[x_1, x_2]}$ через M_{12} . Из определения непрерывности следует, что

$$t_2 \equiv t(x_2) = \lim_{i \rightarrow \infty} t(a_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} b_i.$$

Итак, последовательность $\{N_i\}$ действительно сходится к некоторой точке $(x, t) = P_2(x_2, t_2)$.

Так же, как это было сделано при рассмотрении случая 1), можно показать, что $x_2 \neq b$, а следовательно, существует некоторое $\Delta_0 > 0$, такое, что $x_2 = b - \Delta_0$.

Покажем теперь, что $u_x(P_2) = M/2$. Предположим противное, т.е. $u_x(P_2) = M' > M/2$. Рассмотрим произвольное число M'' , $M/2 < M'' < M'$. В силу равномерной непрерывности u_x в $\bar{\Omega}$ существует δ_0 такое, что $|u_x(M_1) - u_x(M_2)| < M'' - M/2$ при $\rho(M_1, M_2) < \delta_0$.

Далее, используя условие непрерывности u_x и то обстоятельство, что $\lim_{i \rightarrow \infty} N_i = P_2$, устанавливаем существование номера i такого, что $\rho(P_2, N_i) < \delta^*/\sqrt{1 + M_{12}^2}$, $u_x(N_i) > M''$, где $\delta^* = \min(\delta_0, \Delta_0)$. Тогда при $\rho(N', N_i) < \delta_0$, $N' \in \Omega$ имеем

$$u_x(N') = u_x(N_i) + u_x(N') - u_x(N_i) > M'' + M/2 - M'' = M/2,$$

т.е. радиус R_i круга $K_{N_i}^{R_i}$ больше или равен δ^* .

Следовательно, из простых геометрических соображений получаем (см. рисунок), что

$$a_{i+1} - a_i \geq \delta^* \cos \gamma = \delta^* [1/(1 + \operatorname{tg}^2 \gamma)]^{1/2} = \delta^* [1 + M_{12}^2]^{-1/2}.$$

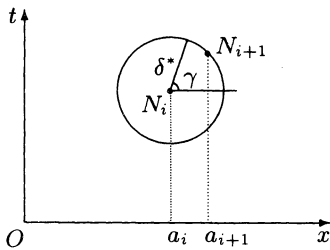


Рисунок. $\operatorname{tg} \gamma = M_{12}$.

Но в то же время $x_2 - a_i < \delta^*/[1 + M_{12}^2]^{1/2}$, а значит, x_2 не может являться пределом последовательности $\{a_i\}$. Полученное противоречие доказывает высказанное утверждение.

Итак, как выясняется, вне зависимости от того, реализуется ли случай 2) или 3), можно говорить о кривой $L_{12} = \{(x, t) | x \in [x_1, x_2], t = t(x)\}$, соединяющей точки $P_1(x_1, t_1)$ и $P_2(x_2, t_2)$ и такой, что $u_x(P_1) = M$, $u_x(P_2) = M/2$.

Так как u_x непрерывна на кривой L_{12} , то, очевидно, найдутся точки $(x, t) = P^1(\xi_1, \eta_1)$ и $(x, t) = P^2(\xi_2, \eta_2)$, принадлежащие кривой L_{12} и такие, что $\xi_2 > \xi_1$, $u_x(P^1) = M$, $u_x(P^2) = M/2$ и $M/2 < u_x < M$ всюду между точками P^1 и P^2 .

Обозначим $u_1 = u(P^1)$ и $u_2 = u(P^2)$ и выразим разность $u_2 - u_1$ через криволинейный интеграл второго рода по кривой l_{12} , являющейся частью кривой L_{12} , соединяющей точки P^1 и P^2 :

$$u_2 - u_1 = \int_{l_{12}} u_x dx + u_t dt = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(u_x + \frac{u_t^2}{u_x} \right) dx > \frac{M}{2}(\xi_2 - \xi_1) + \frac{1}{M} \int_{\xi_1}^{\xi_2} u_t^2 dx.$$

Оценим последнее интегральное слагаемое

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} u_t^2 dx \geq \int_{\xi_1}^{\xi_2} (-2pu_t - p^2) dx, \tag{4}$$

но

$$u_t = \beta_t - \alpha_t = k\beta_{xx} - f(\beta_x, \beta, x, t) + \psi_\beta - k\alpha_{xx} + f(\alpha_x, \alpha, x, t) + \psi_\alpha = ku_{xx} + f(\alpha_x, \alpha, x, t) - f(\beta_x, \beta, x, t) + \psi_\alpha + \psi_\beta$$

(здесь и далее в доказательстве $t = t(x)$), а поэтому из (4) следует неравенство

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} u_t^2 dx \geq -2p \int_{\xi_1}^{\xi_2} (ku_{xx} + f(\alpha_x, \alpha, x, t) - f(\beta_x, \beta, x, t) + \psi_\alpha + \psi_\beta) dx - p^2(\xi_2 - \xi_1). \tag{5}$$

При $x \in [\xi_1, \xi_2]$ из неравенства $|\beta_x - \alpha_x| \leq M$ вытекает принадлежность

$$(\alpha_x, \alpha, x, t), (\beta_x, \beta, x, t) \in \bar{B}^M = [\alpha_x - M, \beta_x + M] \times [\alpha, \beta] \times \bar{\Omega},$$

а значит, $S = (\alpha_x + \theta(\beta_x - \alpha_x), \alpha + \theta(\beta - \alpha), x, t)$, $0 \leq \theta \leq 1$, также принадлежит \bar{B}^M , откуда приходим к выводу, что при всех указанных x

$$|f(\beta_x, \beta, x, t) - f(\alpha_x, \alpha, x, t)| = |f_z(S)(\beta_x - \alpha_x) + f_y(S)(\beta - \alpha)| < f_1 M + f_2 l.$$

Возвращаясь к неравенству (5), имеем

$$\begin{aligned} \int_{\xi_1}^{\xi_2} u_t^2 dx &> 2pk u_x|_{\xi_2}^{\xi_1} - 2p(f_1 M + f_2 l + \Delta_\alpha + \Delta_\beta)(\xi_2 - \xi_1) - p^2(\xi_2 - \xi_1) = \\ &= pkM - (2p(f_1 M + f_2 l + \Delta_\alpha + \Delta_\beta) + p^2)\Delta\xi = lM - 2pf_1 M \Delta\xi - \Delta\Delta\xi, \end{aligned}$$

где $\Delta = 2p(f_2 l + \Delta_\alpha + \Delta_\beta) + p^2$.

Итак, для разности $u_2 - u_1$ окончательно получаем

$$u_2 - u_1 > \frac{M}{2} \Delta\xi + l - 2pf_1 \Delta\xi - \Delta \frac{\Delta\xi}{M} = l + \frac{M^2 - 4pf_1 M - 2\Delta}{2M} \Delta\xi. \tag{6}$$

Используя условие теоремы 2 $M > 2pf_1 + \sqrt{4(pf_1)^2 + 2\Delta}$, легко убедиться в положительности второго слагаемого из (6). Но тогда $u_2 = u_1 + u_2 - u_1 > 0 + l = l$, что противоречит условию $u \leq l$. Данное противоречие опровергает предположение о том, что $u_x(P_1) = M$, и завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы 2. Прежде всего заметим, что аналогично доказательству леммы 1 для любого решения y задачи (1), заключенного между α и β , можно установить следующие априорные (т.е. справедливые при условии существования оцениваемой величины) оценки y_x : $\alpha_x - M < y_x < \beta_x + M$. Для этого в доказательстве леммы следует заменить $\beta \rightarrow y$, ψ_β и $\Delta_\beta \rightarrow 0$ (при обосновании нижнего неравенства) или $\alpha \rightarrow y$, ψ_α и $\Delta_\alpha \rightarrow 0$ (при обосновании верхнего) и принять во внимание, что в силу доказанного выше неравенства $|\beta_x - \alpha_x| < M$ всюду на пути интегрирования от ξ_1 до ξ_2 $(y_x, y, x, t) \in \bar{B}^M$.

Для завершения доказательства теоремы рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \tilde{y}_t - k\tilde{y}_{xx} + h(\tilde{y}_x, \tilde{y}, x, t) &= 0, \quad \tilde{y}(x, t+T) = \tilde{y}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \\ \tilde{y}(a, t) &= y^0(t), \quad \tilde{y}(b, t) = y^1(t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (1^*)$$

где

$$h(z, y, x, t) = \begin{cases} \frac{f(z, y, x, t)}{1 + (z - \beta_x - M)^2 f(z, y, x, t)^2} & \text{при } z \geq \beta_x + M, \\ f(z, y, x, t) & \text{при } \alpha_x - M \leq z \leq \beta_x + M, \\ \frac{f(z, y, x, t)}{1 + (z - \alpha_x + M)^2 f(z, y, x, t)^2} & \text{при } z \leq \alpha_x - M. \end{cases}$$

Поскольку функция $h(z, y, x, t)$ непрерывно дифференцируема и ограничена в \overline{B}^* , то к задаче (1*) применима теорема 1, согласно которой задача (1*) имеет решение $\tilde{y} = \tilde{y}(x, t)$, принадлежащее $[\alpha, \beta]$ (ибо α и β суть барьеры и для задачи (1*)). Но тогда в силу априорных оценок производной решения (справедливых и для \tilde{y}_x , так как $f = h$ всюду на \overline{B}^M), т.е. в силу того, что $\alpha_x - M \leq \tilde{y}_x \leq \beta_x + M$, заключаем, что всюду на решении $\tilde{y}(x, t)$ функция h совпадает с f , а значит, что \tilde{y} является также и решением задачи (1).

2. НЕКОТОРЫЙ КЛАСС, ДОПУСКАЮЩИЙ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРЕМЫ

В качестве примера рассмотрим сингулярно возмущенную краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа с условием периодичности по t

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial y}{\partial t} &= \varepsilon \frac{\partial y}{\partial x} A\left(\varepsilon^3 \frac{\partial y}{\partial x}, y, x, t\right) + B\left(\varepsilon^3 \frac{\partial y}{\partial x}, y, x, t\right), \quad (x, t) \in \Omega \equiv (0, 1) \times \mathbb{R}, \\ y(0, t, \varepsilon) &= y^0(t), \quad y(1, t, \varepsilon) = y^1(t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (7)$$

где A , B , y^0 и y^1 — T -периодические по t функции (при этом никаких специальных ограничений на характер роста A и B по y_x не накладывается).

Эта задача является обобщением рассмотренной ранее в [3] следующей постановки:

$$\varepsilon^4 \frac{d^2 y}{dx^2} = \varepsilon \frac{dy}{dx} A\left(\varepsilon^3 \frac{dy}{dx}, y, x\right) + B\left(\varepsilon^3 \frac{dy}{dx}, y, x\right), \quad x \in (0, 1), \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \quad y(1, \varepsilon) = y^1, \quad (8)$$

представляющей собой задачу (7) в случае, когда все входящие в уравнение величины, включая само решение, не зависят от t .

При анализе задачи (8) применялся метод пограничных функций (см. [4]), с помощью которого была построена асимптотика решения, обладающего двумя пограничными слоями (в окрестностях левой и правой граничных точек). Доказательство существования проводилось методом дифференциальных неравенств с использованием теоремы, доказанной в [5].

Поскольку построение асимптотики и получаемых на ее основе барьерных решений для задачи (7) ничем принципиально не отличается, ограничимся лишь краткой формулировкой основных результатов.

2.1. Построение асимптотики. Потребуем существования решения $y = \varphi(x, t)$ уравнения $B(0, y, x, t) = 0$ и выполнения условия $B_y(0, \varphi(x, t), x, t) > 0$, $(x, t) \in \overline{\Omega}$. Кроме того, считаем, что $A(0, \varphi(x, t), x, t) < 0$ при $(x, t) \in \{0\} \cup \{1\} \times \mathbb{R}$.

Будем строить T -периодическое по t решение, обладающее двумя погранслоями (в окрестностях левой и правой граничных прямых области Ω):

$$y(x, t, \varepsilon) = \bar{y}(x, t, \varepsilon) + \Pi(\tau, t, \varepsilon) + Q(\rho, t, \varepsilon), \quad \tau = x/\varepsilon^3, \quad \rho = (x-1)/\varepsilon.$$

Представим составляющие решения в виде рядов по ε

$$\bar{y}(x, t, \varepsilon) = \bar{y}_0(x, t) + \varepsilon \bar{y}_1(x, t) + \dots, \quad \Pi(\tau, t, \varepsilon) = \Pi_0(\tau, t) + \varepsilon \Pi_1(\tau, t) + \dots,$$

$$Q(\rho, t, \varepsilon) = Q_0(\rho, t) + \varepsilon Q_1(\rho, t) + \dots$$

Построение начнем с регулярной части. В нулевом приближении имеем $B(0, \bar{y}_0, x, t) = 0$, откуда $\bar{y}_0 = \varphi(x, t)$. В n -м приближении ($n \geq 1$) $\bar{y}_n B_y(0, \varphi(x, t), x, t) + \bar{G}_n(x, t) = 0$, где \bar{G}_n – известная функция аргументов $\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_{n-1}$ и их производных. Таким образом, $\bar{y}_n = -\bar{G}_n/B_y$.

Перейдем к левому погранслою. Нулевое приближение дает

$$\frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial \tau^2} = \frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} A \left(\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau}, \bar{y}_0(0, t) + \Pi_0, 0, t \right), \quad (\tau, t) \in \Pi^+ \equiv [0, +\infty) \times \mathbb{R},$$

$$\Pi_0(0, t) = y^0(t) - \bar{y}_0(0, t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \Pi_0(+\infty, t) = 0, \quad \frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau}(+\infty, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Считая, что производная $\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} \neq 0$ на Π^+ (предполагается, что $y^0(t) - \bar{y}_0(0, t) \neq 0$), можем представить ее в виде

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} = P^{(-)}(\Pi_0, t), \quad (10)$$

где $P^{(-)}$ определяется из начальной задачи

$$\partial P^{(-)}/\partial \Pi_0 = A(P^{(-)}, \bar{y}_0(0, t) + \Pi_0, 0, t), \quad P^{(-)}(0, t) = 0.$$

Предполагая ее разрешимость на $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, приходим к (10).

Поскольку $\Pi_0 = 0$ – устойчивая точка покоя уравнения (10), ибо $P^{(-)}(0, t) = 0$ и

$$\frac{\partial P^{(-)}}{\partial \Pi_0(0, t)} = \bar{A}^{(-)} < 0,$$

то, потребовав принадлежности $y^0(t) - \bar{y}_0(0, t)$ ее области влияния $(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \cap (\gamma_n(t), \gamma_b(t))$, где $\gamma_n(t)$ и $\gamma_b(t)$ – ближайшие к нулю соответственно снизу и сверху корни уравнения $P^{(-)}(\gamma, t) = 0$, получим утверждение о разрешимости задачи (9).

Для описания старших приближений левого погранслоя будем использовать обозначения

$$\bar{A}^{(-)}(t) = A(0, \bar{y}_0(0, t), 0, t),$$

$$\tilde{A}^{(-)}(\tau, t) = A \left(\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau}(\tau, t), \bar{y}_0(0, t) + \Pi_0(\tau, t), 0, t \right),$$

$$\tilde{P}^{(-)}(\tau, t) = P^{(-)}(\Pi_0(\tau, t), t), \quad \tilde{P}_0^{(-)}(\tau, t) = P^{(-)}(\tau, t)/P^{(-)}(0, t),$$

тогда n -е приближение ($n \geq 1$) дает

$$\frac{\partial^2 \Pi_n}{\partial \tau^2} = (\tilde{P}^{(-)} \tilde{A}_z^{(-)} + \tilde{A}^{(-)}) \frac{\partial \Pi_n}{\partial \tau} + \tilde{P}^{(-)} \tilde{A}_y^{(-)} \Pi_n + \tilde{G}_n^{(-)}, \quad (\tau, t) \in \Pi^+,$$

$$\Pi_n(0, t) = -\bar{y}_n(0, t), \quad \Pi_n(+\infty, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

где индекс z означает производную по первому аргументу, а $\tilde{G}_n^{(-)}(\tau, t)$ – известная при условии, что найдены $\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_n$, а также Π_0, \dots, Π_{n-1} , функция. Решая эту систему, находим

$$\Pi_n(\tau, t) = -\bar{y}_n(0, t) \tilde{P}_0^{(-)}(\tau, t) - \int_0^\tau \frac{\tilde{P}^{(-)}(\tau, t)}{\tilde{P}^{(-)}(s, t)} \int_s^{+\infty} \exp \left\{ \int_\zeta^s \tilde{P}^{(-)}(\xi, t) \tilde{A}_z^{(-)}(\xi, t) d\xi \right\} \tilde{G}_n^{(-)}(\zeta, t) d\zeta ds.$$

Приступим к правому погранслою. В нулевом приближении имеем

$$\frac{\partial Q_0}{\partial \rho} = P^{(+)}(Q_0, t), \quad (\rho, t) \in \Pi^- \equiv (-\infty, 0] \times \mathbb{R}, \quad Q_0(0, t) = y^1(t) - \bar{y}_0(1, t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

где $P^{(+)} = -B(0, \bar{y}_0(1, t) + Q_0, 1, t)/A(0, \bar{y}_0(1, t) + Q_0, 1, t)$.

Так же, как и в случае левой погранчасти, показывается, что $Q_0 = 0$ – устойчивая точка покоя уравнения (11). В качестве границ области влияния γ_n и γ_v для $y^1(t) - \bar{y}_0(1, t)$ выбираются ближайшие к нулю соответственно снизу и сверху корни уравнения

$$A(0, \bar{y}_0(1, t) + \gamma, 1, t)B(0, \bar{y}_0(1, t) + \gamma, 1, t) = 0.$$

Используя для описания старших приближений правого погранслоя обозначения $\bar{E}^{(+)}(t) = E(0, \bar{y}_0(1, t), 1, t)$, $\tilde{E}^{(+)}(\rho, t) = E(0, \bar{y}_0(1, t) + Q_0(\rho, t), 1, t)$, $\tilde{P}^{(+)}(\rho, t) = P^{(+)}(Q_0(\rho, t), t)$, $\tilde{P}_0^{(+)}(\rho, t) = P^{(+)}(\rho, t)/P^{(+)}(0, t)$, где в качестве функции E могут выступать A и B , а также их частные производные, n -е приближение ($n \geq 1$) запишем в виде

$$\tilde{A}^{(+)} \frac{\partial Q_n}{\partial \rho} + (\tilde{B}_y^{(+)} + \tilde{P}^{(+)} \tilde{A}_y^{(+)}) Q_n + \tilde{G}_n^{(+)} = 0, \quad (\rho, t) \in \Pi^-, \quad Q_n(0, t) = -\bar{y}_n(1, t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$\tilde{G}_n^{(+)}(\rho, t)$ – известная при условии, что найдены $\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_n$, а также Q_0, \dots, Q_{n-1} , функция. Решая эту систему, находим

$$Q_n(\rho, t) = -\bar{y}_n(1, t) \tilde{P}_0^{(+)}(\rho, t) - \int_0^\rho \frac{\tilde{P}^{(+)}(\rho, t) \tilde{G}_n^{(+)}(s, t)}{\tilde{P}^{(+)}(s, t) \tilde{A}^{(+)}(s, t)} ds.$$

Можно показать справедливость следующих мажорант:

$$\left| \frac{\partial^{k+l} \Pi_n}{\partial \tau^k \partial t^l} \right| < C_n^{k+l} (1 + \tau^{n+l}) \exp(\bar{A}^{(-)}(t)\tau), \quad \left| \frac{\partial^{k+l} Q_n}{\partial \rho^k \partial t^l} \right| < C_n^{k+l} (1 + |\rho|^{2n+l}) \exp\left(-\frac{\bar{B}_y^{(+)}(t)}{\bar{A}^{(+)}(t)} \rho\right).$$

2.2. Построение барьерных решений. Ниже при установлении разного рода неравенств C и c обозначают произвольные достаточно большие и достаточно малые постоянные соответственно.

Поставим в соответствие уравнению (7) дифференциальный оператор

$$Ly = L[y(x, t, \varepsilon)] = \varepsilon \frac{\partial y}{\partial t} - \varepsilon^4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial y}{\partial x} A\left(\varepsilon^3 \frac{\partial y}{\partial x}, y, x, t\right) + B\left(\varepsilon^3 \frac{\partial y}{\partial x}, y, x, t\right).$$

Нижнее решение уравнения (7) выберем следующим образом: $\alpha(x, t, \varepsilon) = \bar{\alpha} + \Pi\alpha + Q\alpha$, где

$$\bar{\alpha}(x, t, \varepsilon) = \bar{y}_0(x, t) + \dots + \varepsilon^n \bar{y}_n(x, t) + \varepsilon^{n+1} (\bar{y}_{n+1}(x, t) - \Upsilon),$$

$$\Pi\alpha(\tau, t, \varepsilon) = \Pi_0(\tau, t) + \dots + \varepsilon^n \Pi_n(\tau, t) + \varepsilon^{n+1} \Pi_{(n+1)\alpha}(\tau, t), \quad (12)$$

$$Q\alpha(\rho, t, \varepsilon) = Q_0(\rho, t) + \dots + \varepsilon^n Q_n(\rho, t) + \varepsilon^{n+1} Q_{(n+1)\alpha}(\rho, t);$$

здесь $\Upsilon > 0$ – некоторая постоянная, а $\Pi_{(n+1)\alpha}$, $Q_{(n+1)\alpha}$ определяются из задач

$$\frac{\partial^2 \Pi_{(n+1)\alpha}}{\partial \tau^2} = (\tilde{P}^{(-)} \tilde{A}_z^{(-)} + \tilde{A}^{(-)}) \frac{\partial \Pi_{(n+1)\alpha}}{\partial \tau} + \tilde{P}^{(-)} \tilde{A}_y^{(-)} \Pi_{(n+1)\alpha} + \tilde{G}_{(n+1)\alpha}^{(-)} + \psi_l,$$

$$\Pi_{(n+1)\alpha}(0, t) = -\bar{y}_{n+1}(0, t), \quad \Pi_{(n+1)\alpha}(+\infty, t) = 0,$$

$$\tilde{A}^{(+)} \frac{\partial Q_{(n+1)\alpha}}{\partial \rho} + (\tilde{B}_y^{(+)} + \tilde{P}^{(+)} \tilde{A}_y^{(+)}) Q_{(n+1)\alpha} + \tilde{G}_{(n+1)\alpha}^{(+)} + \psi_r = 0, \quad Q_{(n+1)\alpha}(0, t) = -\bar{y}_{n+1}(1, t),$$

где

$$\psi_l(\tau, t) = C_\psi \exp(\bar{A}^{(-)}(t)\tau), \quad \psi_r(\tau, t) = C_\psi \exp(-\bar{B}_y^{(+)}(t)\rho/\bar{A}^{(+)}(t)),$$

$$\tilde{G}_{(n+1)\alpha}^{(-)}(\tau, t) = \tilde{G}_{n+1}^{(-)} - \tilde{P}^{(-)} \tilde{A}_y^{(-)} \Upsilon, \quad \tilde{G}_{(n+1)\alpha}^{(+)}(\rho, t) = \tilde{G}_{n+1}^{(+)} - (\tilde{B}_y^{(+)} + \tilde{P}^{(+)} \tilde{A}_y^{(+)}) \Upsilon.$$

Считая A и B достаточно гладкими функциями, покажем корректность определения (12). Поскольку выполнение п. 1 определения 1 не вызывает сомнений, остановимся на доказательстве второго пункта ($L\alpha < 0$).

С точностью до экспоненциально бесконечно малых $L\alpha(x, t, \varepsilon) = \bar{L}\alpha + \Pi L\alpha + Q L\alpha$, где

$$\bar{L}\alpha(x, t, \varepsilon) \equiv L\bar{\alpha}(x, t, \varepsilon), \quad \Pi L\alpha(\tau, t, \varepsilon) \equiv L(\bar{\alpha}(\tau\varepsilon^3, t, \varepsilon) + \Pi\alpha(\tau, t, \varepsilon)) - L\bar{\alpha}(\tau\varepsilon^3, t, \varepsilon),$$

$$Q L\alpha(\rho, t, \varepsilon) \equiv L(\bar{\alpha}(1 + \rho\varepsilon, t, \varepsilon) + Q\alpha(\rho, t, \varepsilon)) - L\bar{\alpha}(1 + \rho\varepsilon, t, \varepsilon),$$

несложно убедиться в том, что $\bar{L}\alpha = -\varepsilon^{n+1} \Upsilon \bar{B}_y + O(\varepsilon^{n+2}) < 0$. Далее $\Pi L\alpha$ представим в виде

$$\begin{aligned} \Pi L\alpha(\tau, t, \varepsilon) &= \varepsilon^{-2} \Pi_{-2} L\alpha(\tau, t) + \dots + \varepsilon^{n-1} \Pi_{n-1} L\alpha(\tau, t) + \varepsilon^n R(\tau, t, \varepsilon) = \\ &= -\varepsilon^{n-1} \psi_l(\tau, t) + \varepsilon^n R(\tau, t, \varepsilon). \end{aligned} \tag{13}$$

Для $R(\tau, t, \varepsilon)$ может быть получена оценка $|R| < C(1 + \tau^{(4n+6)/3}) \exp(\bar{A}^{(-)}(t)\tau)$.

Используя последнее неравенство, из (13) получаем, что $\Pi L\alpha < 0$ при $\tau < c\varepsilon^{-3/(4n+6)}$. При больших τ величина $\Pi L\alpha$ заведомо меньше любой степени ε . Значит, на отрезке $[0, 1/2]$ (там, где $Q\alpha$ пренебрежимо мало) $L\alpha < 0$. Таким же образом можно показать отрицательность $L\alpha$ на отрезке $[1/2, 1]$.

Верхнее решение $\beta = \beta(x, t, \varepsilon)$ вводится и анализируется аналогично (изменяется лишь знак Υ и невязок).

Докажем упорядоченность нижнего и верхнего решений. Имеем

$$\beta(x, t, \varepsilon) - \alpha(x, t, \varepsilon) = 2\Upsilon\varepsilon^{n+1} + (\Pi_{(n+1)\beta} - \Pi_{(n+1)\alpha})\varepsilon^{n+1} + (Q_{(n+1)\beta} - Q_{(n+1)\alpha})\varepsilon^{n+1},$$

где $2\Upsilon > 0$, поэтому для положительности всего выражения достаточно неотрицательности каждой из фигурирующих в нем скобок. Поскольку

$$\begin{aligned} &\Pi_{(n+1)\beta} - \Pi_{(n+1)\alpha} = \\ &= \int_0^\tau \frac{\tilde{P}^{(-)}(\tau, t)}{\tilde{P}^{(-)}(s, t)} \int_s^{+\infty} \exp\left\{ \int_\zeta^s \tilde{P}^{(-)}(\xi, t) \tilde{A}_z^{(-)}(\xi, t) d\xi \right\} (2\psi_l(\zeta, t) + \tilde{G}_{(n+1)\alpha}^{(-)}(\zeta, t) - \tilde{G}_{(n+1)\beta}^{(-)}(\zeta, t)) d\zeta ds, \end{aligned} \tag{14}$$

из неравенства

$$|\tilde{G}_{(n+1)\alpha}^{(-)}(\tau, t) - \tilde{G}_{(n+1)\beta}^{(-)}(\tau, t)| = 2\Upsilon |\tilde{P}^{(-)} \tilde{A}_y^{(-)}| < C e^{\bar{A}^{(-)} t}$$

следует, что, выбирая C_ψ (из определения ψ_l, ψ_r) достаточно большой, легко обеспечить положительность выражения (14). Далее,

$$Q_{(n+1)\beta} - Q_{(n+1)\alpha} = \int_0^\rho \frac{\tilde{P}^{(+)}(\rho, t)}{\tilde{P}^{(+)}(s, t)} \frac{1}{\tilde{A}^{(+)}(s, t)} (2\psi_r(s, t) + \tilde{G}_{(n+1)\alpha}^{(+)}(s, t) - \tilde{G}_{(n+1)\beta}^{(+)}(s, t)) ds. \tag{15}$$

Так как

$$|\tilde{G}_{(n+1)\alpha}^{(+)}(\rho, t) - \tilde{G}_{(n+1)\beta}^{(+)}(\rho, t)| = 2\Upsilon |\tilde{B}_y^{(+)} + \tilde{P}^{(+)}\tilde{A}_y^{(+)}| < C \exp\left(-\frac{\tilde{B}_y^{(+)}}{\tilde{A}^{(+)}}\rho\right),$$

то, выбирая C_ψ достаточно большой и учитывая, что $\tilde{A}^{(+)}, \rho < 0$, убеждаемся в положительности выражения (15).

2.3. Доказательство существования решения и его асимптотического представления. Покажем применимость к задаче (7) теоремы 2. Для этого достаточно убедиться в принадлежности правой части уравнения (7)

$$f(z, y, x, t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1}\{\varepsilon z A(\varepsilon^3 z, y, x, t) + B(\varepsilon^3 z, y, x, t)\}$$

классу $A1(B^M)$ при некотором значении M .

Выберем $M = M(\varepsilon) = \tilde{M}\varepsilon^{n-2}$. Тогда, учитывая, что $\|\alpha_x\|_{C(\tilde{\Omega})}, \|\beta_x\|_{C(\tilde{\Omega})} < M_{\text{кр}}(\varepsilon) = \tilde{M}_{\text{кр}}/\varepsilon^3$, получаем

$$\|f_z\|_{C(\tilde{B}^M)} = \varepsilon^{-1}\|\varepsilon A + \varepsilon^4 z A_z + \varepsilon^3 B_z\|_{C(\tilde{B}^M)} < f_1(\tilde{M}, \varepsilon) = \tilde{f}_1(\varepsilon^{n+1}\tilde{M}),$$

$$\|f_y\|_{C(\tilde{B}^M)} = \varepsilon^{-1}\|\varepsilon z A_y + B_y\|_{C(\tilde{B}^M)} < f_2(\tilde{M}, \varepsilon) = \tilde{f}_2(\varepsilon^{n+1}\tilde{M})/\varepsilon^3,$$

где \tilde{f}_1 и \tilde{f}_2 – непрерывные неубывающие функции своих аргументов.

Кроме того, будем принимать во внимание также то обстоятельство, что

$$\|\beta - \alpha\|_{C(\tilde{\Omega})} < l = l(\varepsilon) = \tilde{l}\varepsilon^{n+1}, \quad \|\psi_\alpha\|_{C(\tilde{\Omega})} < \Delta_\alpha = \Delta_\alpha(\varepsilon) = \tilde{\Delta}_\alpha\varepsilon^{n-2},$$

$$\|\psi_\beta\|_{C(\tilde{\Omega})} < \Delta_\beta = \Delta_\beta(\varepsilon) = \tilde{\Delta}_\beta\varepsilon^{n-2}, \quad p = p(\varepsilon) = l/k = \tilde{l}\varepsilon^{n+1}/\varepsilon^3 = \tilde{l}\varepsilon^{n-2},$$

где ψ_α и ψ_β – невязки из определения 1 нижнего и верхнего решений.

Теперь непосредственной проверкой убеждаемся в том, что, выбирая ε достаточно малым ($0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$), а \tilde{M} достаточно большим:

$$\tilde{M} > 2\tilde{l}\tilde{f}_1(\varepsilon^{n+1}\tilde{M}) + (4(\tilde{l}\tilde{f}_1(\varepsilon^{n+1}\tilde{M}))^2 + 4\tilde{l}(\tilde{f}_2(\varepsilon^{n+1}\tilde{M})\tilde{l} + \tilde{\Delta}_\alpha + \tilde{\Delta}_\beta) + 2\tilde{l}^2)^{1/2},$$

легко добиться выполнимости пп. 1) и 2) определения 3 класса $A1$:

$$1) M(\varepsilon) = \tilde{M}\varepsilon^{n-2} > 4l(\varepsilon) = 4\tilde{l}\varepsilon^{n+1},$$

$$2) M(\varepsilon) = \tilde{M}\varepsilon^{n-2} > 2pf_1 + (4(pf_1)^2 + 4p(f_2l + \Delta_\alpha + \Delta_\beta) + 2p^2)^{1/2}.$$

Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 3. Пусть выполнен ряд требований:

1) вырожденное уравнение $B(0, y, x, t) = 0$ имеет корень $y = \varphi(x, t)$, удовлетворяющий условиям $B_y(0, \varphi(x, t), x, t) > 0$, $(x, t) \in \tilde{\Omega}$, $A(0, \varphi(x, t), x, t) < 0$, $(x, t) \in \{0\} \cup \{1\} \times \mathbb{R}$;

2) граничные функции $y^0 = y^0(t)$ и $y^1 = y^1(t)$ принадлежат соответствующим областям влияния корня вырожденного уравнения;

3) A , B , y^0 и y^1 суть достаточно гладкие функции своих аргументов:

$$A(z, y, x, t) \in C^{n+3}(\Omega_l) \cap C^{n+2}(\Omega_c) \cap C^{n+3}(\Omega_r),$$

$$B(z, y, x, t) \in C^{n+1}(\Omega_l) \cap C^{n+3}(\Omega_c) \cap C^{n+3}(\Omega_r), \quad y^0(t), y^1(t) \in C^2(\mathbb{R}),$$

где $\Omega_l \equiv \mathbb{R} \times [\bar{y}_0^{(-)}(t) - k_l, y^0(t) + k_l] \times [0, \varepsilon^2 k] \times \mathbb{R}$, $\Omega_c \equiv \mathbb{R} \times [\bar{y}_0^{(+)}(t) - k_r, y^1(t) + k_r] \times [1 - k, 1] \times \mathbb{R}$, $\Omega_r \equiv \mathbb{R} \times [\bar{y}_0(x, t) - k, \bar{y}_0(x, t) + k] \times \tilde{\Omega}$, k – произвольная положительная постоянная, $k_l = \text{sign}(y^0(t) - \bar{y}_0^{(-)}(t))k$, $k_r = \text{sign}(y^1(t) - \bar{y}_0^{(+)}(t))k$.

Тогда при достаточно малых ε существует решение $y = y(x, t, \varepsilon)$ задачи (7), для которого справедливо представление

$$y(x, t, \varepsilon) = \bar{y}_0(x, t) + P_0(\tau, t) + Q_0(\rho, t) + \dots + \varepsilon^n (\bar{y}_n(x, t) + P_n(\tau, t) + Q_n(\rho, t)) + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01-01-00753).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефёдов Н.Н. // Фунд. и прикл. математика. 1998. Т. 4. № 3. С. 799–851.
2. Amann H. // Nonlinear Analysis: A Collection of Papers in Honor of Erich Rothe. New York, 1978. P. 1–29.
3. Васильева А.Б., Букжалёв Е.Е. // Мат. методы и приложения: Тр. Девярых мат. чтений МГСУ. М., 2002. С. 33–36.
4. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.
5. Букжалёв Е.Е. // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 6. С. 723–730.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
11.09.2003 г.